Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Н. Хабибуллин, О росте целых функций экспоненциального типа с нулями вблизи прямой, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 4, 621–635

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm774>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 14:06:31

УДК 517.5

О РОСТЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА С НУЛЯМИ ВБЛИЗИ ПРЯМОЙ

Б. Н. Хабибуллин

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ – последовательность комплексных чисел, $\lambda_n \rightarrow \infty$, когда $n \rightarrow +\infty$. При условии близости последовательности Λ к мнимой оси мы получаем верхние оценки индикатора ненулевой целой функции экспоненциального типа минимального роста, обращающейся в нуль на Λ . Эти оценки дают условия, при которых система экспонент $\{\exp(\lambda_n z)\}$ не полна в неограниченной области в $\mathbb{C}$.

Библиография: 15 названий.

Введение. Пусть μ – мера на $\mathbb{C}$. Всюду в работе все меры предполагаются борелевскими и положительными. Полагаем $\mu(r) = \mu(D(r))$, где $D(r)$ – замкнутый круг на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с центром в нуле радиуса r .

Число

$$\Delta_\mu = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\mu(r)}{r},$$

если оно конечно, называем, как обычно, *верхней плотностью меры* μ (при порядке 1).

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, – последовательность комплексных чисел (точек), стремящаяся к бесконечности. С последовательностью Λ ассоциируется мера, которую также обозначаем как Λ , и определена она по правилу

$$\Lambda(G) = \sum_{\lambda_n \in G} 1, \quad G \subset \mathbb{C}.$$

Таким образом, терминология и обозначения, касающиеся мер, естественным образом переносятся на последовательности комплексных чисел Λ .

Целая функция f *обращается в нуль на последовательности* Λ , если кратность нуля функции f в каждой точке $\lambda \in \mathbb{C}$ не меньше числа точек $\lambda_n \in \Lambda$, равных λ . Последовательность Λ называем *последовательностью нулей* целой функции f , если кратность нуля функции f в каждой точке $\lambda \in \mathbb{C}$ равна числу повторений точки λ в последовательности Λ .

Индикатор субгармонической в $\mathbb{C}$ функции u конечного типа (при порядке 1), обозначаем, как обычно [1], через $h_u(\theta)$. Для индикатора субгармонической функции $\log |f(z)|$,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00770.

где f – целая функция экспоненциального типа (ЦФЭТ), наряду с обозначением $h_{\log|f|}$ используем и обозначение h_f .

Через $\mathbb{R}_+$ (соответственно $\mathbb{R}_-$) обозначаем положительную (соответственно отрицательную) полуось вещественной оси без нуля. Таким образом, $i\mathbb{R}_+$ (соответственно $i\mathbb{R}_-$) означает верхнюю (соответственно нижнюю) от нуля мнимую полуось.

Введем вариант произведения Вейерштрасса–Адамара [1], построенного по последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $\lambda_n \neq 0$, конечной верхней плотности:

$$W(z; \Lambda) = \prod_n \left(1 - \left(\frac{z}{\lambda_n} \right)^2 \right). \quad (0.1)$$

В работе Красичкова–Терновского [2] в связи с задачей спектрального синтеза на выпуклых областях доказаны следующие результаты.

ТЕОРЕМА А [2, теорема 8.3]. Пусть последовательность $\Lambda \subset i\mathbb{R}_+$ имеет конечную верхнюю плотность. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность $\Lambda' \subset i\mathbb{R}_+$ конечной верхней плотности такая, что индикатор ЦФЭТ $W(z) = W(z; \Lambda)W(z; \Lambda')$ удовлетворяет условию $h_W(\pm\pi/2) \leq \varepsilon$.

Эта теорема сыграла также важную роль при доказательствах обобщения теоремы Рубеля–Мальявена [3] о росте ЦФЭТ с предписанными нулями вдоль прямой и критерия полноты системы экспонент в неограниченной выпуклой области в наших работах [4]–[6].

ТЕОРЕМА В [2, теорема 8.5]. Пусть Λ_β – подпоследовательность последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}$ конечной верхней плотности, состоящая из точек λ_n , принадлежащих углу $|\arg z - \pi/2| \leq \beta$. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\beta > 0$, зависящее от ε , и последовательность $B = \{b_n\} \subset i\mathbb{R}_+$ с конечной верхней плотностью такие, что индикатор ЦФЭТ $W(z) = W(z; \Lambda_\beta)W(z; B)$ удовлетворяет условию $h_W(\pm\pi/2) \leq \varepsilon$.

Далее всюду под полнотой системы функций в области из Спонимается, полнота этой системы в пространстве голоморфных в этой области функций исключительно в топологии равномерной сходимости на компактах.

СЛЕДСТВИЕ [2, следствие 8.7]. Если последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ имеет конечную верхнюю плотность и сгущается к верхней мнимой полуоси в том смысле, что $\arg \lambda_n \rightarrow \pi/2$ при $n \rightarrow \infty$, то система $\{e^{\pm \lambda_n z}\}$ не полна ни в какой открытой горизонтальной полосе положительной ширины.

Оригинальные доказательства этих результатов потребовали в свое время достаточно сложных технических приемов и в полной мере использовали тонкие аналитические результаты объемной работы о сдвигах нулей целых функций [7] того же автора. В настоящей работе для доказательства приведенных результатов предлагается принципиально иной метод из [8], который позволяет их обобщить и уточнить. Доказанные ниже количественные варианты теорем А и В дают возможность учесть рост функций W как вдоль мнимой, так и вдоль вещественной оси. В качестве применения мы указываем усиление приведенного выше следствия, заменяя полосу на неограниченные, вообще говоря, невыпуклые области, сужающиеся на бесконечности к лучу, параллельному положительной полуоси. Сформулируем основные результаты работы.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть число $\beta \in (0, \pi/2)$ и μ – мера конечной верхней плотности $\Delta_\mu > 0$, носитель которой содержится в паре вертикальных углов

$$\left\{z : \left|\arg z - \frac{\pi}{2}\right| \leq \beta\right\} \cup \left\{z : \left|\arg z + \frac{\pi}{2}\right| \leq \beta\right\}. \quad (0.2)$$

