Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Монахов, Е. Е. Грибовская, О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 4, 603–612

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm772>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:28:40

УДК 512.542

О МАКСИМАЛЬНЫХ И СИЛОВСКИХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

В. С. Монахов, Е. Е. Грибовская

Исследуется строение конечных разрешимых групп, у которых каждая силовская подгруппа является произведением двух циклических подгрупп. В частности, доказывается, что нильпотентная длина таких групп не превосходит 4. Устанавливается также, что нильпотентная длина конечной разрешимой группы, в которой индекс каждой максимальной подгруппы есть либо простое число, либо квадрат простого числа, либо куб простого числа, не превосходит 5.

Библиография: 11 названий.

Согласно теореме Пассенхауза [1, теорема IV.2.11] коммутант конечной группы с циклическими силовскими подгруппами является циклической холловой подгруппой, факторгруппа по которой также циклическая. Поэтому нильпотентная длина таких групп ≤ 2 . Конечным группам с метациклической силовской 2-подгруппой посвящена работа Мазурова [2]. Композиционные факторы неразрешимых групп с метациклическими силовскими p -подгруппами для всех p перечислены в [3].

Бициклической называют конечную группу, являющуюся произведением двух циклических подгрупп. Метациклическая группа всегда является бициклической. Обратное утверждение верно для примарных групп нечетного порядка и не всегда выполняется для бициклических 2-групп [1, теорема III.11.5].

В теоремах 1 и 2 настоящей заметки исследуется строение конечной разрешимой группы с бициклическими силовскими подгруппами. В частности, устанавливается, что нильпотентная длина таких групп ≤ 4 . Поскольку в любой конечной разрешимой группе индекс каждой максимальной подгруппы есть степень простого числа, то предложенный подход к доказательству теорем 1, 2 оказался применимым и к изучению конечных разрешимых групп, у которых индекс каждой максимальной подгруппы либо простое число, либо квадрат простого числа, либо куб простого числа. Строение таких групп рассматривается в теореме 3, где, в частности, доказывается, что нильпотентная длина этих групп ≤ 5 .

Рассматриваются только конечные группы. Напомним используемые определения и обозначения. Пусть A_G – наибольшая нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в подгруппе A , а $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G . Запись $G = AB$ означает, что группа G есть произведение своих подгрупп A и B , а $G = [A]B$ – полупрямое произведение с нормальной подгруппой A . Через $n(G)$, $d(G)$ и $l_p(G)$ обозначаются нильпотентная длина, производная длина и p -длина группы G соответственно, а $r(X)$ – главный ранг

разрешимой группы X , см. [1, с. 712]. Информация о бициклических группах содержится в [4]. Отметим, что существует бициклическая группа порядка 16, которая не является метациклической. Кроме того, в отличие от метациклических групп, подгруппы бициклических 2-групп не всегда бициклические. Ясно, что факторгруппы бициклических групп бициклические.

Для доказательства теорем потребуются следующие леммы.

ЛЕММА 1. Пусть P – бициклическая p -группа и N – ее дополняемая нормальная подгруппа. Тогда

- (1) если $p = 2$, то $|N/\Phi(N)| \leq 4$;
- (2) если $p > 2$, то либо $N = P$, либо N циклическая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО индукцией по порядку группы.

(1) Допустим противное, пусть $P = AB$ – бициклическая 2-группа, являющаяся произведением двух своих циклических подгрупп A и B , и пусть N – нормальная подгруппа, имеющая дополнение K в группе P . Воспользуемся методом доказательства леммы из [5]. Если подгруппа Фраттини $\Phi(N)$ отлична от единичной подгруппы, то по индукции $|N/\Phi(N)| = 2$ или 4. Пусть $\Phi(N) = 1$. Тогда N – элементарная абелева группа, а так как N нормальна в P , то пересечение $N \cap Z(P)$ с центром отлично от 1. Для подгруппы T порядка 2 из этого пересечения по индукции $|N/T| \leq 4$, поэтому можно считать, что $|N| = 8$. Пусть $C = C_P(N)$. Тогда C нормальна в P и если $L = C \cap K \neq 1$, то по индукции подгруппа $NL/L \simeq N$ имеет порядок 2 или 4. Поэтому следует считать, что $N = C$. Теперь P/N изоморфна подгруппе группы автоморфизмов группы N , которая изоморфна $GL(3, 2)$, и K изоморфна подгруппе группы диэдра порядка 8; в частности, экспонента K делит 4. Если nk^{-1} – произвольный элемент группы P , $n \in N$, $k \in K$, то $(nk^{-1})^4 = (nk^{-1}nk^{-1})(nk^{-1})^2 = nn^kn^{k^2}n^{k^3} = n^{(1+k)^3} = 1$, т.е. группа P имеет экспоненту 4. Поэтому $|P| = 16$, $|A| = |B| = 4$, $A \cap B = 1$. Теперь центр $Z = Z(P)$ – нециклическая подгруппа порядка 4 по [1, теорема VI.10.1]. Группа G имеет разложение в смежные классы по центру

