Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. С. Маканин, А. Г. Савушкина, Уравнение в свободной группе, определяющее крашенные косы, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 4, 591–602

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm771>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 10:08:14

УДК 519.4

УРАВНЕНИЕ В СВОБОДНОЙ ГРУППЕ, ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЕ КРАШЕННЫЕ КОСЫ

Г. С. Маканин, А. Г. Савушкина

Дается описание общего решения уравнения

$$x_1^{-1} a_1 x_1 x_2^{-1} a_2 x_2 \dots x_n^{-1} a_n x_n = a_1 a_2 \dots a_n$$

в свободной группе.

Библиография: 6 названий.

1. Введение. Пусть F_n ($n \geq 2$) – свободная группа со свободными образующими $a_1, \dots, a_n$, и пусть $\text{Aut } F_n$ – группа автоморфизмов свободной группы F_n . Известно (см. [1]–[4]), что подгруппа группы $\text{Aut } F_n$, состоящая из тех автоморфизмов, которые отображают каждую образующую a_p в слово вида $X_p^{-1}(a_1, \dots, a_n) a_{i_p} X_p(a_1, \dots, a_n)$, а произведение $a_1 a_2 \dots a_n$ на себя, является группой кос $\mathfrak{B}_n$. Она порождается автоморфизмами

$$\sigma_i: \begin{cases} a_i \rightarrow a_{i+1}, \\ a_{i+1} \rightarrow a_{i+1}^{-1} a_i a_{i+1} \end{cases} \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

и задается определяющими соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & (i = 1, \dots, n-2), \\ \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i & (i, j = 1, \dots, n-1; |i-j| > 1). \end{aligned}$$

Подгруппа группы кос $\mathfrak{B}_n$, состоящая из тех автоморфизмов, которые отображают каждую образующую a_p в слово вида $X_p^{-1}(a_1, \dots, a_n) a_p X_p(a_1, \dots, a_n)$, является группой крашенных кос $\mathfrak{N}_n$. Она порождается образующими Бурау

$$s_{ik} \rightleftharpoons \sigma_{k-1} \sigma_{k-2} \dots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \dots \sigma_{k-2}^{-1} \sigma_{k-1}^{-1} \quad (1 \leq i < k \leq n)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00885.

и задается определяющими соотношениями Артина

$$\begin{aligned} s_{ij}s_{kl} &= s_{kl}s_{ij} & (i < j < k < l \text{ или } i < k < l < j), \\ s_{ij}s_{ik}s_{jk} &= s_{ik}s_{jk}s_{ij} & (i < j < k), \\ s_{ik}s_{jk}s_{ij} &= s_{jk}s_{ij}s_{ik} & (i < j < k), \\ s_{ik}s_{jk}s_{jl}s_{jk}^{-1} &= s_{jk}s_{jl}s_{jk}^{-1}s_{ik} & (i < j < k < l). \end{aligned}$$

В настоящей работе мы дадим описание множества всех решений следующего уравнения, называемого уравнением E:

$$x_1^{-1}a_1x_1x_2^{-1}a_2x_2 \dots x_n^{-1}a_nx_n = a_1a_2 \dots a_n$$

в свободной группе F_n . Здесь $x_1, x_2, \dots, x_n$ — неизвестные.

Будем рассматривать свободную группу F_{2n} со свободными образующими $x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n$ и преобразования вида

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow P_1, \\ \dots\dots\dots \\ x_n \rightarrow P_n, \\ a_1 \rightarrow a_1, \\ \dots\dots\dots \\ a_n \rightarrow a_n, \end{cases}$$

где $P_i \in F_{2n}$.

Преобразование вида

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow K_1, \\ \dots\dots\dots \\ x_n \rightarrow K_n, \end{cases}$$

где $K_1, \dots, K_n$ — слова в алфавите $(a_1, \dots, a_n)$, называется *решением уравнения E*, если

$$K_1^{-1}a_1K_1K_2^{-1}a_2K_2 \dots K_n^{-1}a_nK_n = a_1a_2 \dots a_n$$

в свободной группе F_n .