Тогда для любой субгармонической функции u_μ с распределением масс Рисса μ найдется целая функция g с нулями только на мнимой и вещественной осях такая, что субгармоническая функция $u_\mu + \log |g|$ конечного типа при порядке 1 и для ее индикатора $h_{u_\mu + \log |g|}$ выполнена оценка

$$h_{u_\mu + \log |g|}(\theta) < \frac{12\pi(\pi + 2)\Delta_\mu}{\pi/2 - \beta} \cdot (|\cos \theta| \operatorname{ctg} \beta + |\sin \theta| \operatorname{tg} \beta), \quad \theta \in [-\pi, \pi]. \quad (0.3)$$

Если требовать выполнение только оценки

$$h_{u_\mu + \log |g|}\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) < \frac{12\pi(\pi + 2)\Delta_\mu}{\pi/2 - \beta} \cdot \operatorname{tg} \beta, \quad (0.4)$$

то при условии

$$\left|\int_{1 < |\zeta| \leq r} \operatorname{Re} \frac{1}{\zeta} d\mu(\zeta)\right| = O(1), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (0.5)$$

можно выбрать функцию g с нулями только на мнимой оси.

В случае, когда в роли меры μ выступает мера Λ , ассоциированная с последовательностью комплексных точек Λ , субгармоническая функция u_Λ с распределением масс Рисса Λ представляется в виде $u_\Lambda = \log |f_\Lambda|$, где f_Λ – целая функция с последовательностью нулей Λ [9, лемма 10.10], и из основной теоремы сразу вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть число $\beta \in (0, \pi/2)$ и $\Lambda = \{\lambda_n\}$ – последовательность конечной верхней плотности $\Delta_\Lambda > 0$, которая, начиная с некоторого номера n , содержится в паре вертикальных углов (0.2). Тогда для любой целой функции f_Λ с последовательностью нулей Λ существует целая функция g с нулями только на вещественной и мнимой осях такая, что произведение $f = f_\Lambda g$ – ЦФЭТ и для индикатора h_f функции f выполнена оценка

$$h_f(\theta) < \frac{12\pi(\pi + 2)\Delta_\Lambda}{\pi/2 - \beta} \cdot (|\cos \theta| \operatorname{ctg} \beta + |\sin \theta| \operatorname{tg} \beta), \quad \theta \in [-\pi, \pi]. \quad (0.6)$$

Если при дополнительном условии

$$\left|\sum_{1 < |\lambda_n| \leq r} \operatorname{Re} \frac{1}{\lambda_n}\right| = O(1), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (0.7)$$

требовать выполнение лишь оценки

$$h_f\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) < \frac{12\pi(\pi + 2)\Delta_\Lambda}{\pi/2 - \beta} \cdot \operatorname{tg} \beta, \quad (0.8)$$

то можно выбрать функцию g с нулями только на мнимой оси.

Это следствие можно рассматривать как развитие теоремы В, которая содержится в оценке (0.3) при достаточно малом β , правда без учета специального вида (0.1) функции W .

Для последовательности комплексных чисел $\Lambda \subset \mathbb{C}$ определим систему кратных экспонент

$$\operatorname{Exp} \Lambda = \{z^{k-1} \exp(\lambda z) : \lambda \in \Lambda, 1 \leq k \leq k(\lambda)\},$$

где $k(\lambda)$ – число повторений точки λ в последовательности Λ .

СЛЕДСТВИЕ 2. При тех же предположениях, что и в следствии 1, система $\text{Ехр } \Lambda$ не полна ни в какой области, содержащей открытый прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, проекции которых на мнимую и вещественную ось равны соответственно

$$\frac{24\pi(\pi+2)\Delta_\Lambda}{\pi/2-\beta} \cdot \operatorname{tg} \beta \quad \text{и} \quad \frac{24\pi(\pi+2)\Delta_\Lambda}{\pi/2-\beta} \cdot \operatorname{ctg} \beta. \quad (0.9)$$

Говорим, что последовательность комплексных точек $\Lambda = \{\lambda_n\}$ сгущается к мнимой оси, если

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{|\lambda_n|} = 0.$$

Как развитие теоремы А может рассматриваться

ТЕОРЕМА 1. Пусть последовательность Λ конечной верхней плотности Δ_Λ сгущается к мнимой оси и f_Λ – целая функция с последовательностью нулей Λ . Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ можно подобрать целую функцию g с нулями только на вещественной и мнимой осях такую, что произведение $f = f_\Lambda g$ – ЦФЭТ и для индикатора h_f функции f одновременно выполнены оценки

$$h_f\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) < \varepsilon \quad \text{и} \quad \max\{h_f(0), h_f(\pi)\} \leq \frac{61000\Delta_\Lambda^2}{\varepsilon}. \quad (0.10)$$

Если требовать выполнение лишь первой оценки в (0.10), то при условии (0.7) можно выбрать функцию g с нулями только на мнимой оси.

Конечно же, абсолютные постоянные $12\pi(\pi+2)$, $24\pi(\pi+2)$ и 61000 в оценках (0.3), (0.4), (0.6) и (0.8)–(0.10) далеки от наилучших возможных, что можно проследить и по доказательству сформулированных результатов. Появление знаменателя $\pi/2-\beta$ в этих оценках, по всей видимости, обусловлено методом доказательства, и при β , близких к нулю, его влияние несущественно. В то же время, используя результаты работы [6], можно построить примеры последовательностей Λ , показывающие, что обратно пропорциональная зависимость в (0.6) между возможным минимальным ростом ЦФЭТ f , обращающейся в нуль на Λ , вдоль вещественной оси и вдоль мнимой оси при β , близких к нулю, существенна.

Следующее утверждение содержит в себе сформулированное выше следствие [2, следствие 8.7].

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть G – область в $\mathbb{C}$, которая содержит луч l , параллельный вещественной оси, и вместе с каждой точкой $x_0 + iy_0 \in l$ содержит все точки вертикального интервала $\{x_0 + iy \in \mathbb{C} : -y_-(x_0) < y - y_0 < y_+(x_0)\}$. Если $|t|y_-(t) \rightarrow +\infty$ или $|t|y_+(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$ или при $t \rightarrow -\infty$ и последовательность Λ конечной верхней плотности сгущается к мнимой оси, то система $\text{Ехр } \Lambda$ не полна в области G .