$$G = Z \cup nZ \cup kZ \cup nkZ,$$

где $n \in N \setminus Z$, $\langle k \rangle = K$. В Z , nZ , kZ все элементы имеют порядок 2, поэтому образующие элементы a и b подгрупп A и B содержатся в смежном классе nkZ . Но если $a = nkz_1$, $b = nkz_2$, то $a^2 = (nk)^2 = b^2$ и $A \cap B \neq 1$, противоречие.

(2) Пусть $p > 2$ и $P = [N]K$ – метациклическая p -группа наименьшего порядка, разложимая в полупрямое произведение нормальной подгруппы N и подгруппы K , и пусть $P \neq N$. По индукции $\Phi(N) = 1$, поэтому N – элементарная абелева подгруппа порядка p^2 . Пусть b – элемент простого порядка из K . Если $P_1 = [N]\langle b \rangle$ – собственная подгруппа в P , то по индукции в группе P_1 подгруппа N недополняема, противоречие. Значит, $K = \langle b \rangle$ и P – группа порядка p^3 . Ясно, что P неабелева. Если P содержит нормальную подгруппу D порядка p с циклической факторгруппой P/D , то D содержится в центре P и P абелева, противоречие. Следовательно, P содержит циклическую подгруппу индекса p и подгруппа $\Omega_1(P)$, порожденная элементами порядка p , является элементарной абелевой подгруппой порядка p^2 по [6, теоремы 5.4.3 и 5.4.4]. Теперь $N = \Omega_1(P)$ и подгруппы K порядка p не существует. Значит, допущение неверно и лемма справедлива.

ЛЕММА 2. Пусть G – p -разрешимая группа с бициклической силовой p -подгруппой. Тогда

- (1) если $p = 2$, то $G/O_{2',2}(G)$ либо имеет нечетный порядок, либо изоморфна S_3 ; в частности, $l_2(G) \leq 2$;
- (2) если $p > 2$, то $l_p(G) \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) По индукции можно считать, что подгруппа Фиттинга F является 2-группой. Пусть Φ – подгруппа Фраттини группы G . Так как по [1, теорема III.4.5] факторгруппа $F^* = F/\Phi$ является подгруппой Фиттинга группы $G^* = G/\Phi$ и F^* – прямое произведение минимальных нормальных подгрупп группы G^* , то $F^* = C_{G^*}(F^*)$ и F^* дополняема в группе G^* по [1, лемма III.4.4]. По лемме 1 порядок подгруппы F^* равен 2 или 4. Если $|F^*| = 2$, то $F^* = G^*$ и G – 2-группа. Если $|F^*| = 4$, то $G/F \simeq G^*/F^*$ изоморфна подгруппе группы $GL(2, 2) \simeq S_3$ и либо $|G/F|$ нечетен, либо $G/F \simeq S_3$.

(2) По индукции подгруппа Фраттини единична и в группе нет неединичных нормальных p' -подгрупп. Кроме того, в группе единственная минимальная нормальная подгруппа. Поэтому $P = O_p(G)$ – элементарная абелева p -подгруппа, совпадающая со своим централизатором и имеющая в G дополнение. Поскольку силовая p -подгруппа в группе G метациклическая, то порядок P равен p или p^2 . Если $|P| = p$, то G/P – циклическая группа порядка, делящего $p - 1$, и P силовая в G . Если $|P| = p^2$, то по лемме 1 подгруппа P опять силовая в G . Лемма доказана.

Сверхразрешимым корадикалом группы называется ее наименьшая нормальная подгруппа, факторгруппа по которой сверхразрешима. Легко проверить, что сверхразрешимый корадикал в любой группе определен однозначно, а если H и K – подгруппы группы G и $H \leq K$, то сверхразрешимый корадикал подгруппы H содержится в сверхразрешимом корадикале подгруппы K , см. [7, с. 10].