Конкретным поводом для изучения семейства решений уравнения E служит теорема Дж. Бирман: представление Гасснер группы крашенных кос $\mathfrak{N}_n$ матрицами n -го порядка (с элементами из кольца многочленов Лорана от n переменных с целыми коэффициентами) точное, если всякое решение уравнения E, компоненты которого принадлежат второму коммутанту свободной группы, единичное (см. [5, гл. 3]).

Слово вида $A^{-1}BA$ обозначается через B^A , всякая образующая a_m^{-1} обозначается через $\bar{a}_m$.

Преобразование $V(d_1, \dots, d_n)$, задаваемое соотношениями

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow a_1^{d_1}x_1, \\ \dots\dots\dots \\ x_n \rightarrow a_n^{d_n}x_n, \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 4. *Общее решение уравнения Е описывается параметрическим преобразованием*

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow a_1^{\zeta_1} \Psi_1(z), \\ \dots\dots\dots \\ x_n \rightarrow a_n^{\zeta_n} \Psi_n(z), \end{cases}$$

где ζ_p ($p = 1, \dots, n$) – переменные для целых чисел, z – переменная для крашених кос.

2. Уравнение кос. Будем рассматривать уравнение E_M :

$$x_1^{-1} a_{\mu_1} x_1 x_2^{-1} a_{\mu_2} x_2 \dots x_n^{-1} a_{\mu_n} x_n = a_1 a_2 \dots a_n$$

в свободной группе F_n . Здесь $x_1, x_2, \dots, x_n$ – неизвестные, $a_1, a_2, \dots, a_n$ – коэффициенты, $M = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ – подстановка.

Преобразование вида

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow K_1, \\ \dots\dots\dots \\ x_n \rightarrow K_n, \end{cases}$$

где $K_1, \dots, K_n$ – слова в алфавите $(a_1, \dots, a_n)$, называется *решением уравнения E_M* , если

$$K_1^{-1} a_{\mu_1} K_1 K_2^{-1} a_{\mu_2} K_2 \dots K_n^{-1} a_{\mu_n} K_n = a_1 a_2 \dots a_n$$

в свободной группе F_n . Решение будем называть *несократимым*, если для каждого $i = 1, \dots, n$ слово $K_i^{-1} a_{\mu_i} K_i$ несократимо.

Определим преобразования $\sigma_i(M, d)$ и $\sigma_i^{-1}(M, d)$, где $i = 1, \dots, n-1$, $M = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ – подстановка, d – целое число:

$$\begin{aligned} \sigma_i(M, d) &= \begin{cases} x_i \rightarrow x_{i+1}, \\ x_{i+1} \rightarrow a_{\mu_{i+1}}^d x_i x_{i+1}^{-1} a_{\mu_i} x_{i+1}, \end{cases} \\ \sigma_i^{-1}(M, d) &= \begin{cases} x_i \rightarrow a_{\mu_i}^{-d} x_{i+1} x_i^{-1} a_{\mu_{i+1}}^{-1} x_i, \\ x_{i+1} \rightarrow x_i. \end{cases} \end{aligned}$$

Заметим, что обратным к преобразованию $\sigma_i(M, d)$ будет преобразование

$$\sigma_i^{-1}(M \alpha_i, d) = \begin{cases} x_i \rightarrow a_{\mu_{i+1}}^{-d} x_{i+1} x_i^{-1} a_{\mu_i}^{-1} x_i, \\ x_{i+1} \rightarrow x_i. \end{cases}$$

В дальнейшем через α_i всегда будем обозначать транспозицию $(i, i+1)$, через e – тождественную подстановку, через $d, d_1, d_2, \dots$ – произвольные целые числа, через $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ – числа $+1, -1$. Длину слова A будем обозначать через $|A|$, графическое равенство двух слов A и B будем обозначать через $A \equiv B$.

Следующие четыре леммы проверяются непосредственным применением преобразований к переменным соответствующих уравнений.

