Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Т. Тлеуханова, О преобразовании Харди и Беллмана для ортогональных рядов Фурье, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 4, 638–640

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm776>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 15:48:26

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ХАРДИ И БЕЛЛМАНА ДЛЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Н. Т. Тлеуханова

Хорошо известные результаты Харди и Беллмана [1], [2] для тригонометрических рядов Фурье: если $f \in L_p[0, \pi]$,

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx, \quad A_k = \frac{1}{k+1} \sum_{m=0}^k a_m, \quad B_k = \sum_{m=k}^{\infty} \frac{a_m}{m},$$

то ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos kx, \quad \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos kx$$

являются рядами Фурье некоторых функций Hf , Bf из $L_p[0, \pi]$ и верны оценки

$$\|Hf\|_p \leq c\|f\|_p, \quad \|Bf\|_p \leq c\|f\|_p.$$

Данные преобразования называют *преобразованиями Харди и Беллмана*.

В заметке рассматриваются обобщения этих результатов в трех направлениях: рассматриваются ряды Фурье относительно регулярных ортонормированных систем [3] (охватывающие все тригонометрические и мультипликативные системы с ограниченными образующими); вводится обобщение преобразований Харди и Беллмана; изучается ограниченность введенных преобразований в анизотропных пространствах Лоренца [3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Ортонормированную систему $\Phi = \{\phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ назовем *регулярной*, если существует константа B такая, что

- 1) для любого отрезка e из $[0, 1]$ и $k \in \mathbb{N}$ верна оценка

$$\left| \int_e \phi_k(x) dx \right| \leq B \min\left(\mu e, \frac{1}{k}\right);$$

- 2) для любого отрезка w из $\mathbb{N}$ (конечная арифметическая прогрессия с шагом 1) и $t \in (0, 1]$ выполнена оценка

$$\left(\sum_{k \in w} \phi_k(f) \right)^* (t) \leq B \min\left(|w|, \frac{1}{t}\right),$$

где $(\sum_{k \in w} \phi_k(f))^*(t)$ – невозрастающая перестановка функции $\sum_{k \in w} \phi_k(x)$, $|w|$ – количество элементов в множестве w .

Пусть Φ – регулярная ортонормированная система, $I = \{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ – некоторая последовательность конечных подмножеств из $\mathbb{N}$. Через J обозначим последовательность множеств $\{J_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, где $J_k = \{m : k \in I_m\}$. Для $f \in L_1[0, 1]$, $f \sim \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x)$, и последовательности $I = \{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ определим преобразования $H(f; I)$ и $B(f; I)$ следующим образом:

$$H(f; I) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|I_k|} \left(\sum_{m \in I_k} a_m \right) \varphi_k(x), \quad (1)$$

$$B(f; I) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{m \in J_k} \frac{a_m}{|I_m|} \right) \varphi_k(x). \quad (2)$$

Назовем их соответственно преобразованиями Харди и Беллмана, отвечающими последовательностям множеств $I = \{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. В случае $I_k = \{1, 2, \dots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$, эти преобразования являются соответственно преобразованиями Харди и Беллмана.

Через $L_{pq}[0, 1]$ обозначим пространство Лоренца, а через l_{pq} – дискретное пространство Лоренца.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $2 < p < \infty$, $p' = p/(p-1)$, $1 \leq q \leq \infty$, $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – регулярная система, $I = \{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ – семейство отрезков в $\mathbb{N}$ таких, что $|I_k| \geq k$ ($|I_k|$ – количество элементов в I_k). Тогда преобразования Харди $H(f, I)$ и Беллмана $B(f, I)$ ограничены в пространствах $L_{pq}[0, 1]$ и $L_{p'q}[0, 1]$ соответственно, т.е.

$$\|H(f, I)\|_{L_{pq}} \leq c \|f\|_{L_{pq}}, \quad \|B(f, I)\|_{L_{p'q}} \leq c \|f\|_{L_{p'q}}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $1 < p \leq 2$, $p' = p/(p-1)$, $1 \leq q \leq \infty$, $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – регулярная система, $I = \{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ – семейство конечных множеств из $\mathbb{N}$, удовлетворяющих условиям $|I_k| = k$ и $I_k \subset I_{k+1}$. Тогда преобразования Харди $H(f, I)$ и Беллмана $B(f, I)$ ограничены в пространствах $L_{pq}[0, 1]$ и $L_{p'q}[0, 1]$ соответственно.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $2 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – регулярная система, $\{Q_t\}_{t \in (0,1)}$ – некоторое семейство отрезков из $[0, 1]$, удовлетворяющих условию $\mu Q_t \geq t$. Если $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ и $a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_{pq}$, то последовательность коэффициентов Фурье $b = \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ функции

$$F(t) = \frac{1}{\mu Q_t} \int_{Q_t} f(x) dx$$

также принадлежит пространству Лоренца l_{pq} и верно неравенство

$$\|b\|_{l_{pq}} \leq c \|a\|_{l_{pq}}.$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $1 < p < 2$, $1 \leq q \leq \infty$, $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – регулярная система, $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ и $a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_{pq}$, g – произвольная, равноизмеримая с f функция. Тогда последовательность коэффициентов Фурье $b = \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ функции

$$F(t) = \frac{1}{t} \int_0^t g(x) dx, \quad t \in (0, 1),$$

также принадлежит пространству Лоренца l_{pq} и верно неравенство

$$\|b\|_{l_{pq}} \leq c \|a\|_{l_{pq}}.$$

Пусть $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ – векторы такие, что если $0 < q_j < \infty$, то $0 < p_j < \infty$, если же $q_j = \infty$, то $0 < p_j \leq \infty$, $j = 1, \dots, n$.