ЛЕММА 3. Пусть H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(2, p)$. Тогда

- (1) $r(H) \leq 2$, $n(H) \leq 3$ и $d(H) \leq 4$;
- (2) сверхразрешимый корадикал подгруппы H является расширением циклической 2-группы порядка, делящего $(p - 1)$, с помощью подгруппы из элементарной абелевой группы порядка 4;
- (3) если H – $3'$ -группа, то H сверхразрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заключим H в максимальную разрешимую подгруппу M группы $GL(2, p)$ и докажем утверждение леммы для M . Ясно, что тогда утверждение будет справедливо и для H . Очевидно, M – неприводимая подгруппа.

Если M импримитивна, то M изоморфна сплетению циклической группы A порядка $p - 1$ и группы B порядка 2, см. [8, теорема 18.5]. Диагональ S базы $D = A \times A$ этого сплетения будет нормальной подгруппой в M , изоморфной A , поэтому M обладает нормальным рядом $1 \triangleleft S \triangleleft D \triangleleft M$, где группы S и D/S циклические порядка $p - 1$ и M/D порядка 2. Поэтому M сверхразрешима и $d(M) \leq 2$.

Если M примитивна и ее максимальная абелева нормальная подгруппа F изоморфна мультипликативной группе поля $GF(p^2)$, то по [8, теорема 21.1] факторгруппа M/F имеет порядок 2 и опять M сверхразрешима. Ясно, что $d(G) \leq 2$.

Пусть M примитивна и ее максимальная абелева нормальная подгруппа $F = GF(p) \# E_2$. Подгруппа F состоит из скалярных матриц [8, с. 234, формула (13)], поэтому F содержится в центре M . В M существует нормальная подгруппа A такая, что A содержит F и A/F изоморфна элементарной абелевой группе порядка 4, а M/A изоморфна симметрической группе степени 3, см. [8, с. 234, формулы (13) и (14)]. Заметим, что подгруппа M нильпотентна, если ее порядок не делится на 3. Так как $r(M/A) = 1$, $r(A/F) = 2$ и F нормальна в M , то $r(M/F) \leq 2$. Из того, что F содержится в центре M и $r(F) = 1$, следует, что $r(M) \leq 2$.

Так как A нильпотентна, то $n(M) \leq 3$, $d(M) \leq 4$ и силовская 2-подгруппа T из A нормальна в M . Теперь факторгруппа M/T обладает нормальным рядом $1 \triangleleft A/T \triangleleft M/T$, который уплотняется до главного ряда с факторами простых порядков. Значит, M/T сверхразрешима и сверхразрешимый корадикал подгруппы M содержится в T . Но $A = TF$, поэтому $A/F \simeq T/T \cap F$ и T является расширением циклической группы $T \cap F$ порядка, делящего $p - 1$, с помощью элементарной абелевой группы A/F порядка 4. По [8, гл. V, §21] других ситуаций для M нет. Лемма доказана.

Лемма 3 обобщает лемму [9, лемма 1].

ЛЕММА 4. Пусть H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(3, p)$. Тогда

- (1) $r(H) \leq 3$, $n(H) \leq 4$ и $d(H) \leq 5$;
- (2) для сверхразрешимого корадикала U подгруппы H возможны два случая:
  - (2.1) подгруппа U абелева порядка, делящего $(p - 1)^2$;
  - (2.2) U – 3-замкнутая $\{2, 3\}$ -подгруппа; ее силовская 3-подгруппа является расширением циклической группы порядка, делящего $p - 1$, с помощью подгруппы из элементарной абелевой группы порядка 9, а силовская 2-подгруппа является расширением циклической группы порядка, делящего $p - 1$, с помощью подгруппы из элементарной абелевой группы порядка 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заключим H в максимальную разрешимую подгруппу M группы $GL(2, p)$ и докажем утверждение леммы для M . Ясно, что тогда утверждение будет справедливо и для H . Очевидно, M – неприводимая подгруппа. По теореме Супруненко [8, с. 234] возможны три случая: группа M импримитивна; группа M примитивна и ее максимальная нормальная подгруппа F изоморфна мультипликативной группе поля $GF(p^3)$; группа M примитивна и ее максимальная нормальная подгруппа $F = GF(p) \# E_3$.

В первом случае группа M мономиальна и согласно [8, теорема 18.5] сопряжена в $GL(3, p)$ со сплетением $GF(p) \#_i S_3$, где S_3 – симметрическая группа порядка 6, см. [8, с. 234]. Кроме того, группа M состоит из линейных преобразований пространства $V = V(3, GF(p))$ таких, что $g(v_i) = \lambda_i v_{i_1}$, где $\{v_1, v_2, v_3\}$ – базис V . По [1, теорема II.7.2] преобразования d , для которых $d(v_i) = \lambda_i v_i$, образуют абелеву подгруппу D порядка $(p - 1)^3$, нормальную в M , и $M/D \simeq S_3$. Поэтому $d(M) \leq 3$ и $r(M) \leq 3$. Теперь $K = D \cap SL(3, p) \triangleleft M$ и $|K| = (p - 1)^2$. Ядро гомоморфизма $f: d \mapsto \det d$ совпадает с K . Поэтому D/K – циклическая группа порядка $p - 1$. Отсюда следует, что M/K сверхразрешима и сверхразрешимый корадикал группы M является абелевой подгруппой порядка, делящего $(p - 1)^2$.