ЛЕММА 1. Для любых ε и d

$$E_M \sigma_i^\varepsilon(M, d) = E_{M_{\alpha_i}} \quad (i = 1, \dots, n-1).$$

ЛЕММА 2. Для любых ε, d_1, d_2

$$E_M \sigma_i^\varepsilon(M, d_1) \sigma_i^{-\varepsilon}(M_{\alpha_i}, d_2) = E_M \quad (i = 1, \dots, n-1).$$

ЛЕММА 3. Для любых $d_1, \dots, d_6$

$$\begin{aligned} E_M \sigma_i(M, d_1) \sigma_{i+1}(M_{\alpha_i}, d_2) \sigma_i(M_{\alpha_i \alpha_{i+1}}, d_3) \\ = E_M \sigma_{i+1}(M, d_4) \sigma_i(M_{\alpha_{i+1}}, d_5) \sigma_{i+1}(M_{\alpha_{i+1} \alpha_i}, d_6) \quad (i = 1, \dots, n-1). \end{aligned}$$

ЛЕММА 4. Для любых $d_1, \dots, d_4$

$$\begin{aligned} E_M \sigma_i(M, d_1) \sigma_j(M_{\alpha_i}, d_2) = E_M \sigma_j(M, d_3) \sigma_i(M_{\alpha_j}, d_4) \\ (i, j = 1, \dots, n-1, \quad |i-j| > 1). \end{aligned}$$

ЛЕММА 5. Пусть уравнение E_M имеет несократимое решение Ξ_1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow K_1, \\ \dots\dots\dots \\ x_n \rightarrow K_n, \end{array} \right.$$

и пусть $K_i = S R$, $K_{i+1} = L S^{-1} a_{\mu_i} S R$, где LR – несократимое слово. Тогда преобразование Ξ_2 , задаваемое формулами

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow K_1, \\ \dots\dots\dots \\ x_i \rightarrow N, \\ x_{i+1} \rightarrow K_i, \\ \dots\dots\dots \\ x_n \rightarrow K_n, \end{array} \right.$$

где $LR = a_{\mu_{i+1}}^d N$ и $N^{-1} a_{\mu_{i+1}} N$ – несократимое слово, является несократимым решением уравнения $E_{M_{\alpha_i}}$ и $\Xi_1 = \sigma_i(M, d) \Xi_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произведение преобразований

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} x_i \rightarrow x_{i+1}, \\ x_k \rightarrow K_k \quad (k \neq i, i+1), \\ x_{i+1} \rightarrow a_{\mu_{i+1}}^d x_i x_{i+1}^{-1} a_{\mu_i} x_{i+1} \end{array} \right. \bullet \left\{ \begin{array}{l} x_i \rightarrow a_{\mu_{i+1}}^{-d} LR, \\ x_k \rightarrow K_k \quad (k \neq i, i+1), \\ x_{i+1} \rightarrow K_i \end{array} \right. \\ & = \left\{ \begin{array}{l} x_i \rightarrow K_i, \\ x_k \rightarrow K_k \quad (k \neq i, i+1), \\ x_{i+1} \rightarrow a_{\mu_{i+1}}^d a_{\mu_{i+1}}^{-d} LRR^{-1} S^{-1} a_{\mu_i} S R \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} x_i \rightarrow K_i, \\ x_k \rightarrow K_k \quad (k \neq i, i+1), \\ x_{i+1} \rightarrow LS^{-1} a_{\mu_i} S R. \end{array} \right. \end{aligned}$$

ЛЕММА 6. Пусть уравнение E_M имеет несократимое решение Ξ_1 , задаваемое формулами

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow K_1, \\ \dots\dots\dots \\ x_n \rightarrow K_n, \end{array} \right.$$

и пусть $K_i = LS^{-1} a_{\mu_{i+1}}^{-1} S R$, $K_{i+1} = S R$, где LR – несократимое слово. Тогда преобразование Ξ_2 , задаваемое формулами

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow K_1, \\ \dots\dots\dots \\ x_i \rightarrow K_{i+1}, \\ x_{i+1} \rightarrow N, \\ \dots\dots\dots \\ x_n \rightarrow K_n, \end{array} \right.$$