Очевидно, всякая горизонтальная полоса есть область вида, указанного в следствии 3, с постоянными функциями $y_-(t)$ и $y_+(t)$, и при этом области G из следствия 3 не исчерпываются (полу-)полосами, а могут быть невыпуклыми и сужающимися к лучу l .

1. Использование функций Йенсена. Мера t с компактным носителем в $\mathbb{C}$ называется *мерой Йенсена* (см. [8], [10]–[12]), если для любой субгармонической в $\mathbb{C}$ функции u выполнено неравенство $u(0) \leq \int u \, dt$.

Пусть t – мера Йенсена. *Потенциалом меры t* (см. [8]–[10]) будем называть функцию

$$V_t(\zeta) = \int \log |z - \zeta| \, dt(z) - \log |\zeta|.$$

Субгармоническую в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ функцию V называем *функцией Йенсена* [8], если $V(\zeta) \geq 0$ при $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, существует число $R > 0$ такое, что $V(\zeta) \equiv 0$ при $|\zeta| \geq R$, и справедливо соотношение

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{V(\zeta)}{-\log |\zeta|} \leq 1.$$

Предложение 1.1 (ср. [8, теорема 3]). Пусть μ – мера в $\mathbb{C}$, сосредоточенная вне некоторой окрестности нуля, и p_ν – непрерывная субгармоническая в $\mathbb{C}$ функция с распределением масс Рисса ν . Если существует постоянная C такая, что для всех функций Йенсена V выполнено неравенство

$$\int V \, d\mu \leq \int V \, d\nu + C, \quad (1.1)$$

то для любой субгармонической функции u_μ с распределением масс Рисса μ найдется целая функция $g \neq 0$, для которой выполнено соотношение

$$u_\mu(z) + \log |g(z)| \leq \sup_{|z-\zeta| \leq 1} p_\nu(\zeta) + 4 \log(2 + |z|), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (1.2)$$

Доказательство. Условие (1.1) можно заменить на условие (см. [8, предложение 4.1]): существует постоянная C такая, что

$$\int V_t \, d\mu \leq \int V_t \, d\nu + C$$

для всех мер Йенсена t . Последнее условие можно переписать в виде (см. [8, предложение 1.4])

$$\int u_\mu \, dt \leq \int p_\nu \, dt + C - p_\nu(0) + u_\mu(0)$$

для всех мер Йенсена t . Отсюда согласно частному случаю [12, теорема 1] для некоторой целой функции $g \neq 0$ имеем (1.1).

Предложение 1.1 доказано.

Если в предложении 1.1 взять субгармоническую функцию $p_\nu(x + iy) = \pi a|x| + \pi b|y|$, $x + iy \in \mathbb{C}$, где a и b – неотрицательные постоянные, то, как нетрудно показать, распределение масс Рисса ν действует по правилу

$$\int V \, d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} V(x)b \, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} V(iy)a \, dy,$$

и предложение 1.1 переходит в

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Пусть μ – мера в $\mathbb{C}$, сосредоточенная вне некоторой окрестности нуля, а a и b – неотрицательные постоянные. Если существует постоянная C такая, что

$$\int V d\mu \leq b \int_{-\infty}^{+\infty} V(x) dx + a \int_{-\infty}^{+\infty} V(iy) dy + C \quad (1.3)$$

для всех функций Йенсена, то для любой субгармонической функции u_μ с распределением масс Рисса μ найдется целая функция $g \not\equiv 0$, для которой выполнено соотношение

$$u_\mu(x + iy) + \log |g(x + iy)| \leq \pi a|x| + \pi b|y| + 4 \log(2 + |z|), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

2. Переход к целым функциям с нулями на лучах. Имея в виду применения утверждений этого пункта и в других работах, приводим их для функций произвольного порядка $\rho \in \mathbb{R}_+$.

Замкнутое множество лучей S на комплексной плоскости с началом в нуле называем *системой лучей* и одновременно рассматриваем S и как множество точек на $\mathbb{C}$. Связные компоненты множества $\mathbb{C} \setminus S$ называем *углами*, *дополнительными к S* [13].

Систему лучей S называем ρ -допустимой, если раствор любого угла, дополнительного к S , меньше, чем π/ρ [13, определение 1.4].

Пусть s – непустое замкнутое 2π -периодическое подмножество в $\mathbb{R}$, т.е. характеристическая функция подмножества s имеет период 2π . Такое подмножество s называем *множеством направлений*, а связные компоненты его дополнения в $\mathbb{R}$ называем *интервалами*, *дополнительными к s* .

Множество направлений s называем ρ -допустимым, если длина любого интервала, дополнительного к s , меньше, чем π/ρ .

Очевидно, система лучей S ρ -допустима тогда и только тогда, когда множество значений аргументов точек из S ρ -допустимо.

Пусть u – субгармоническая функция в $\mathbb{C}$. *Выметанием функции u на систему лучей S* называем субгармоническую функцию u_S^b , гармоническую вне S и такую, что $u(z) = u_S^b(z)$ для всех точек $z \in S$ [13, определение 2.1].

Пусть h – ρ -тригонометрически выпуклая 2π -периодическая функция на $\mathbb{R}$. *Выметанием функции h на множество направлений s* называем ρ -тригонометрически выпуклую 2π -периодическую функцию h_s^b , ρ -тригонометрическую вне s и такую, что $h(\theta) = h_s^b(\theta)$ для всех точек $\theta \in s$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть S – ρ -допустимая система лучей и множество направлений

$$s = \{\theta : e^{i\theta} \in S\}. \quad (2.1)$$

Если u – субгармоническая функция конечного типа при порядке ρ с индикатором h (при порядке ρ), $u \not\equiv -\infty$, то существует выметание u_S^b функции u , которое является субгармонической функцией конечного типа при порядке ρ с индикатором (при порядке ρ), не превышающим выметание h_s^b индикатора h . При этих требованиях выметания u_S^b и h_s^b единственны.

Кроме того, если дано представление функции $u = u_1 + u_2$ в виде суммы двух субгармонических функций u_1 и u_2 с распределениями масс Рисса соответственно

μ_1 и μ_2 , то выметание $u_S^b = u_1^b + u_2^b$, где u_1^b и u_2^b – выметания функций u_1 и u_2 на S с распределениями масс Рисса μ_1^b и μ_2^b соответственно, сосредоточенными на S и конечной верхней плотности при порядке ρ , причем $\mu_1^b + \mu_2^b = \mu_S^b$ – распределение масс Рисса субгармонической функции u_S^b , а $u_1 \leq u_1^b$ и $u_2 \leq u_2^b$ всюду на $\mathbb{C}$.

