Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Теляковский, О равномерной сходимости тригонометрических рядов с редко меняющимися коэффициентами, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 4, 613–620

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm773>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 17:08:07

УДК 517.518.4

О РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ С РЕДКО МЕНЯЮЩИМИСЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

С. А. Теляковский

Рассматриваются ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$ и $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$, коэффициенты которых удовлетворяют условию $a_k = a_{n_m}$ для $n_{m-1} < k \leq n_m$, где последовательность $\{n_m\}$ представима в виде объединения конечного числа лакунарных последовательностей. Получены следующие результаты. Если $ka_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$ сходится равномерно. Если $k|a_k| \leq C$ для всех k , то последовательность частных сумм этого ряда равномерно ограничена. Если ряд $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$ сходится при $x = 0$ и $ka_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то этот ряд сходится равномерно. Если последовательность частных сумм ряда $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$ при $x = 0$ ограничена и $k|a_k| \leq C$ для всех k , то последовательность частных сумм этого ряда равномерно ограничена. В этих утверждениях условия на скорость убывания коэффициентов рядов являются также необходимыми, если последовательность $\{n_m\}$ лакунарна. В общем случае они не являются необходимыми.

Библиография: 3 названия.

Известно (см. [1, с. 96, 98]), что если коэффициенты ряда по синусам

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx \tag{1}$$

монотонно убывают к нулю, то для равномерной сходимости этого ряда необходимо и достаточно выполнения условия $ka_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, а для равномерной ограниченности частных сумм ряда (1) необходимо и достаточно выполнения условия $ka_k \leq C$.

Здесь и в дальнейшем через C обозначаются абсолютные положительные постоянные, в разных случаях различные.

В [2, теорема 3] приведенный результат о равномерной сходимости распространен на ряды с квазимонотонными коэффициентами, когда для некоторого положительного числа α монотонно убывают числа $k^{-\alpha} a_k$.

В настоящей работе указывается еще один класс рядов типа (1), для которых справедливы такие же утверждения, как для рядов с монотонными коэффициентами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-01210, и INTAS, грант № 99-01080.

Поскольку в нашем случае коэффициенты a_k не обязаны иметь одинаковые знаки, то такие же вопросы будут рассмотрены и для рядов по косинусам

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx. \quad (2)$$

Будем говорить, что последовательность $\{a_k\}$ удовлетворяет *условию* Δ_L , если

$$a_k = a_{n_m} \quad \text{для } n_{m-1} < k \leq n_m, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где последовательность $\{n_m\}$, $n_0 = 0$, $n_1 = 1$, представима в виде объединения конечного числа лакунарных последовательностей. Таким образом, $\Delta a_k = a_k - a_{k+1} = 0$ для всех $k \neq n_m$, $m = 1, 2, \dots$.

Известно [1, с. 24], [3, лемма 1]), что каждое из следующих двух условий является необходимым и достаточным для того, чтобы последовательность $\{n_m\}$ можно было разбить на конечное число лакунарных последовательностей:

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{n_k} \leq \frac{C}{n_m}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^m n_k \leq C n_m, \quad m = 1, 2, \dots. \quad (5)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть коэффициенты ряда (1) удовлетворяют условию Δ_L .

Если $ka_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то ряд (1) сходится равномерно.

Если $k|a_k| \leq C$ для всех k , то последовательность частных сумм ряда (1) равномерно ограничена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем условия на скорость убывания коэффициентов ряда (1) следующим образом: существует монотонно убывающая последовательность $\{\alpha(k)\}$ такая, что $k|a_k| \leq \alpha(k)$. При этом если $ka_k \rightarrow 0$, то $\alpha(k) \downarrow 0$.

Так как

$$|\Delta a_{n_m}| \leq |a_{n_m}| + |a_{n_{m+1}}| \leq \frac{2}{n_m} \alpha(n_m), \quad (6)$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta a_k| = \sum_{m=1}^{\infty} |\Delta a_{n_m}| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{n_m} \alpha(n_m) \leq 2\alpha(1) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n_m}.$$

Последний ряд сходится в силу условия (4).

