Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Амосов, А. В. Булинский, М. Е. Широков, Регулярные полугруппы эндоморфизмов факторов Неймана, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 5, 643–659

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm777>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 16:46:04

УДК 517

РЕГУЛЯРНЫЕ ПОЛУГРУППЫ ЭНДОМОРФИЗМОВ ФАКТОРОВ НЕЙМАНА

Г. Г. Амосов, А. В. Булинский, М. Е. Широков

Изучается класс E_0 -полугрупп эндоморфизмов фактора фон Неймана $\mathcal{M}$, с каждой из которых могут быть ассоциированы e_0 -полугруппа эндоморфизмов $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, где $\mathcal{H}$ – пространство стандартного представления $\mathcal{M}$, и система-произведение гильбертовых пространств.

Библиография: 16 названий.

1. Введение. Теория полугрупп эндоморфизмов фактора $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, возникшая в середине 80-х годов как обобщение теории изометрических полугрупп и симметрических операторов в гильбертовом пространстве, получила значительное развитие в последнее десятилетие благодаря работам Р. Пауэрса, У. Арвесона, Дж. Прайса, Р. Бхата, многих других исследователей (см., например, [1], [2] и цитированную там литературу). Представляет интерес развитие подобной теории для общих алгебр фон Неймана $\mathcal{R}$, в первую очередь, для факторов (алгебр с тривиальным центром: $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}' = \mathbb{C}I$). Возможность распространения элементов этой теории для определенных полугрупп на гиперфинитных факторах рассматривалась нами в [3]. Подход был основан на естественном продолжении исходной “квазисвободной” полугруппы эндоморфизмов с подфактора на соответствующую алгебру $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. В данной работе мы расширяем рамки такого подхода, отправляясь от произвольного фактора фон Неймана $\mathcal{M}$ в стандартной форме в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ (см. [4], [5]) и от произвольной E_0 -полугруппы $\{\alpha_t\}_{t \geq 0}$ эндоморфизмов $\mathcal{M}$. Напомним, что E_0 -полугруппой алгебры фон Неймана $\mathcal{R}$ называется семейство $\{\alpha_t\}_{t \geq 0}$ ее нормальных $*$ -эндоморфизмов со свойствами:

1. $\alpha_0 = Id, \alpha_t \circ \alpha_s = \alpha_{t+s} \quad \forall t, s \geq 0$;
2. функция $t \mapsto \omega(\alpha_t(A))$ непрерывна на $[0, +\infty) \quad \forall \omega \in \mathcal{R}_*, \forall A \in \mathcal{R}$ (σ -слабая непрерывность);
3. $\alpha_t(I) = I \quad \forall t \geq 0$ (унитальность, или консервативность).

При отказе от свойства 3 говорят о e_0 -полугруппе алгебры $\mathcal{R}$ (см. [2]).

Модулярная инволюция J определяет антилинейный изоморфизм $j(\cdot) = J(\cdot)J$ из $\mathcal{M}$ на $\mathcal{M}'$, который “отражает” E_0 -полугруппу $\{\alpha_t\}_{t \geq 0}$ в E_0 -полугруппу

$$\{\beta_t = j \circ \alpha_t \circ j^{-1}\}_{t \geq 0}$$

на коммутанте $\mathcal{M}'$. В [3] было введено понятие регулярного расширения полугруппы $\{\alpha_t\}_{t \geq 0}$ как такой E_0 -полугруппы $\{\theta_t\}_{t \geq 0}$ эндоморфизмов $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, что

$$\theta_t(A) = \alpha_t(A), \quad \theta_t(B) = \beta_t(B) \quad \forall A \in \mathcal{M}, \quad \forall B \in \mathcal{M}', \quad \forall t \geq 0.$$

В силу слабой плотности в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ $*$ -алгебры, порожденной факторами $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$, регулярное расширение однозначно определяется полугруппой $\{\alpha_t\}_{t \geq 0}$, а для существования такого расширения $\{\theta_t\}_{t \geq 0}$ необходимо и достаточно, чтобы при некотором $t > 0$ (а значит и при всех $t \geq 0$) алгебра фон Неймана, порожденная факторами $\alpha_t(\mathcal{M})$ и $\beta_t(\mathcal{M}')$, являлась фактором. Вопрос о том, будет ли фактором пересечение или “объединение” двух факторов, восходит еще к фон Нейману, который показал, что это заведомо имеет место для факторов типа I. Таким образом, регулярное расширение всегда существует, если $\mathcal{M}$ – фактор типа I. Однако регулярное расширение может существовать и для полугрупп эндоморфизмов на факторах типа II и III. В работе [3] явно построено регулярное расширение для квазисвободных E_0 -полугрупп на гиперфинитных факторах типа II_1 и III_λ , $0 < \lambda < 1$, порожденных представлениями C^* -алгебры канонических антикоммутирующих соотношений (КАС).