Это предложение доказано в [13, леммы 2.3 и 2.2], кроме единственности u_S^b и последнего утверждения о функции u , представленной в виде суммы двух функций. Единственность легко следует из принципа Фрагмена–Линделёфа для угла [14, теорема 1.7.4]. Последнее утверждение содержится в явной конструкции выметаний u_S^b и μ_S^b из [13, § 1, § 2], где два последних неравенства вновь вытекают из принципа Фрагмена–Линделёфа, примененного ко всем углам, дополнительным к S .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть S – ρ -допустимая система из конечного числа лучей. Если u и v – субгармонические функции и сумма $u + v$ – субгармоническая функция конечного типа при порядке ρ с индикатором h (при порядке ρ), то найдется целая функция g с нулями только на S такая, что индикатор субгармонической функции $u + \log |g|$ не превышает выметания h_s^b функции h на множество направлений s , определенное в (2.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим выметание субгармонической функции $u + v$ на системе лучей S , которое по предложению 2.1 есть субгармоническая функция конечного типа при порядке ρ с индикатором (при порядке ρ) не выше h_s^b и представляется в виде $u_S^b + v_S^b$, где $u \leq u_S^b$ и $v \leq v_S^b$ на $\mathbb{C}$. Из предпоследнего неравенства следует, что функция $u + v_S^b$ конечного типа при порядке ρ с индикатором (при порядке ρ), не превышающим h_s^b .

При этом распределение масс Рисса функции v_S^b имеет конечную верхнюю плотность при порядке ρ , так как функция $u_S^b + v_S^b$ конечного типа при порядке ρ [14, гл. I, § 3, п. 1], и по определению выметания это распределение масс сосредоточено на конечной системе лучей S . Следовательно, справедливо представление $v_S^b = w + H$, где w – субгармоническая функция порядка не выше ρ с распределением масс Рисса на S , а H – гармоническая функция [14, теорема 1.3.1]. Отсюда субгармоническая функция $u + H = (u + v_S^b) - w$ также функция порядка не выше ρ как разность субгармонических функций порядка не выше ρ [14, лемма 1.3.2].

Теперь воспользуемся частным случаем одного результата, вытекающего из ККК (Kjellberg–Kennedy–Katifi) аппроксимационного метода [9, п. 10.5].

ЛЕММА 2.1 [9, лемма 10.12]. Пусть w – субгармоническая функция с распределением масс Рисса, сосредоточенным на конечной системе лучей S . Тогда существует целая функция q с нулями только на S такая, что

$$\log |q(z)| = w(z) + O\left(\log^+ \frac{1}{\text{dist}(z, S)}\right) + O(\log |z|), \quad z \rightarrow \infty, \quad (2.2)$$

где $\log^+ t = \max\{\log t, 0\}$ и $\text{dist}(z, S)$ – расстояние от точки z до множества S ; при этом

$$T(r, \log |q|) = T(r, w) + O(\log r), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (2.3)$$

где $T(r, \log |q|)$ и $T(r, w)$ – характеристики Неванлинны функций $\log |q|$ и w .

Применяя эту лемму, найдем целую функцию q с нулями только на S такую, что согласно (2.2) для любого $\varepsilon > 0$ выполнено соотношение

$$\begin{aligned} u(z) + H(z) + \log |q(z)| &\leq u(z) + H(z) + w(z) + O(\log |z|) \\ &\leq (h_s^b(\arg z) + \varepsilon)|z|^\rho + O(\log |z|), \quad \text{dist}(z, S) \geq 1, \quad z \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2.4)$$

и по свойствам характеристики Неванлинны согласно (2.3)

$$\begin{aligned} T(r, u + H + \log |q|) &\leq T(r, u + H) + T(r, \log |q|) \\ &\leq T(r, u + H) + T(r, w) + O(\log r), \quad r \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

откуда следует, что функция $u + H + \log |q|$ — функция порядка не выше ρ ввиду известной взаимосвязи между ростом характеристики Неванлинны и максимумом субгармонической функции на окружностях с центром в нуле [15, теорема 3.19]. В силу гармоничности H найдется целая функция p такая, что $\text{Re } p = H$. Полагаем $g = q \exp p$ — целая функция с нулями только на S такая, что функция $u + \log |g|$ порядка не выше ρ и ввиду (2.4) для любого $\varepsilon > 0$ выполнено соотношение

$$u(z) + \log |g(z)| \leq (h_s^b(\arg z) + \varepsilon)|z|^\rho + O(\log |z|), \quad \text{dist}(z, S) \geq 1, \quad z \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

Избавимся в (2.5) от ограничения $\text{dist}(z, S) \geq 1$.

Пусть l — луч из системы S . Не умаляя общности, можно считать, что $l = \mathbb{R}_+$. Тогда ввиду конечности S согласно (2.5) для сколь угодно малых $\delta > 0$ при $|\arg z| = \delta$ и $z \rightarrow \infty$ выполнено асимптотическое соотношение из (2.5). Гармонически продолжая субгармоническую функцию $K(z) = (h_s^b(\arg z) + \varepsilon)|z|^\rho$ внутрь угла $|\arg z| < \delta$ при достаточно малом $\delta > 0$, получим непрерывную субгармоническую функцию $K_\delta(re^{i\theta})$, которая всюду мажорирует функцию $K(z)$, внутри угла $|\theta| < \delta$ имеет вид $(A \cos \theta + B \sin \theta)r^\rho$ и ввиду непрерывности ρ -тригонометрически выпуклых функций [1] мажорируется там функцией $(h_s^b(\theta) + 2\varepsilon)r^\rho$. Отсюда и из асимптотического соотношения (2.5) на лучах $|\theta| = \delta$ по принципу Фрагмена–Линделёфа в угле $|\theta| < \delta$, примененного к субгармонической в нем функции $u + \log |g| - K_\delta$, получаем

$$u(re^{i\theta}) + \log |g(re^{i\theta})| \leq (h_s^b(\theta) + 2\varepsilon)r^\rho + O(\log r), \quad |\theta| \leq \delta, \quad z \rightarrow \infty.$$

Применяя эти рассуждения к каждому лучу из S , убеждаемся, что индикатор функции $u + \log |g|$ при порядке ρ не превышает h_s^b , и предложение 2.2 доказано.