Пусть теперь M примитивна и ее максимальная абелева нормальная подгруппа F изоморфна мультипликативной группе поля $GF(p^3)$. Группа F циклическая и $|F| = p^3 - 1$. По [8, теорема 21.1] $|M| = 3(p^3 - 1)$. Поэтому M сверхразрешима и $d(M) \leq 2$.

Пусть M примитивна и ее максимальная абелева нормальная подгруппа $F = GF(p)^{\#} E_3$. Подгруппа F состоит из скалярных матриц, поэтому F содержится в центре M . В M существует нормальная подгруппа A такая, что A содержит F и A/F изоморфна элементарной абелевой группе порядка 9, а M/A изоморфна симметрической группе S_4 степени 4, см. [8, с. 234, формулы (13) и (14)]. Так как A нильпотентна и $n(S_4) = d(S_4) = 3$, то $n(M) \leq 4$, $d(M) \leq 5$. Поскольку $r(S_4) \leq 2$, то и $r(M) \leq 2$. Из того, что $M/A \simeq S_4$, следует, что M содержит нормальную подгруппу B такую, что $M/B \simeq S_3$ и $A \subseteq B$, $B/A \simeq E_4$ – элементарная абелева группа порядка 4.

Так как A нильпотентна и нормальна в M , то $\{2, 3\}$ -холлова подгруппа T из A нормальна в M . Силовская 2-подгруппа в T циклическая порядка, делящего $p - 1$, а силовская 3-подгруппа P в T является расширением циклической подгруппы порядка, делящего $p - 1$, с помощью подгруппы из элементарной абелевой группы порядка 9. Ясно, что P нормальна в M .

Пусть $S - \{2, 3\}$ -холлова подгруппа в B . Так как $B = SF$ и $F \leq Z(M)$, то $S \triangleleft B$, поэтому $S \triangleleft M$. Пусть Q – силовская 2-подгруппа в S . Тогда Q является расширением циклической подгруппы порядка, делящего $p - 1$, с помощью подгруппы из элементарной абелевой группы порядка 4. Так как $P \triangleleft M$, то $S = [P]Q$. Теперь ряд $1 \leq FS/S = AS/S = B/S \triangleleft M/S$ уплотняется до главного ряда с факторами простых порядков. Поэтому M/S сверхразрешима и сверхразрешимый корадикал U подгруппы M содержится в S . Таким образом, сверхразрешимый корадикал U является 3-замкнутой $\{2, 3\}$ -подгруппой, силовская 3-подгруппа которой является расширением циклической группы порядка, делящего $p - 1$, с помощью подгруппы из элементарной абелевой группы порядка 9, а силовская 2-подгруппа является расширением циклической группы порядка, делящего $p - 1$, с помощью подгруппы из элементарной абелевой группы порядка 4. Лемма доказана.

Метанильпотентной называют группу, содержащую нильпотентную нормальную подгруппу, факторгруппа по которой нильпотентна.

ЛЕММА 5. Если G – метанильпотентная группа, то $l_p(G) \leq 1$ для любого простого p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть N – нильпотентная нормальная подгруппа группы G , факторгруппа по которой нильпотентна. Для любого простого p группа N представима в виде $N = N_p \times N_{p'}$, где N_p – силовская p -подгруппа группы N , а $N_{p'}$ – ее дополнение. Так как $N_{p'} \triangleleft G$, то $G_p N_{p'} \triangleleft G$, где G_p – силовская p -подгруппа группы G , поэтому $l_p(G) \leq 1$.

ТЕОРЕМА 1. Если G – разрешимая группа с бициклическими силовскими подгруппами, то сверхразрешимый корадикал группы G является расширением нильпотентной группы с помощью 2-группы. В частности, $n(G) \leq 4$ и $d(G) \leq 6$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через K сверхразрешимый корадикал группы G и применим индукцию по порядку группы G . Можно считать, что $\Phi(G) = 1$ и в группе G единственная минимальная нормальная подгруппа. Кроме того, подгруппа Фиттинга F группы является минимальной нормальной подгруппой, обладающей дополнением в группе G . Подгруппа F совпадает со своим централизатором в группе G и G/F

изоморфна подгруппе из группы автоморфизмов группы F . По лемме 1 всегда $|F|$ делит квадрат некоторого простого числа.