Отсюда следует, что ряд (1) сходится для всех x . Обозначим его сумму через $g(x)$.

Докажем сначала утверждение теоремы о равномерной сходимости.

По заданному n найдем число p такое, что

$$n_{p-1} < n \leq n_p. \quad (7)$$

Так как

$$g(x) - s_{n-1}(g, x) = g(x) - s_{n_p-1}(g, x) + s_{n_p-1}(g, x) - s_{n-1}(g, x)$$

и

$$|s_{n_p-1}(g, x) - s_{n-1}(g, x)| = \left| \sum_{k=n}^{n_p-1} a_k \sin kx \right| = |a_{n_p}| \left| \sum_{k=n}^{n_p-1} \sin kx \right| \leq n_p |a_{n_p}| \leq \alpha(n_p), \quad (8)$$

то достаточно оценить разности вида

$$g(x) - s_{n_p-1}(g, x).$$

При оценке этой разности будем пользоваться представлением

$$g(x) - s_{n_p-1}(g, x) = \sum_{k=n_p}^{\infty} a_k \sin kx = \sum_{m=p}^{\infty} \Delta a_{n_m} \tilde{D}_{n_m}(x) - a_{n_p} \tilde{D}_{n_p-1}(x), \quad (9)$$

где $\tilde{D}_k(x)$ – сопряженное ядро Дирихле порядка k .

Поскольку

$$|a_{n_p} \tilde{D}_{n_p-1}(x)| \leq \alpha(n_p), \quad (10)$$

задача сводится к оценке ряда

$$\sum_{m=p}^{\infty} \Delta a_{n_m} \tilde{D}_{n_m}(x). \quad (11)$$

Для каждой точки $x \in (0, \pi]$ найдем число j такое, что

$$x \in \left(\frac{\pi}{n_{j+1}}, \frac{\pi}{n_j} \right]. \quad (12)$$

Если выполнено условие (12) и $j < p$, то в силу (6) и (4) имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m=p}^{\infty} \Delta a_{n_m} \tilde{D}_{n_m}(x) \right| &\leq \frac{C}{x} \sum_{m=p}^{\infty} |\Delta a_{n_m}| \leq C n_{j+1} \sum_{m=p}^{\infty} \frac{1}{n_m} \alpha(n_m) \\ &\leq C n_{j+1} \alpha(n_p) \sum_{m=p}^{\infty} \frac{1}{n_m} \leq C n_{j+1} \alpha(n_p) \frac{1}{n_p} \leq C \alpha(n_p). \end{aligned} \quad (13)$$

Рассмотрим теперь случай, когда $j \geq p$. Запишем сумму из (11) в виде

$$\sum_{m=p}^{\infty} = \sum_{m=p}^j + \sum_{m=j+1}^{\infty}.$$

Сумма по $m \geq j+1$ оценивается по аналогии с оценкой (13):

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m=j+1}^{\infty} \Delta a_{n_m} \tilde{D}_{n_m}(x) \right| &\leq \frac{C}{x} \sum_{m=j+1}^{\infty} |\Delta a_{n_m}| \\ &\leq C n_{j+1} \alpha(n_{j+1}) \sum_{m=j+1}^{\infty} \frac{1}{n_m} \leq C \alpha(n_p). \end{aligned} \quad (14)$$

При оценке суммы по m от p до j будем пользоваться неравенством

$$|\tilde{D}_k(x)| = \left| \sum_{i=1}^k \sin ix \right| \leq \sum_{i=1}^k ix \leq k^2 x. \quad (15)$$