Последовательно применяя предложение 1.2, а затем предложение 2.2 с функцией $v = \log |g|$ и системой лучей $S = \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$, получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть μ — мера в $\mathbb{C}$, сосредоточенная вне некоторой окрестности нуля, а a и b — неотрицательные постоянные. Если существует постоянная C такая, что для всех функций Йенсена выполнено (1.3), то для любой субгармонической функции u_μ с распределением масс Рисса μ найдется целая функция g с нулями только на вещественной и мнимой осях, для которой выполнено неравенство

$$h_{u_\mu + \log |g|}(\theta) \leq \pi a |\cos \theta| + \pi b |\sin \theta|$$

при всех $\theta \in [-\pi, \pi]$.

3. Вспомогательные оценки. Через $\angle(\alpha, \beta)$ обозначаем открытый угол $\{z \in \mathbb{C} : \alpha < \arg z < \beta\}$. Для борелевского множества $E \subset \mathbb{C}$ через $\omega(\zeta, E; \angle(\alpha, \beta))$ обозначаем гармоническую меру пересечения множества E с границей угла $\angle(\alpha, \beta)$ в точке ζ относительно угла $\angle(\alpha, \beta)$ [15].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $\pi/\gamma = \beta - \alpha$ – раствор угла $\angle(\alpha, \beta)$. Справедлива оценка

$$\omega(\zeta, D(t); \angle(\alpha, \beta)) \leq \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{2^\gamma}{2^\gamma - 1} \right)^2 \cdot \left(\frac{t}{|\zeta|} \right)^\gamma, \quad |\zeta| \geq 2t > 0. \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Гармоническая мера инвариантна относительно поворотов, поэтому, не умаляя общности, можно считать, что $\angle(\alpha, \beta) = \angle(0, \pi/\gamma)$. Далее воспользуемся редукцией к верхней полуплоскости. Полагаем

$$\zeta' = \zeta^\gamma \quad \text{и} \quad t' = t^\gamma, \quad (3.2)$$

где рассматривается ветвь функции ζ^γ , положительная на $\mathbb{R}_+$. При условии $|\zeta| \geq 2t > 0$ имеем

$$t' \leq \frac{1}{2^\gamma} |\zeta'|. \quad (3.3)$$

Из конформной инвариантности гармонической меры и представления ее через интеграл Пуассона получаем

$$\begin{aligned} \omega\left(\zeta, D(t); \angle\left(0, \frac{\pi}{\gamma}\right)\right) &= \omega(\zeta', D(t'); \angle(0, \pi)) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-t'}^{t'} \operatorname{Im} \frac{1}{x - \zeta'} dx = \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{Im} \zeta' \int_{-t'}^{t'} \frac{dx}{|x - \zeta'|^2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

При $|x| \leq t'$, используя (3.3), имеем

$$|x - \zeta'| \geq |\zeta'| - |x| \geq |\zeta'| - t' \geq \left(1 - \frac{1}{2^\gamma}\right) |\zeta'|.$$

Отсюда согласно (3.4) и (3.2) получаем

$$\begin{aligned} \omega\left(\zeta, D(t); \angle\left(0, \frac{\pi}{\gamma}\right)\right) &\leq \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\operatorname{Im} \zeta'}{|\zeta'|^2} \cdot \left(\frac{2^\gamma}{2^\gamma - 1} \right)^2 \cdot 2t' \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\operatorname{Im} \zeta^\gamma}{|\zeta|^{2\gamma}} \cdot \left(\frac{2^\gamma}{2^\gamma - 1} \right)^2 \cdot t^\gamma \leq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{|\zeta|^\gamma} \cdot \left(\frac{2^\gamma}{2^\gamma - 1} \right)^2 \cdot t^\gamma, \end{aligned}$$

что совпадает с оценкой (3.1).

Пусть μ – мера с носителем в замкнутом угле

$$\angle[\alpha, \beta] = \{z \in \mathbb{C} : \alpha \leq \arg z \leq \beta\} \cup \{0\}.$$

Выметание μ^b меры μ из угла $\angle(\alpha, \beta)$ есть мера, определяемая на борелевских множествах E по правилу [13, определение 1.3]

$$\mu^b(E) = \int \omega(\zeta, E; \angle(\alpha, \beta)) d\mu(\zeta). \quad (3.5)$$

В частности, если мера μ конечной верхней плотности (при порядке 1) и раствор угла $\angle(\alpha, \beta)$ меньше π , то выметание μ^b из (3.5) существует и также конечной верхней плотности (при порядке 1) [13, теорема 1.1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть μ – мера конечной верхней плотности (при порядке 1) с носителем в угле $\angle[\pi/2 - \beta, \pi/2 + \beta]$, где $\beta \in (0, \pi/2)$, и выполнено условие

$$\mu(t) \leq \Delta \cdot t, \quad t > 0. \quad (3.6)$$

Тогда выметание μ^b меры μ из угла $\angle(\pi/2 - \beta, \pi/2 + \beta)$ есть мера конечной верхней плотности (при порядке 1) такая, что

$$\mu^b(t) < \frac{(\pi - 2\beta + 2)\Delta}{\pi/2 - \beta} \cdot t, \quad t > 0. \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.5) имеем представление

$$\begin{aligned} \mu^b(t) &= \int_{|\zeta| \leq 2t} \omega\left(\zeta, D(t); \angle\left(\frac{\pi}{2} - \beta, \frac{\pi}{2} + \beta\right)\right) d\mu(\zeta) \\ &\quad + \int_{|\zeta| > 2t} \omega\left(\zeta, D(t); \angle\left(\frac{\pi}{2} - \beta, \frac{\pi}{2} + \beta\right)\right) d\mu(\zeta). \end{aligned}$$

В первом интеграле оцениваем сверху гармоническую меру единицей, а во втором интеграле по предложению 3.1 при $\pi/\gamma = 2\beta$ и получаем

$$\mu^b(t) \leq \mu(2t) + \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{2^\gamma}{2^\gamma - 1}\right)^2 \cdot t^\gamma \int_{2t}^{+\infty} \frac{d\mu(r)}{r^\gamma}.$$

Отсюда согласно (3.6), интегрируя по частям последний интеграл с учетом того, что $\gamma > 1$, имеем

$$\mu^b(t) \leq 2\Delta \cdot t + \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{2^\gamma}{2^\gamma - 1}\right)^2 \cdot t^\gamma \cdot \Delta \cdot \frac{\gamma}{\gamma - 1} (2t)^{1-\gamma} \leq 2\Delta \cdot t \left(1 + \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\gamma}{\gamma - 1}\right).$$

Подставляя в правую часть $\gamma = \pi/(2\beta)$, получаем

$$\mu^b(t) \leq \Delta \cdot t \cdot \frac{\pi - 2\beta + 2}{\pi/2 - \beta},$$

и предложение 3.2 доказано.