Если порядок F – простое число p , то G/F циклическая и K содержится в F , поэтому подгруппа K нильпотентна.

Если $|F| = p^2$, то G/F изоморфна подгруппе группы $GL(2, p)$ и по лемме 3 подгруппа KF/F является 2-группой. Так как $KF/F \simeq K/K \cap F$, то K является расширением нильпотентной группы $K \cap F$ с помощью 2-группы KF/F . Отсюда, в частности, вытекает, что $n(G) \leq 4$.

Для оценки производной длины опять применим индукцию по порядку группы. По индукции можно считать, что в группе G единственная минимальная нормальная подгруппа и подгруппа Фиттинга F является p -группой для некоторого простого p . Заметим, что $d(F) \leq 2$ по [1, теорема VI.4.4]. Пусть Φ – подгруппа Фраттини группы G . Тогда $F/\Phi = F^*$ – подгруппа Фиттинга группы $G/\Phi = G^*$ и порядок F^* равен p, p^2 или 8. Для нечетного p это следует из того, что F метацyclicеская, а для $p = 2$ из того, что нормальные подгруппы бициклических 2-групп порождаются не более чем тремя элементами [4]. Так как $C_{G^*}(F^*) = F^*$, то G^*/F^* изоморфна G/F и изоморфна подгруппе группы автоморфизмов F^* . Если $|F^*| = p$, то G/F циклическая и $d(G) \leq 3$. Если $|F^*| = 4$, то $|G/F|$ делит 6 и $d(G) \leq 4$. Если $|F^*| = p^2$ и $p > 2$, то $d(G) \leq 6$ по лемме 3. Если $|F^*| = 8$, то G/F изоморфна разрешимой подгруппе группы $GL(3, 2)$ и $d(G) \leq 5$. Таким образом, всегда $d(G) \leq 6$. Теорема 1 доказана.

Если π – некоторое множество простых чисел, то π' – множество всех простых чисел, не принадлежащих π . Через G_π обозначается π -холлова подгруппа группы G .

ЛЕММА 6. *В разрешимой группе с бициклическими силовскими 2- и 3-подгруппами $\{2, 3\}'$ -холлова подгруппа нормальна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО индукцией по порядку группы. Пусть G – разрешимая группа с бициклическими силовскими 2- и 3-подгруппами и $\pi = \pi(G) \setminus \{2, 3\}$. По индукции $O_\pi(G) = 1$, подгруппа Фраттини единична и в группе G единственная минимальная нормальная подгруппа F , которая является подгруппой Фиттинга. Кроме того, $F = C_G(F)$, факторгруппа G/F изоморфна подгруппе группы автоморфизмов F и $G = [F]M$ для некоторой максимальной в G подгруппы M . Если F – 2-группа, то по лемме 1 порядок F равен 2 или 4 и $G_\pi = 1$. Если F – 3-группа, то по лемме 2 подгруппа F силовская в G , $|G/F|$ делит $|GL(2, 3)| = 2^4 \cdot 3$ и опять $G_\pi = 1$. Лемма доказана.

Аналогичное утверждение, но при условии, что силовские 2- и 3-подгруппы метацyclicеские, доказано в [3].

ТЕОРЕМА 2. *Пусть G – разрешимая группа с бициклическими силовскими подгруппами. Тогда*

- (1) $\{2, 3\}'$ -холлова подгруппа нормальна в группе;
- (2) $2'$ -холлова подгруппа $G_{2'}$ дисперсивна по Оре, имеет нильпотентный коммутант и $d(G_{2'}) \leq 3$;
- (3) $3'$ -холлова подгруппа $G_{3'}$ дисперсивна по Оре, имеет нильпотентный сверхразрешимый корадикал и $d(G_{3'}) \leq 4$;
- (4) $n(G_{\{2, 3\}}) \leq 3$ и $d(G_{\{2, 3\}}) \leq 4$;
- (5) $\{2, p\}$ -холлова подгруппа $G_{\{2, p\}}$ дисперсивна по Оре и $d(G_{\{2, p\}}) \leq 4$ для любого $p > 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (1) следует из леммы 6.