Согласно (15), (12), (6) и (5) имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m=p}^j \Delta a_{n_m} \tilde{D}_{n_m}(x) \right| &\leq x \sum_{m=p}^j n_m^2 |\Delta a_{n_m}| \leq \frac{C}{n_j} \sum_{m=p}^j n_m \alpha(n_m) \\ &\leq \frac{C}{n_j} \alpha(n_p) \sum_{m=p}^j n_m \leq C \alpha(n_p). \end{aligned} \quad (16)$$

Из (7)–(10), (13), (14) и (16) находим, что для всех x и n выполнена оценка

$$|g(x) - s_{n-1}(g, x)| \leq C \alpha(n). \quad (17)$$

Таким образом, установлено утверждение теоремы о равномерной сходимости ряда (1) и при этом получена оценка скорости сходимости (17).

Сходными рассуждениями доказывается и утверждение о равномерной ограниченности частных сумм.

Именно, с помощью оценки типа оценки (8) заключаем, что достаточно рассмотреть суммы вида $s_{n_p}(g, x)$.

Так как

$$s_{n_p}(g, x) = \sum_{m=1}^p \Delta a_{n_m} \tilde{D}_{n_m}(x) + a_{n_{p+1}} \tilde{D}_{n_p}(x),$$

то из условия $k|a_k| \leq C$ следует, что нужно получить оценку суммы

$$\sum_{m=1}^p \Delta a_{n_m} \tilde{D}_{n_m}(x). \quad (18)$$

Если для x выполнено условие (12) и $j \geq p$, то в силу оценок (15), (6) и (5) имеем

$$\left| \sum_{m=1}^p \Delta a_{n_m} \tilde{D}_{n_m}(x) \right| \leq x \sum_{m=1}^p n_m^2 |\Delta a_{n_m}| \leq \frac{C}{n_j} \alpha(1) \sum_{m=1}^p n_m \leq \frac{C}{n_j} \alpha(1) n_p \leq C \alpha(1). \quad (19)$$

А если $j < p$, то выделяем из суммы (18) слагаемые с $m \leq j$, для которых справедлива оценка (19), где нужно заменить p на j . Оценка оставшихся слагаемых из (18) проводится по аналогии с (13):

$$\left| \sum_{m=j+1}^p \Delta a_{n_m} \tilde{D}_{n_m}(x) \right| \leq \frac{C}{x} \sum_{m=j+1}^p |\Delta a_{n_m}| \leq C n_{j+1} \alpha(n_{j+1}) \sum_{m=j+1}^p \frac{1}{n_m} \leq C \alpha(n_{j+1}).$$

Таким образом, при условии $k|a_k| \leq C$ частные суммы ряда (1) равномерно ограничены, и теорема полностью доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть коэффициенты ряда (2) удовлетворяют условию Δ_L .

Если ряд (2) сходится при $x = 0$ и $ka_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то ряд (2) сходится равномерно.

Если последовательность частных сумм ряда (2) ограничена при $x = 0$ и $k|a_k| \leq C$ для всех k , то последовательность частных сумм ряда (2) равномерно ограничена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу оценки (6) ряд (2) сходится на $(0, \pi]$. Пусть $f(x)$ обозначает его сумму. Для простоты записей будем считать $a_0 = 0$. Понятно, что это не ограничивает общность.

Пусть величины $\alpha(k)$ имеют тот же смысл, что и в доказательстве теоремы 1. Как и при доказательстве теоремы 1, по n находим число p , для которого выполняются неравенства (7), и убеждаемся, что при $x \in (0, \pi]$ справедливы оценки

$$|f(x) - s_{n-1}(f, x)| \leq \left| \sum_{m=p}^{\infty} \Delta a_{n_m} D_{n_m}^*(x) \right| + C\alpha(n),$$

где $D_k^*(x) := \sum_{i=1}^k \cos ix$, и

$$|s_n(f, x)| \leq \left| \sum_{m=1}^p \Delta a_{n_m} D_{n_m}^*(x) \right| + C\alpha(n),$$

когда ряд (2) сходится при $x = 0$.