Нам потребуются оценки ядра интеграла Пуассона для первой четверти

$$P\left(z, \zeta; \angle\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \begin{cases} P_{\mathbb{R}_+}(z, x), & \text{когда } \zeta = x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \\ P_{i\mathbb{R}_+}(z, iy), & \text{когда } \zeta = iy \in i\mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \end{cases} \quad (3.8)$$

где для $z = re^{i\theta} \in \angle(0, \pi/2)$

$$P_{\mathbb{R}_+}(re^{i\theta}, x) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{r^2 x \sin 2\theta}{r^4 + x^4 - 2r^2 x^2 \cos 2\theta}, \quad (3.9)$$

$$P_{i\mathbb{R}_+}(re^{i\theta}, iy) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{r^2 y \sin 2\theta}{r^4 + y^4 + 2r^2 y^2 \cos 2\theta}. \quad (3.10)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Для $z = re^{i\theta} \in \angle(0, \pi/2)$ справедливы оценки

$$P_{\mathbb{R}_+}(re^{i\theta}, x) \leq \frac{1}{\pi} \cdot \begin{cases} \frac{\operatorname{ctg} \theta}{x} & \text{при } 0 < r \leq 2x, \\ \frac{32}{9} \cdot \frac{x \sin 2\theta}{r^2} & \text{при } r \geq 2x, \end{cases} \quad (3.11)$$

$$P_{i\mathbb{R}_+}(re^{i\theta}, iy) \leq \frac{1}{\pi} \cdot \begin{cases} \frac{\operatorname{tg} \theta}{y} & \text{при } 0 < r \leq 2y, \\ \frac{32}{9} \cdot \frac{y \sin 2\theta}{r^2} & \text{при } r \geq 2y. \end{cases} \quad (3.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выражения из (3.9) и (3.10) легко преобразовать к виду

$$P_{\mathbb{R}_+}(re^{i\theta}, x) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{r^2 x \sin 2\theta}{(r^2 - x^2)^2 + 4r^2 x^2 \sin^2 \theta}, \quad (3.13)$$

$$P_{i\mathbb{R}_+}(re^{i\theta}, iy) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{r^2 y \sin 2\theta}{(r^2 - y^2)^2 + 4r^2 y^2 \cos^2 \theta}. \quad (3.14)$$

Докажем оценку (3.11). При $0 < r \leq 2x$ из (3.13)

$$P_{\mathbb{R}_+}(re^{i\theta}, x) \leq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{r^2 x \sin 2\theta}{4r^2 x^2 \sin^2 \theta} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin 2\theta}{4x \sin^2 \theta} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2 \cos \theta}{4x \sin \theta}$$

и получаем оценку (3.11) для $0 < r \leq 2x$.

При $r \geq 2x$ имеем $r^2 - x^2 \geq 3r^2/4$ и из (3.13)

$$P_{\mathbb{R}_+}(re^{i\theta}, x) \leq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{r^2 x \sin 2\theta}{(r^2 - x^2)^2} \leq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{r^2 x \sin 2\theta}{(3r^2/4)^2} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{32}{9} \cdot \frac{x \sin 2\theta}{r^2},$$

что дает оценку (3.11) для $r \geq 2x$.

Аналогично из (3.14) получается оценка (3.12).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Пусть $\theta \in (0, \pi/2)$, мера μ сосредоточена на луче $\{z \in \mathbb{C} : \arg z = \theta\}$ и удовлетворяет неравенству (3.6). Тогда справедливы оценки

$$\int_0^{+\infty} P_{\mathbb{R}_+}(re^{i\theta}, x) d\mu(r) \leq 3\Delta \cdot \operatorname{ctg} \theta, \quad (3.15)$$

$$\int_0^{+\infty} P_{i\mathbb{R}_+}(re^{i\theta}, iy) d\mu(r) \leq 3\Delta \cdot \operatorname{tg} \theta. \quad (3.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из оценки (3.11) предложения 3.3

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} P_{\mathbb{R}_+}(re^{i\theta}, x) d\mu(r) &\leq \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{2x} \frac{\operatorname{ctg} \theta}{x} d\mu(r) + \frac{32}{9} \int_{2x}^{+\infty} \frac{x \sin 2\theta}{r^2} d\mu(r) \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\operatorname{ctg} \theta}{x} \mu(2x) + \frac{32}{9} \cdot x \sin 2\theta \int_{2x}^{+\infty} \frac{d\mu(r)}{r^2} \right), \end{aligned}$$

откуда, интегрируя по частям последний интеграл, согласно (3.6) получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} P_{\mathbb{R}_+}(re^{i\theta}, x) d\mu(r) &\leq \frac{1}{\pi} \left(2\Delta \cdot \operatorname{ctg} \theta + \frac{64}{9} \cdot x \sin 2\theta \cdot \Delta \int_{2x}^{+\infty} \frac{dr}{r^2} \right) \\ &= \frac{2\Delta}{\pi} \left(\operatorname{ctg} \theta + \frac{16}{9} \sin 2\theta \right). \end{aligned}$$

В силу неравенства $\sin 2\theta \leq 2 \operatorname{ctg} \theta$ это дает (3.15).

Аналогично из оценки (3.11) предложения 3.3 согласно (3.6) получаем

$$\int_0^{+\infty} P_{i\mathbb{R}_+}(re^{i\theta}, iy) d\mu(r) \leq \frac{2\Delta}{\pi} \left(\operatorname{tg} \theta + \frac{16}{9} \sin 2\theta \right),$$

откуда в силу неравенства $\sin 2\theta \leq 2 \operatorname{tg} \theta$ следует (3.16).