где $LR = a_{\mu_i}^d N$ и $N^{-1} a_{\mu_i} N$ – несократимое слово, является несократимым решением уравнения $E_{M_{\alpha_i}}$ и $\Xi_1 = \sigma_i^{-1}(M, d) \Xi_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} x_i \rightarrow a_{\mu_i}^{-d} x_{i+1} x_i^{-1} a_{\mu_{i+1}}^{-1} x_i, \\ x_k \rightarrow K_k \quad (k \neq i, i+1), \\ x_{i+1} \rightarrow x_i \end{array} \right. \bullet \left\{ \begin{array}{l} x_i \rightarrow K_{i+1}, \\ x_k \rightarrow K_k \quad (k \neq i, i+1), \\ x_{i+1} \rightarrow a_{\mu_i}^{-d} LR \end{array} \right. \\ & = \left\{ \begin{array}{l} x_i \rightarrow a_{\mu_i}^d a_{\mu_i}^{-d} LRR^{-1} S^{-1} a_{\mu_{i+1}}^{-1} S R, \\ x_k \rightarrow K_k \quad (k \neq i, i+1), \\ x_{i+1} \rightarrow K_{i+1} \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} x_i \rightarrow LS^{-1} a_{\mu_{i+1}}^{-1} S R, \\ x_k \rightarrow K_k \quad (k \neq i, i+1), \\ x_{i+1} \rightarrow K_{i+1}. \end{array} \right. \end{aligned}$$

ЛЕММА 7. Пусть уравнение E_M имеет несократимое решение

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow K_1, \\ \dots\dots\dots \\ x_n \rightarrow K_n, \end{array} \right.$$

и пусть $|K_1 \dots K_n| > 0$. Тогда существует $i \in \{1, \dots, n-1\}$ такое, что либо $K_i = S R$, $K_{i+1} = LS^{-1} a_{\mu_i} S R$, где LR – несократимое слово, либо $K_i = LS^{-1} \times a_{\mu_{i+1}}^{-1} S R$, $K_{i+1} = S R$, где LR – несократимое слово.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию

$$K_1^{-1} a_{\mu_1} K_1 K_2^{-1} a_{\mu_2} K_2 \dots K_n^{-1} a_{\mu_n} K_n = a_1 a_2 \dots a_n$$

в свободной группе F_n и каждое $K_p^{-1} a_{\mu_p} K_p$ – несократимое слово.

Выделим K_r такое, что $K_1 = \dots = K_{r-1} = 1$ и $|K_r| > 0$. При всяком способе сокращения левой части равенства либо некоторое K_{i+1}^{-1} сократит $a_{\mu_i} K_i$, либо некоторое K_i сократит $K_{i+1}^{-1} a_{\mu_{i+1}}$, иначе выделенное K_r не сократится.

3. Уравнение крашенных кос. Произведение преобразований

$$\sigma_{i_1}^{\varepsilon_1}(M_1, d_1) \dots \sigma_{i_r}^{\varepsilon_r}(M_r, d_r) \sigma_{i_{r+1}}^{\varepsilon_{r+1}}(M_{r+1}, d_{r+1}) \dots \sigma_{i_p}^{\varepsilon_p}(M_p, d_p) \quad (p \geq 0)$$

называется *совместимым*, если для каждого $r = 1, \dots, p-1$ выполнено $M_{r+1} = M_r \alpha_r$.

Пара $(M_1, M_p \alpha_{i_p})$ называется *индексом* выписанного произведения преобразований. Совместимое произведение преобразований C с индексом $(M_1, M_p \alpha_{i_p})$ обозначается через $C(M_1, M_p \alpha_{i_p})$.

Всякое совместимое произведение преобразований $C(M, N)$ называется *главным преобразованием* уравнения E_M . Легко видеть, что если $C(M, N)$ – главное преобразование уравнения E_M , то $E_M C(M, N) = E_N$.

ЛЕММА 8. Пусть уравнение E_M имеет несократимое решение Ξ :

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow K_1, \\ \dots\dots\dots \\ x_n \rightarrow K_n. \end{cases}$$

Тогда существует главное преобразование $C(M, \mathbf{e})$ уравнения E_M такое, что $\Xi = C(M, \mathbf{e}) T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО индукцией по длине слова $K_1 \dots K_n$.

Если $|K_1 \dots K_n| = 0$, то главное преобразование пусто и Ξ совпадает с T .