(2) Можно считать, что 2 не делит порядок группы G . По индукции $\Phi(G) = 1$ и $F = F(G)$ – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , обладающая дополнением в G , и $F = C_G(F)$. По лемме 2 подгруппа F – силовская p -подгруппа группы G и $|F| = p^2$ или p . Если $|F| = p$, то G/F – циклическая группа порядка, делящего $p-1$. Пусть $|F| = p^2$. Тогда факторгруппа G/F изоморфна подгруппе полной линейной группы $GL(2, p)$, порядок которой равен $(p^2 - p)(p^2 - 1)$. Поэтому p – наибольший простой делитель порядка группы G . Так как G/F – неприводимая p' -подгруппа нечетного порядка группы $GL(2, p)$, то опять G/F циклическая. Таким образом, в любом случае факторгруппа G/F циклическая. Поэтому группа G дисперсивна по Оре и имеет нильпотентный коммутант. Так как в G все силовские подгруппы метациклические, то коммутант G' метациклический и $d(G) \leq 3$.

(3) Можно считать, что 3 не делит порядок группы G . Так как $G_{\{2,3\}}$ – нормальная подгруппа группы G , то G дисперсивна по Оре. По индукции с использованием леммы 3 получаем, что сверхразрешимый корадикал группы G нильпотентен. Для оценки производной длины применим индукцию по $|G|$. По индукции в группе G единственная минимальная нормальная подгруппа N . Поэтому N – p -подгруппа для наибольшего p , делящего порядок группы G . По лемме 2 подгруппа N силовская в группе G и $N/\Phi(N)$ элементарная абелева порядка p^2 . Теперь G/N изоморфна неприводимой разрешимой $3'$ -подгруппе группы $GL(2, p)$. Из доказательства леммы 3 следует, что либо $d(G/N) \leq 2$, либо G/N нильпотентна. Но в группе G все силовские подгруппы имеют производную длину не выше 2 по [1, теорема VI.4.4], поэтому в любом случае $d(G/N) \leq 2$ и $d(G) \leq 4$.

(4) Обозначим $\{2, 3\}$ -холлову подгруппу группы G через K . Из леммы 2 следует, что $n(K) \leq 3$. Для оценки производной длины опять применим индукцию по порядку группы. Заметим, что по [1, теорема VI.4.4] производные длины силовских 2-подгрупп и 3-подгрупп не выше 2. По индукции в группе K единственная минимальная нормальная подгруппа N . Если N – 2-группа, то подгруппа Фиттинга F – 2-группа. По [4] подгруппа F порождается не более чем тремя элементами, а по теореме Бернсайда о базисе порядок силовской 3-подгруппы группы K будет равен 3. Теперь в факторгруппе $K^* = K/F$ подгруппа Фиттинга F^* имеет порядок 3 и K^*/F^* – группа порядка ≤ 2 , т.е. $d(K/F) \leq 2$. Так как $d(F) \leq 2$, то $d(K) \leq 4$. Если N – 3-группа, то подгруппа Фиттинга F совпадает с силовской 3-подгруппой по лемме 2 и K/F изоморфна силовской 2-подгруппе. Поэтому опять $d(K) \leq 4$.

(5) Пусть $p > 3$. Из (1) следует, что силовская p -подгруппа группы $G_{\{2,p\}}$ нормальна в $G_{\{2,p\}}$, поэтому $G_{\{2,p\}}$ – p -замкнута и $d(G_{\{2,p\}}) \leq 4$. Теорема 2 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Группа G нечетного порядка с метациклическими силовскими подгруппами дисперсивна по Оре и имеет нильпотентный коммутант. В частности, $d(G) \leq 3$.*

Согласно теореме Холла [1, теорема VI.9.4] группа разрешима, если индекс каждой ее максимальной подгруппы – либо простое число, либо квадрат простого числа. Каморников [9] установил, что сверхразрешимый корадикал такой группы G является расширением нильпотентной группы с помощью 2-группы и главный ранг $r(G/\Phi(G)) \leq 2$. Если среди индексов максимальных подгрупп имеется куб простого числа, то группа

может быть неразрешимой. Из теоремы Гуральника [10], доказательство которой использует классификацию конечных простых групп, вытекает следующее утверждение: если G – неразрешимая группа, у которой индекс каждой максимальной подгруппы либо простое число, либо квадрат простого числа, либо куб простого числа, то $G/S(G) \simeq PSL(2, 7)$. Здесь $S(G)$ – наибольшая разрешимая нормальная подгруппа группы G .