В случае сходимости ряда (2) наряду с $\alpha(k)$ введем монотонно убывающие к нулю величины $\beta(k)$ такие, что

$$\left| \sum_{i=k}^{\infty} a_i \right| \leq \beta(k).$$

В дальнейшем будет нужна оценка суммы

$$\sum_{m=p}^j n_m \Delta a_{n_m} = \sum_{k=n_p}^{n_j} k \Delta a_k = \sum_{k=n_p}^{n_j} a_k + a_{n_p}(n_p - 1) - a_{n_j+1}n_j.$$

В силу этого представления имеем

$$\left| \sum_{m=p}^j n_m \Delta a_{n_m} \right| \leq 2\beta(n_p) + 2\alpha(n_p). \quad (20)$$

Пусть x удовлетворяет условию (12).

Тогда для $j < p$ по аналогии с (13) получим оценку

$$\left| \sum_{m=p}^{\infty} \Delta a_{n_m} D_{n_m}^*(x) \right| \leq C\alpha(n_p).$$

При $j \geq p$ точно так же устанавливается оценка

$$\left| \sum_{m=j+1}^{\infty} \Delta a_{n_m} D_{n_m}^*(x) \right| \leq C\alpha(n_p).$$

Осталось рассмотреть сумму по m от p до j . В этом случае будем использовать оценку

$$|D_k^*(x) - k| = \left| \sum_{i=1}^k (\cos ix - 1) \right| \leq \sum_{i=1}^k ix \leq k^2 x, \quad 0 < x \leq \pi, \quad (21)$$

аналогичную (15). Тогда с помощью (20), (21), (6), (12) и (5) находим

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m=p}^j \Delta a_{n_m} D_{n_m}^*(x) \right| &\leq \left| \sum_{m=p}^j \Delta a_{n_m} (D_{n_m}^*(x) - n_m) \right| + C\beta(n_p) + C\alpha(n_p) \\ &\leq \sum_{m=p}^j |\Delta a_{n_m}| n_m^2 x + C\beta(n_p) + C\alpha(n_p) \\ &\leq Cx \sum_{m=p}^j \alpha(n_m) n_m + C\beta(n_p) + C\alpha(n_p) \leq C\alpha(n_p) + C\beta(n_p). \end{aligned}$$

Собрав вместе полученные результаты, приходим к оценке

$$|f(x) - s_{n-1}(f, x)| \leq C\alpha(n) + C\beta(n),$$

доказывающей утверждение теоремы 2 о равномерной сходимости и дающей, кроме того, оценку скорости сходимости.

Утверждение о равномерной ограниченности частных сумм также устанавливается по аналогии с доказательством соответствующей части теоремы 1. Нужно будет только пользоваться оценкой (21) подобно тому, как это делалось выше.

Понятно, что в теореме 2 условия на поведение ряда (2) при $x = 0$ являются необходимыми. При этом легко убедиться, что они не вытекают из условий на скорость стремления к нулю коэффициентов a_k . Например, если $n_m := 2^m$ и $a_{2^m} := 1/(m2^m)$, то $ka_k \rightarrow 0$, а ряд $\sum a_k$ расходится.

В теоремах 1 и 2 условия $ka_k \rightarrow 0$ и $k|a_k| \leq C$ не являются в общем случае необходимыми.

В самом деле, последовательность $\{2^m - 1, 2^m\}$, $m = 1, 2, \dots$, является объединением двух лакунарных последовательностей. Значит, последовательность коэффициентов

$$a_k := \begin{cases} m^{-2} & \text{для } k = 2^m, \\ 0 & \text{для } k \neq 2^m \end{cases}$$

удовлетворяет условию (3). Ряды (1) и (2) для этих коэффициентов сходятся равномерно, а вместе с тем условие $k|a_k| \leq C$ не выполнено.

Но если последовательность $\{n_m\}$ в условии (3) является лакунарной, то в теоремах 1 и 2 условия на скорость стремления коэффициентов a_k к нулю являются уже и необходимыми.