4. Доказательства основных результатов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ. Пусть $\Delta > \Delta_\mu > 0$. Можно представить меру μ в виде суммы двух мер $\mu = \mu_r + \mu_\infty$, где μ_r – сужение меры μ на круг $D(r)$ такое, что $\mu_\infty(t) \leq \Delta \cdot t$, $t > 0$, и, очевидно, $\mu_r(\mathbb{C}) < +\infty$. Поскольку логарифмический потенциал

$$\int \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| d\mu_r(\zeta)$$

конечной меры μ_r растет не быстрее величины $O(\log |z|)$ при $z \rightarrow \infty$, то его добавка не влияет на значения индикатора субгармонической функции. Следовательно, не умаляя общности, можно считать, что для меры μ выполнено (3.6) и она сосредоточена вне некоторой окрестности нуля.

По теореме Вейерштрасса–Адамара о представлении субгармонических на плоскости функции [15], [14, теоремы 1.3.1 и 1.3.2] справедливо представление u_μ в виде суммы субгармонической функции u_1 порядка не выше 1 с распределением масс Рисса μ и некоторой гармонической функции $H = \log |\exp q|$, где q – целая функция. Если требуемая в основной теореме целая функция g построена для u_1 , то для u_μ такой функцией будет $g \exp q$. Следовательно, не умаляя общности, можем считать, что u_μ – субгармоническая функция порядка не выше 1.

Рассмотрим выметание u_μ^b функции u_μ из пары вертикальных углов (0.2). Тогда распределением масс Рисса функции u_μ^b будет выметание μ^b меры μ из этой пары углов, построенное по правилу (3.5) (см. предложение 2.2 и [13, основная теорема]). Мера μ^b сосредоточена на четырех лучах

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \arg z = \pm \frac{\pi}{2} \pm \beta \right\} \quad (4.1)$$

и конечной верхней плотности при порядке 1. При этом из принципа Фрагмена–Линделёфа для пары вертикальных углов (0.2) следует $u_\mu \leq u_\mu^b$ всюду на $\mathbb{C}$. Кроме того, по предложению 3.2 выполнено (3.7) с дополнительным множителем 2 в правой части.

Пусть μ_k , $k = 1, 2, 3, 4$, – сужения меры μ^b на лучи из (4.1), лежащие соответственно в I, II, III и IV четвертях плоскости $\mathbb{C}$. Для каждой из них справедлива оценка (3.7) с дополнительным множителем 2 в правой части и с заменой левой части на $\mu_k(t)$, а сумма мер μ_k равна мере μ^b .

Пусть V – функция Йенсена. Для точек ζ , лежащих в I четверти на луче $\{z \in \mathbb{C} : \arg z = \theta\}$ с $\theta = \pi/2 - \beta$ в силу субгармоничности V , условия $V \equiv 0$ вне некоторого круга $D(R)$ и всего лишь логарифмической особенности в нуле справедлива в обозначениях (3.8)–(3.10) оценка через интеграл Пуассона:

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} V(te^{i\theta}) d\mu_1(t) \\ & \leq \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} V(x) P_{\mathbb{R}_+}(re^{i\theta}, x) dx + \int_0^{+\infty} V(iy) P_{i\mathbb{R}_+}(re^{i\theta}, iy) dy \right) d\mu_1(r). \end{aligned}$$

Применяя теорему Фубини о повторных интегралах и оценки (3.15) и (3.16) предложения 3.4, с учетом оценки роста для $\mu_1(t)$ и неотрицательности функций Йенсена получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} V(te^{i\theta}) d\mu_1(t) \\ & \leq \frac{6(\pi - 2\beta + 2)\Delta}{\pi/2 - \beta} \left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \int_0^{+\infty} V(x) dx + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \int_0^{+\infty} V(iy) dy \right). \end{aligned}$$

Аналогично действуя в остальных трех четвертях и суммируя оценки по четырём лучам, имеем

$$\int V(\zeta) d\mu^b(\zeta) \leq \frac{12(\pi - 2\beta + 2)\Delta}{\pi/2 - \beta} \left(\operatorname{tg} \beta \int_{-\infty}^{+\infty} V(x) dx + \operatorname{ctg} \beta \int_{-\infty}^{+\infty} V(iy) dy \right).$$

Отсюда по предложению 2.3 найдется целая функция g с нулями только на вещественной и мнимой осях, для которой выполнено неравенство

$$h_{u_\mu^b + \log |g|}(\theta) \leq \frac{12(\pi - 2\beta + 2)\Delta}{\pi/2 - \beta} (\pi \operatorname{ctg} \beta \cdot |\cos \theta| + \pi \operatorname{tg} \beta \cdot |\sin \theta|)$$

при всех $\theta \in [-\pi, \pi]$. Так как $\beta > 0$ и $u_\mu \leq u_\mu^b$ всюду на $\mathbb{C}$, то, выбирая $\Delta > \Delta_\mu$ достаточно близко к Δ_μ , получаем (0.3), и первая часть основной теоремы доказана.

Пусть теперь выполнено условие (0.5) и сначала g – целая функция с нулями только на $\mathbb{R}$ и $i\mathbb{R}$ такая, что имеет место (0.3). Так как $u_\mu + \log |g|$ – функция конечного типа при порядке 1, то мера $\mu + \Lambda$ конечной верхней плотности, где Λ – мера, ассоциированная с последовательностью нулей функции g , и выполнено условие Линделёфа

$$\left| \int_{1 < |\zeta| \leq r} \frac{1}{\zeta} d(\mu(\zeta) + \Lambda(\zeta)) \right| = O(1), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Пусть $\Lambda_r = \{\lambda'_n\}$ та часть последовательности Λ , которая лежит на $\mathbb{R}$, $\lambda'_n \neq 0$. Тогда из последнего асимптотического соотношения следует, что последовательность Λ_r удовлетворяет условию Линделёфа:

$$\left| \sum_{1 < |\lambda'_n| \leq r} \frac{1}{\lambda'_n} \right| = O(1), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Отсюда по теореме Линделёфа [1, гл. I, § 11, теорема 15] справедливо представление $g = g_r g_i$, где g_r – ПФЭТ с последовательностью только вещественных нулей Λ_r , представленная каноническим произведением Вейерштрасса–Адамара

$$g_r(z) = \prod_n \left(1 - \frac{z}{\lambda'_n}\right) \exp\left(\frac{z}{\lambda'_n}\right), \quad (4.2)$$

а g_i – целая функция с последовательностью нулей, целиком лежащей на мнимой оси. Отсюда $u_\mu(z) + \log |g_i(z)| \leq \text{const} \cdot |z| - \log |g_r(z)|$ и в силу известных [1] оценок снизу для ПФЭТ g_r функция $u_\mu + \log |g_i|$ конечного типа при порядке 1. Кроме того, из представления (4.2) следует, что $\log |g_r(iy)| \geq 0$, $iy \in i\mathbb{R}$, и из неравенства

$$u_\mu(iy) + \log |g_i(iy)| \leq u_\mu(iy) + \log |g(iy)|$$

согласно (0.3) следует (0.4).