ТЕОРЕМА 3. *Если G – разрешимая группа, у которой индекс каждой максимальной подгруппы – либо простое число, либо квадрат простого числа, либо куб простого числа, то $r(G/\Phi(G)) \leq 3$ и сверхразрешимый корадикал группы G является расширением метанильпотентной группы с помощью 2-группы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале покажем, что $r(G/\Phi(G)) \leq 3$. Пусть M – максимальная подгруппа группы G и $M_G = \bigcap_{x \in G} M^x$ – ее ядро. Тогда G/M_G примитивна и в G/M_G существует единственная минимальная нормальная подгруппа N/M_G такая, что

$$C_{G/M_G}(N/M_G) = N/M_G \text{ и } [N/M_G](M/M_G) = G/M_G.$$

Отсюда следует, что $(G/M_G)/(N/M_G) \simeq M/M_G$ и изоморфна подгруппе из группы автоморфизмов группы N/M_G .

Так как

$$|G:M| = |N/M_G| = |G/M_G:M/M_G| = |N/M_G|$$

и $|G:M|$ – либо простое число, либо квадрат простого числа, либо куб простого числа, то $|N/M_G|$ – либо простое число, либо квадрат простого числа, либо куб простого числа.

Пусть сначала $|N/M_G| = p$, где p – некоторое простое число. Тогда M/M_G – циклическая группа порядка, делящего $(p-1)$. Очевидно, G/M_G – сверхразрешимая группа и $r(G/M_G) = 1$.

Пусть теперь $|N/M_G| = p^2$. Тогда M/M_G изоморфна некоторой разрешимой неприводимой подгруппе группы $GL(2, p)$ и $r(M/M_G) \leq 2$ по лемме 3. Так как $|N/M_G| = p^2$, то $r(G/M_G) \leq 2$.

Предположим, что $|N/M_G| = p^3$. Теперь M/M_G изоморфна некоторой неприводимой разрешимой подгруппе группы $GL(3, p)$ и $r(M/M_G) \leq 3$ по лемме 4. Так как $|N/M_G| = p^3$, то $r(G/M_G) \leq 3$.

Итак, в любом случае $r(G/M_G) \leq 3$. Но $\Phi(G)$ есть пересечение ядер максимальных подгрупп группы G , поэтому по лемме Ремака (см. [7, с. 13]) $r(G/\Phi(G)) \leq 3$.

Теперь, используя индукцию по порядку группы G , покажем, что сверхразрешимый корадикал K группы G является расширением метанильпотентной группы с помощью 2-группы. Можно считать, что подгруппа Фраттини группы G единична, а подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G . Кроме того, $F = C_G(F)$ и $G = [F]M$, где M – некоторая максимальная подгруппа группы G . Отсюда следует, что $|F|$ равен p , либо p^2 , либо p^3 , где p – простое число.

Пусть сначала $|F| = p$. Тогда G/F – циклическая группа как группа автоморфизмов группы простого порядка p и группа G сверхразрешима.

Пусть теперь $|F| = p^2$. Тогда G/F изоморфна некоторой неприводимой разрешимой подгруппе группы $GL(2, p)$. По лемме 3 подгруппа KF/F является 2-группой, а из того, что F нильпотентна, следует, что подгруппа K является расширением нильпотентной группы с помощью 2-группы.

Осталось рассмотреть случай, когда $|F| = p^3$. Тогда G/F изоморфна некоторой неприводимой разрешимой подгруппе группы $GL(3, p)$ и по лемме 4 группа KF/F либо нильпотентна, либо является 3-замкнутой $\{2, 3\}$ -подгруппой и подгруппа K является расширением метанильпотентной группы с помощью 2-группы. Теорема 3 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если G – разрешимая группа, у которой индекс каждой максимальной подгруппы – либо простое число, либо квадрат простого числа, либо куб простого числа, то $n(G) \leq 5$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если G – разрешимая группа, у которой индекс каждой максимальной подгруппы – либо простое число, либо квадрат простого числа, либо куб простого числа, то $l_p(G) \leq 2$ для любого простого p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 3 следует, что группа G обладает нормальным рядом $1 \triangleleft H \triangleleft K \triangleleft G$ с метанильпотентными факторами H и G/K , а K/H – 2-группа. Теперь с помощью леммы 5 получаем, что $l_2(G) \leq 3$, а $l_p(G) \leq 2$ для любого простого $p > 2$.