ТЕОРЕМА 3. Пусть коэффициенты ряда (1) удовлетворяют условию (3) для лакунарной последовательности $\{n_m\}$. Тогда если ряд (1) равномерно сходится, то $ka_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, а если частные суммы ряда (1) равномерно ограничены, то $k|a_k| \leq C$.

Такие же утверждения справедливы и для ряда (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\frac{n_{m+1}}{n_m} \geq q > 1, \quad m = 1, 2, \dots,$$

$$n_m^* := \max\left(n_m, \left\lceil \frac{n_{m+1}}{2} \right\rceil\right).$$

Тогда

$$\frac{n_{m+1}}{n_m^*} \geq q^* := \min(q, 2), \quad m = 1, 2, \dots \quad (22)$$

Пусть ряд (1) равномерно сходится и $g(x)$ обозначает его сумму. Введем величины

$$\gamma(k) := \max_{i \geq k} \|g(x) - s_i(g, x)\|_C.$$

Значит, $\gamma(k) \downarrow 0$ и

$$\|s_{n_{m+1}}(g, x) - s_{n_m^*}(g, x)\|_C \leq 2\gamma(n_m). \quad (23)$$

Но

$$s_{n_{m+1}}(g, x) - s_{n_m^*}(g, x) = a_{n_{m+1}} \sum_{k=n_m^*+1}^{n_{m+1}} \sin kx.$$

Положив здесь $x = \pi/(2n_{m+1})$, видим, что

$$\begin{aligned} \|s_{n_{m+1}}(g, x) - s_{n_m^*}(g, x)\|_C &\geq |a_{n_{m+1}}| \sum_{k=n_m^*+1}^{n_{m+1}} \sin \frac{k\pi}{2n_{m+1}} \geq |a_{n_{m+1}}| \sum_{k=n_m^*+1}^{n_{m+1}} \frac{k}{n_{m+1}} \\ &\geq |a_{n_{m+1}}| \frac{n_m^*+1}{n_{m+1}} (n_{m+1} - n_m^*) \\ &= n_{m+1} |a_{n_{m+1}}| \frac{n_m^*+1}{n_{m+1}} \left(1 - \frac{n_m^*}{n_{m+1}}\right). \end{aligned} \quad (24)$$

В силу определения чисел n_m^* и неравенства (22) имеем

$$\frac{n_m^*+1}{n_{m+1}} \left(1 - \frac{n_m^*}{n_{m+1}}\right) \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{q^*}\right). \quad (25)$$

Таким образом, из (23)–(25) получаем

$$2\gamma(n_m) \geq n_{m+1} |a_{n_{m+1}}| \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{q^*}\right),$$

откуда следует, что $ka_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Если же частные суммы ряда (1) равномерно ограничены, то величины

$$a_{n_{m+1}} \sum_{k=n_m^*+1}^{n_{m+1}} \sin kx$$

равномерно ограничены. Отсюда в силу проведенных оценок вытекает неравенство $k|a_k| \leq C$.

Для ряда (2) рассуждения аналогичны, но значения разностей

$$s_{n_{m+1}}(g, x) - s_{n_m^*}(g, x)$$

берутся при $x = 0$. Тогда получаем

$$\|s_{n_{m+1}}(f, x) - s_{n_m^*}(f, x)\|_C = |a_{n_{m+1}}|(n_{m+1} - n_m^*) \geq n_{m+1}|a_{n_{m+1}}|\left(1 - \frac{1}{q^*}\right).$$

Отсюда вытекают оба утверждения теоремы 3 о ряде (2).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
- [2] Shah S.M. Trigonometric series with quasi-monotone coefficients // Proc. Amer. Math. Soc. 1962. V. 13. P. 266–273.
- [3] Стечкин С. Б. Об абсолютной сходимости рядов Фурье (третье сообщение) // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1956. Т. 20. С. 385–412.

Математический институт им. В. А. Стеклова

Поступило
25.01.2001