Если $|K_1 \dots K_n| > 0$, то по лемме 7 существует $i \in \{1, \dots, n-1\}$ такое, что либо $K_i = S R$, $K_{i+1} = L S^{-1} a_{\mu_i} S R$, где LR – несократимое слово, либо $K_i = L S^{-1} a_{\mu_{i+1}}^{-1} \times S R$, $K_{i+1} = S R$, где LR – несократимое слово. В соответствии с леммами 5 и 6 уравнение E_{α_i} имеет несократимое решение Ξ_1

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow L_1, \\ \dots\dots\dots \\ x_n \rightarrow L_n \end{cases}$$

такое, что $\Xi = \sigma_i^{\varepsilon}(M, d) \Xi_1$, $|L_1 \dots L_n| < |K_1 \dots K_n|$. По индуктивному предположению существует главное преобразование $C_1(\alpha_i, \mathbf{e})$ уравнения E_{α_i} такое, что $\Xi_1 = C_1(\alpha_i, \mathbf{e}) T$. Произведение преобразований $\sigma_i^{\varepsilon}(M, d) C_1(\alpha_i, \mathbf{e})$ будет искомым главным преобразованием.

Определим преобразование $\mathfrak{S}_{ik}(d_1, \dots, d_{2k-2i})$ ($1 \leq i < k \leq n$) соотношением

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{ik}(d_1, \dots, d_{2k-2i}) &= \sigma_{k-1}(\mathbf{e}, d_1) \sigma_{k-2}(\alpha_{k-1}, d_2) \sigma_{k-3}(\alpha_{k-1} \alpha_{k-2}, d_3) \dots \\ &\quad \sigma_{i+1}(\alpha_{k-1} \alpha_{k-2} \dots \alpha_{i+2}, d_{k-i-1}) \sigma_i(\alpha_{k-1} \alpha_{k-2} \dots \alpha_{i+1}, d_{k-i}) \\ &\quad \sigma_i(\alpha_{k-1} \alpha_{k-2} \dots \alpha_i, d_{k-i+1}) \sigma_{i+1}^{-1}(\alpha_{k-1} \alpha_{k-2} \dots \alpha_{i+1}, d_{k-i+2}) \dots \\ &\quad \sigma_{k-2}^{-1}(\alpha_{k-1} \alpha_{k-2}, d_{2k-2i-1}) \sigma_{k-1}^{-1}(\alpha_{k-1}, d_{2k-2i}). \end{aligned}$$

[illegible]

Перемножая первые два преобразования, получаем

[illegible]

Перемножая полученное преобразование с третьим преобразованием, получаем

[illegible]

ЛЕММА 11. Для любых i, k при условии $1 \leq i < k \leq n$ и любых целых чисел $d_1, \dots, d_n$ имеет место равенство

$$S_{ik} V(d_1, \dots, d_n) = V(d_1, \dots, d_n) S_{ik}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО легко следует из определения преобразований.

ЛЕММА 12. *Всякое совместимое произведение преобразований $C(e, e)$ может быть представлено в виде произведения преобразований*

$$V(d_1, \dots, d_n) \prod_{j=1}^r S_{i_j k_j}^{\varepsilon_j}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из лемм 9–11.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Если Ξ – решение уравнения Е, то легко подобрать внутреннее преобразование V_1 такое, что $\Xi = V_1 \Xi_1$ и Ξ_1 – несократимое решение уравнения Е. Согласно лемме 8 существует главное преобразование $C(e, e)$ уравнения Е такое, что $\Xi_1 = C(e, e) T$. Согласно лемме 12 $C(e, e) = V_2 S$, где V_2 – некоторое внутреннее преобразование, S – некоторое произведение базисных преобразований. Обозначив произведение внутренних преобразований $V_1 V_2$ через V , получаем $\Xi = V S T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Непосредственной подстановкой преобразования в уравнение Е доказывается, что всякое внутреннее и всякое базисное преобразование сохраняет уравнение Е и что терминальное преобразование является решением уравнения Е.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Рассмотрим свободную группу F_{2n} со свободными образующими $x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_n$. Базисные преобразования S_{ik} ($1 \leq i < k \leq n$) являются автоморфизмами группы F_{2n} . В частности,