Анизотропное пространство $L_{pq}[0, 1]^n$ определяется как множество измеримых функций f , для которых

$$\|f\|_{L_{pq}} = \left(\int_0^1 \dots \left(\int_0^1 \left| t_1^{1/p_1} \dots t_n^{1/p_n} f^{*1, \dots, *n}(t_1, \dots, t_n) \right|^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{q_2/q_1} \dots \frac{dt_n}{t_n} \right)^{1/q_n} < \infty,$$

где $f^{*1, \dots, *n}(t_1, \dots, t_n)$ – невозрастающая перестановка функции f , взятая последовательно по переменным $x_1, \dots, x_n$ (считая остальные переменные фиксированными), выражение

$$\left(\int_0^1 (F(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}$$

при $q = \infty$ понимается как

$$\sup_{t>0} F(t).$$

Пусть $\Psi_1 = \{\psi_k^1(x)\}_{k=1}^\infty, \dots, \Psi_n = \{\psi_k^n(x)\}_{k=1}^\infty$ – регулярные системы функций. Определим $\Phi = \{\phi_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ следующим образом:

$$\phi_k(x) = \phi_{k_1 \dots k_n}(x_1, \dots, x_n) = \psi_{k_1}^1(x_1) \dots \psi_{k_n}^n(x_n).$$

Пусть $I_p = \{I_k^p\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ – некоторое семейство конечных подмножеств $\mathbb{N}$, удовлетворяющих условию: при $p > 2$ семейство I_p совпадает с множеством отрезков $\{I_k^p\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ таких, что $|I_k^p| \geq k$, а при $p \leq 2$ I_p есть семейство множеств $\{I_k^p\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ таких, что $I_k^p \subset I_{k+1}^p$ и $|I_k^p| = k$.

Пусть $1 < p = (p_1, \dots, p_n) < \infty, f \sim \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k \phi_k(x)$. Определим преобразования $B_j(f, I_{p_j})$ и $H_j(f, I_{p_j})$ следующим образом:

$$H_j(f, I_{p_j}) = \sum_{k_1=1}^\infty \dots \sum_{k_n=1}^\infty \frac{1}{|I_{k_j}^{p_j}|} \left(\sum_{m_j \in I_{k_j}^{p_j}} a_{k_1, \dots, m_j, \dots, k_n} \right) \phi_{k_1 \dots k_n}(x_1, \dots, x_n),$$

$$B_j(f, I_{p_j}) = \sum_{k_1=1}^\infty \dots \sum_{k_n=1}^\infty \left(\sum_{m_j \in J_{k_j}^{p_j}} \frac{a_{k_1, \dots, m_j, \dots, k_n}}{|I_{m_j}^{p_j}|} \right) \phi_{k_1 \dots k_n}(x_1, \dots, x_n).$$

Пусть $E = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) : \varepsilon_i = 0 \text{ или } \varepsilon_i = 1\}$ – вершины n -мерного единичного куба, $G_p = I_{p_1} \times \dots \times I_{p_n} = \{I_{k_1}^{p_1} \times \dots \times I_{k_n}^{p_n}\}_{k \in \mathbb{N}^n}$. Оператор $T_\varepsilon(f, G_p), \varepsilon \in E$, определим следующим образом:

$$T_\varepsilon(f; G_p) = T_{\varepsilon_n} \dots T_{\varepsilon_1}(f),$$

где

$$T_{\varepsilon_j}(f) = \begin{cases} H_j(f; I_{p_j}), & \text{при } \varepsilon_j = 1, \\ B_j(f; I_{p'_j}), & \text{при } \varepsilon_j = 0, \quad p'_j = \frac{p_j}{p_j - 1}. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть $1 < p = (p_1, \dots, p_n) < \infty, 1 \leq q = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty, E$ – вершины единичного куба, $G_p = I_{p_1} \times \dots \times I_{p_n}$. Тогда для любого $\varepsilon \in E$ верно неравенство

$$\|T_\varepsilon(f; G_p)\|_{L_{pq}} \leq c \|f\|_{L_{pq}}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hardy G. H. // Messages of Math. 1958. V. 58. P. 50–52.
2. Bellman R. // Bull. Amer. Math. Soc. 1944. V. 50. № 10. P. 741–744.
3. Нурсултанов Е. Д. // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64. № 1. С. 95–122.