Для получения оценки $l_2(G) \leq 2$ воспользуемся индукцией по порядку группы G . Можно считать, что $\Phi(G) = O_{2'}(G) = 1$, а подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ группы G – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , которая является элементарной абелевой 2-группой, и существует дополнение M к подгруппе F в группе G , см. [1, лемма VI.6.9]. Так как $|F| = |G : M|$, то порядок F равен 2, 4 или 8. Если $|F| = 2$, то $G = F$. Если $|F| = 4$, то факторгруппа G/F изоморфна подгруппе полной линейной группы $GL(2, 2) \simeq S_3$ и $l_2(G) \leq 2$. Если $|F| = 8$, то факторгруппа G/F изоморфна разрешимой подгруппе полной линейной группы $GL(3, 2)$ и в G/F нет нормальных неединичных 2-подгрупп. Так как группа $GL(3, 2) \simeq PSL(2, 7)$, то по [1, теорема II.8.27] либо $|G/F|$ нечетен, либо $G/F \simeq S_3$. Поэтому $l_2(G) \leq 2$. Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть G – группа, у которой индекс каждой максимальной подгруппы – либо простое число, либо квадрат простого числа. Тогда

- (1) сверхразрешимый корадикал группы G является расширением нильпотентной группы нечетного порядка с помощью 2-группы и $n(G) \leq 4$;
- (2) $l_2(G) \leq 2$ и $l_p(G) \leq 1$ для любого простого $p > 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) По теореме Холла [1, теорема VI.9.4] группа разрешима. Для рассматриваемой группы сохраняется доказательство теоремы 3, только надо исключить случай, когда $|F| = p^3$. Поэтому сверхразрешимый корадикал группы G является расширением нильпотентной группы нечетного порядка с помощью 2-группы и $n(G) \leq 4$;

(2) Из (1) следует, что группа G обладает нормальным рядом $1 \triangleleft H \triangleleft G$ с метанильпотентными факторами H и G/H . По лемме 5 получаем, что $l_p(G) \leq 2$ для любого простого p .

Для доказательства оценки $l_p(G) \leq 1$ при $p > 2$ воспользуемся индукцией по порядку группы G . Можно считать, что $\Phi(G) = O_{p'}(G) = 1$, а подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ группы G – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , которая является элементарной абелевой p -группой, и существует дополнение M к подгруппе F в группе G . Поэтому силовская p -подгруппа $G_p = [F](G_p \cap M) = [F]M_p$, где M_p – силовская p -подгруппа в M . Если $M_p = 1$, то $F = G_p$ и $l_p(G) \leq 1$. Пусть $M_p \neq 1$. Так как $|F| = |G : M|$, то порядок F равен p либо p^2 .

Если $|F| = p$, то факторгруппа G/F изоморфна подгруппе циклической группы автоморфизмов $\text{Aut } F$ группы F , порядок которой равен $p - 1$. Отсюда $G_p = F$ и $l_p(G) \leq 1$.

Пусть $|F| = p^2$. Тогда факторгруппа G/F изоморфна подгруппе полной линейной группы $GL(2, p)$, порядок которой равен $(p^2 - 1)(p^2 - p)$. Поэтому порядок силовской p -подгруппы G_p группы G равен p^3 . Если G_p абелева, то $l_p(G) \leq 1$, [1, с. 753]. Если G_p неабелева, то она изоморфна либо метациклической группе, либо группе экспоненты p [1, с. 93]. Согласно лемме 4 первый случай невозможен, а по теореме Холла–Хигмэна [11] во втором случае $l_p(G) \leq 1$.

Следствие 3 обобщает результаты Каморникова [9].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Huppert B. Endliche Gruppen I. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1967.
- [2] Мазуров В. Д. О конечных группах с метациклическими силовскими 2-подгруппами // Сиб. матем. ж. 1967. Т. 8. № 5. С. 966–982.
- [3] Chillag D., Sonn J. Sylow-metacyclic groups and $\mathbb{Q}$ -admissibility // Israel J. Math. 1981. V. 40. № 3–4. P. 307–323.
- [4] Huppert B. Über das Produkt von paarweise vertauschbaren zyklischen Gruppen // Math. Z. 1953. V. 58. P. 243–264.
- [5] Maier R. Über die 2-nilpotenz faktorisierbarer endlicher Gruppen // Arch. Math. 1976. V. 27. № 5. P. 480–483.
- [6] Gorenstein D. Finite Groups. New York, 1968.
- [7] Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
- [8] Супруненко Д. А. Группы матриц. М.: Наука, 1972.
- [9] Каморников С. Ф. К теореме Ф. Холла // Вопросы алгебры. № 5. Минск: Университетское, 1990. С. 45–52.
- [10] Guralnick R. Subgroups of prime power index in a simple group // J. Algebra. 1983. V. 81. № 2. P. 304–311.
- [11] Hall P., Higman G. On the p -length of a p -soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem // Proc. London Math. Soc. 1956. V. 3. P. 1–42.

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
E-mail: monakhov@gsu.unibel.by

Поступило
03.04.2000
Исправленный вариант
05.12.2000