$$S_{ik}^{-1} = \begin{cases} x_i \rightarrow x_i a_{i+1}^{x_{i+1}} \dots a_{k-1}^{x_k} \bar{a}_k^{x_k} \bar{a}_{k-1}^{x_{k-1}} \dots \bar{a}_{i+1}^{x_{i+1}} \bar{a}_i^{x_i}, \\ x_k \rightarrow x_k \bar{a}_k^{x_k} \bar{a}_{k-1}^{x_{k-1}} \dots \bar{a}_{i+1}^{x_{i+1}} \bar{a}_i^{x_i} a_{i+1}^{x_{i+1}} \dots a_k^{x_k-1}. \end{cases}$$

Базисные преобразования S_{ik} ($1 \leq i < k \leq n$) порождают группу. Обозначим ее через $\mathfrak{N}_n$. Непосредственной проверкой устанавливается, что в группе $\mathfrak{N}_n$ выполняются определяющие соотношения Артина группы крашенных кос $\mathfrak{N}_n$ и, следовательно, группа $\mathfrak{N}_n$ является гомоморфным образом группы $\mathfrak{N}_n$.

С другой стороны, действие базисного преобразования S_{ik} на подгруппе группы F_{2n} , порожденной свободными образующими $a_1^{x_1}, \dots, a_n^{x_n}$, имеет вид

$$\begin{cases} a_i^{x_i} \rightarrow a_{i+1}^{x_{i+1}} \dots a_{k-1}^{x_{k-1}} \bar{a}_k^{x_k} \dots \bar{a}_{i+1}^{x_{i+1}} a_i^{x_i} a_{i+1}^{x_{i+1}} \dots a_k^{x_k} \bar{a}_{k-1}^{x_{k-1}} \dots \bar{a}_{i+1}^{x_{i+1}}, \\ a_k^{x_k} \rightarrow \bar{a}_k^{x_k} \dots \bar{a}_i^{x_i} a_{i+1}^{x_{i+1}} \dots a_{k-1}^{x_{k-1}} a_k^{x_k} \bar{a}_{k-1}^{x_{k-1}} \dots \bar{a}_{i+1}^{x_{i+1}} a_i^{x_i} \dots a_k^{x_k}. \end{cases}$$

Оно совпадает с действием преобразования s_{ik} на группе F_n , имеющим вид

$$\begin{cases} a_i \rightarrow a_{i+1} \dots a_{k-1} a_k^{-1} \dots a_{i+1}^{-1} a_i a_{i+1} \dots a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_{i+1}^{-1}, \\ a_k \rightarrow a_k^{-1} \dots a_i^{-1} a_{i+1} \dots a_{k-1} a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_{i+1}^{-1} a_i \dots a_k. \end{cases}$$

Следовательно, группа крашенных кос $\mathfrak{N}_n$ является гомоморфным образом группы $\mathfrak{N}_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть Ξ – решение уравнения Е. По теореме 1 существует внутреннее преобразование V и произведение базисных преобразований $\prod_{j=1}^h S_{i_j k_j}^{\varepsilon_j}$ такие, что $\Xi = V \prod_{j=1}^h S_{i_j k_j}^{\varepsilon_j} T$, где T – терминальное преобразование. Согласно определению функций Ψ_i преобразование $\prod_{j=1}^h S_{i_j k_j}^{\varepsilon_j} T$ и соответствующее ему преобразование

$$x_p \rightarrow \Psi_p \left(\prod_{j=1}^h s_{i_j k_j}^{\varepsilon_j} \right),$$

где $s_{i_j k_j}$ – образующие группы крашенных кос, совпадают. Следовательно, решение уравнения E принадлежит параметрическому преобразованию теоремы 4.

С другой стороны, если $d_1, \dots, d_n$ – произвольные целые числа, а $\prod_{j=1}^h s_{i_j k_j}^{\varepsilon_j}$ – произвольная крашенная коса в образующих $s_{i_j k_j}$, то преобразование

$$x_p \rightarrow a_p^{d_p} \Psi_p \left(\prod_{j=1}^h s_{i_j k_j}^{\varepsilon_j} \right)$$

согласно теореме 2 является решением уравнения Е.