Основная теорема доказана.

Следствие 1 есть просто переформулировка основной теоремы для ассоциированной с последовательностью меры $\mu = \Lambda$. Следствие 2 прямо вытекает из следствия 1 в силу известной взаимосвязи между полнотой системы $\text{Exp } \Lambda$ и теоремами единственности для ПФЭТ в терминах индикаторной диаграммы [1].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Если $\Delta_\Lambda = 0$, то по теореме Линделёфа $f(z) = f_\Lambda(z) f_\Lambda(-z)$ – целая функция минимального типа при порядке 1. По предложению 2.2 функцию $f_\Lambda(-z)$ можно заменить на целую функцию g с нулями только на вещественной и мнимой осях, а при условии (0.7) так же, как в конце доказательства основной теоремы, на целую функцию g с нулями только на вещественной и мнимой осях.

Пусть $\Delta_\Lambda > 0$. Выберем число β так, что $0 < \beta \leq \pi/4$ и

$$\varepsilon = 48(\pi + 2)\Delta_\Lambda \cdot \text{tg } \beta \leq \frac{12\pi(\pi + 2)\Delta_\Lambda}{\pi/2 - \beta} \cdot \text{tg } \beta. \quad (4.3)$$

В силу сгущаемости Λ к мнимой оси, отбрасывая конечное число точек из Λ , не умаляя общности, можем считать, что последовательность Λ целиком лежит внутри пары вертикальных углов (0.2). По следствию 1 существует целая функция g с нулями только на вещественной и мнимой осях такая, что для $f = f_\Lambda g$ выполнена оценка $h_f(\pm\pi/2) < \varepsilon$ и ввиду (4.3) выполнена оценка

$$\begin{aligned} \max\{h_f(0), h_f(\pi)\} &< \frac{12\pi(\pi + 2)\Delta_\Lambda}{\pi/2 - \beta} \cdot \text{ctg } \beta \\ &\leq \frac{12\pi(\pi + 2)\Delta_\Lambda}{\pi/4} \cdot \frac{1}{\text{tg } \beta} = \frac{48^2(\pi + 2)^2\Delta_\Lambda^2}{\varepsilon} < \frac{61000\Delta_\Lambda^2}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Если выполнено (0.7), то по выбору (4.3) значения β согласно заключительной части следствия 1 функцию g можно выбрать с нулями только на $i\mathbb{R}$.

Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 3. В силу известной связи между полнотой и единственностью [1] достаточно показать, что сдвиг индикаторной диаграммы некоторой ЦФЭТ f , обращающейся в нуль на Λ , можно поместить в области G . Не умаляя общности, можем считать, что $l = \mathbb{R}_+$ и $xy_+(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. Выберем $C = 244000\Delta_\Lambda^2 + 1$. Найдется x_0 такое, что $y_+(x) > C/x$ при всех $x \geq x_0$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, что $2\varepsilon x_0 < 1$. Тогда

$$2\varepsilon < \frac{C}{x_0 + 122000\Delta_\Lambda^2/\varepsilon}, \quad (4.4)$$

т.е. прямоугольник $\{z \in C : 0 < \operatorname{Im} z < 2\varepsilon, x_0 \leq \operatorname{Re} z \leq x_1\}$, где число x_1 равно знаменателю в правой части (4.4), лежит внутри области G . По теореме 1 существует ненулевая ЦФЭТ, обращающаяся в нуль на Λ , с индикаторной диаграммой, сдвиг которой содержится в указанном прямоугольнике.

Следствие 3 доказано.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: Физматгиз, 1956.
- [2] Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные пространства аналитических функций. II. Спектральный синтез на выпуклых областях // Матем. сб. 1972. Т. 88. № 1. С. 3–30.
- [3] Malliavin P., Rubel L. A. On small entire functions of exponential type with given zeros // Bull. Soc. Math. France. 1961. V. 89. № 2. P. 175–201.
- [4] Хабибуллин Б. Н. О малости роста на мнимой оси целых функций экспоненциального типа с заданными нулями // Матем. заметки. 1988. Т. 43. № 5. С. 644–650.
- [5] Хабибуллин Б. Н. О росте целых функций экспоненциального типа вдоль мнимой оси // Докл. АН СССР. 1988. Т. 302. № 2. С. 270–273.
- [6] Хабибуллин Б. Н. О росте целых функций экспоненциального типа вдоль мнимой оси // Матем. сб. 1989. Т. 180. № 5. С. 706–719.
- [7] Красичков И. Ф. Сравнение целых функций конечного порядка по распределению их корней // Матем. сб. 1966. Т. 66 (112). С. 198–230.
- [8] Хабибуллин Б. Н. Множества единственности в пространствах целых функций одной переменной // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 5. С. 1101–1123.
- [9] Hayman W. K. Subharmonic Functions. V. II. London: Acad. Press, 1989.
- [10] Koosis P. Leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin. Montréal: Les Publ. CRM, 1996.
- [11] Gamelin T. W. Uniform Algebras and Jensen Measures. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1978.
- [12] Хабибуллин Б. Н. Теорема о наименьшей мажоранте и ее применения. I. Целые и мероморфные функции // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 1. С. 129–146.
- [13] Хабибуллин Б. Н. Выметание на систему лучей и целые функции вполне регулярного роста // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 1. С. 184–202.
- [14] Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М.: Наука, 1971.
- [15] Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. М.: Мир, 1980.

Башкирский государственный университет, г. Уфа
E-mail: algeom@bsu.bashedu.ru

Поступило
02.11.1999
Исправленный вариант
09.08.2000