Дополнение. В теоремах 1–4 мы получили описание общего решения уравнения Е, которое использует задание группы крашенных кос $\mathfrak{N}_n$ образующими Бурау и определяющими соотношениями Артина. Кроме задания Бурау–Артина группа крашенных кос $\mathfrak{N}_n$ может быть задана образующими Маркова

$$\rho_{ik} = \sigma_{k-1}\sigma_{k-2}\dots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}\dots\sigma_{k-2}\sigma_{k-1} \quad (1 \leq i < k \leq n)$$

и определяющими соотношениями (см. [6])

$$\begin{aligned} \rho_{kl}\rho_{ij} &= \rho_{ij}\rho_{kl} & (j < k \text{ или } k \leq i < j < l), \\ \rho_{kl}\rho_{ij}\rho_{i+1}^{-1}\rho_j &= \rho_{ij}\rho_{j+1}^{-1}\rho_{ij}\rho_{kl} & (i \leq k \leq j < l). \end{aligned}$$

Используя это задание группы крашенных кос, можно получить еще одно описание общего решения уравнения E. Базисными преобразованиями в этом новом варианте описания будут преобразования

[illegible]

Базисные преобразования ρ_{ik} ($1 \leq i < k \leq n$) являются автоморфизмами группы F_n . В частности,

[illegible]

Базисные преобразования ρ_{ik} ($1 \leq i < k \leq n$) порождают группу, изоморфную $(\rho_{ik} \leftrightarrow \rho_{ik})$ группе крашенных кос $\mathfrak{N}_n$.

Совместной индукцией определим функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, аргументами которых являются крашенные косы в образующих ρ_{ik} , значениями – элементы группы F_n .

Имеем

$$\begin{aligned}\varphi_i(1) &= 1 \quad (i = 1, \dots, n), \\ \varphi_m(\rho_{ik}^\varepsilon Z) &= \varphi_m(Z) \quad (m = 1, \dots, i-1, k+1, \dots, n), \\ \varphi_r(\rho_{ik} Z) &= \varphi_r(Z) a_k^{\varphi_k(Z)} \quad (r = i, \dots, k-1), \\ \varphi_r(\rho_{ik}^{-1} Z) &= \varphi_r(Z) a_i^{\varphi_i(Z)} \dots a_{k-1}^{\varphi_{k-1}(Z)} \overline{a}_k^{\varphi_k(Z)} \overline{a}_{k-1}^{\varphi_{k-1}(Z)} \dots \overline{a}_i^{\varphi_i(Z)} \quad (r = i, \dots, k-1), \\ \varphi_k(\rho_{ik}^\varepsilon Z) &= \varphi_k(Z) (a_i^{\varphi_i(Z)} \dots a_{k-1}^{\varphi_{k-1}(Z)} a_k^{\varphi_k(Z)})^\varepsilon,\end{aligned}$$

где $\varepsilon = \pm 1$, Z – крашенная коса.

ТЕОРЕМА 5. *Общее решение уравнения E описывается параметрическим преобразованием*

$$x_p \rightarrow a_p^{\zeta_p} \varphi_p(Z) \quad (p = 1, \dots, n),$$

где ζ_p – переменные для целых чисел, Z – переменная для крашенных кос.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Burau W. Über Zopf-invarianten // Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg. 1933. V. 9. P. 117–124.
- [2] Марков А.А. Основы алгебраической теории кос // Тр. МИАН. 1945. Т. 16. С. 1–53.
- [3] Artin E. Theory of braids // Ann. Math. 1947. V. 48. P. 101–126.
- [4] Магнус В., Каррас А., Солитер Д. Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.
- [5] Birman J. Braids, Links, Mapping Class Groups // Ann. Math. Stud. V. 82. Princeton: Princeton Univ. Press, 1975.
- [6] Маканина А. Г. Определяющие соотношения группы крашенных кос // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1992. № 3. С. 14–19.

Математический институт им. В. А. Стеклова

Поступило

07.05.1998

Исправленный вариант

28.12.1999