Ниже рассматривается замкнутый относительно коциклических возмущений класс полугрупп на факторе $\mathcal{M}$ произвольного типа, названных *регулярными*, для которых существует “обобщенное решение” задачи о регулярном расширении. Именно, в разделе 3 показано, что с каждой регулярной полугруппой $\{\alpha_t\}_{t \geq 0}$ может быть связана определенная e_0 -полугруппа эндоморфизмов $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, которая совпадает с регулярным расширением, если такое расширение существует. Возникающая e_0 -полугруппа $\{\bar{\theta}_t\}_{t \geq 0}$ названа *регулярным квазирасширением* на $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ исходной E_0 -полугруппы $\{\alpha_t\}_{t \geq 0}$. Предварительно в разделе 2 изучается случай отдельного эндоморфизма и для него вводится понятие *регулярности* и *регулярного квазирасширения* на $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Исследование существования регулярного расширения на $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ тесно связано с изучением семейства $\{\mathcal{E}_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$ гильбертовых пространств, где при каждом $t \geq 0$

$$\mathcal{E}_\alpha(t) = \{X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : XA = \alpha_t(A)X \quad \forall A \in \mathcal{M}, \quad XB = \beta_t(B)X \quad \forall B \in \mathcal{M}'\}, \quad (1)$$

а скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{E}_\alpha(t)}$ определяется равенством $X^*Y = \langle X, Y \rangle_{\mathcal{E}_\alpha(t)} I \quad \forall X, Y \in \mathcal{E}_\alpha(t)$.

Необходимым условием существования регулярного расширения $\{\theta_t\}_{t \geq 0}$ является наличие у семейства $\{\mathcal{E}_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$ свойства системы-произведения (СП) гильбертовых пространств с операторным умножением в качестве тензорного произведения “слоев”. Тогда данная СП является ассоциированной по Арвесону с E_0 -полугруппой эндоморфизмов $\{\theta_t\}_{t \geq 0}$ [6]. Подробный анализ СП гильбертовых пространств в связи с теорией индекса E_0 -полугрупп $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ проведен в фундаментальной работе [6]. Наиболее полные результаты относятся к случаю полугрупп, вполне пространственных по терминологии Пауэрса. Некоторые обобщения можно найти в работе Бхата [7]. Мы вынуждены опустить соответствующие точные определения, адресуя читателя к литературе. Отметим только, что СП $\{\mathcal{E}(t)\}_{t \geq 0}$ (введенная как непрерывный аналог фоковского пространства) состоит из гильбертовых пространств – “слоев” $\mathcal{E}(t)$, при тензорном умножении которых выполняется соотношение $\mathcal{E}(t) \otimes \mathcal{E}(s) \cong \mathcal{E}(t+s) \quad \forall t, s \geq 0$.

В нашей работе установлено необходимое и достаточное условие, при котором семейство $\{\mathcal{E}_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$ является СП гильбертовых пространств. В разделе 3 также показано, что при каждом $t \geq 0$ в пространстве $\mathcal{E}_\alpha(t)$ существует наибольшее нетривиальное подпространство $\bar{\mathcal{E}}_\alpha(t)$ такое, что семейство $\{\bar{\mathcal{E}}_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$ является СП. В разделе 4 показана устойчивость рассматриваемых объектов по отношению к коциклическим возмущениям полугруппы $\{\alpha_t\}_{t \geq 0}$. Ситуация проиллюстрирована в разделе 5 на более общем, чем в [3], примере квазисвободных эндоморфизмов алгебры КАС.

Используются следующие обозначения, в основном соответствующие [5]: I – единичный оператор в $\mathcal{H}$, $\text{End}(\mathcal{R})$ – множество всех нормальных $*$ -эндоморфизмов алгебры фон Неймана $\mathcal{R}$, т.е. $\sigma(\mathcal{R}, \mathcal{R}_*)$ -непрерывных $*$ -морфизмов из $\mathcal{R}$ в $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_+$ – преддвойственное пространство нормальных линейных функционалов на $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_+$ – положительный конус в $\mathcal{R}$. Если $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ алгебры фон Неймана в $\mathcal{H}$, то $\mathcal{R}_1 \wedge \mathcal{R}_2 \equiv \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$. Под $\mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_2$ будем понимать не алгебру фон Неймана, а $*$ -алгебру, ими порожденную, и ее слабое замыкание будем обозначать $[\mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_2]^-$. Символ $\mathcal{R}_1 \overline{\otimes} \mathcal{R}_2$ обозначает алгебру фон Неймана, порожденную (алгебраическим) тензорным произведением $\mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{R}_2$. Символ $(\cdot)|_{\mathcal{K}}$ будет, как обычно, обозначать сужение оператора или алгебры на подпространство $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$. Для ортогональных проекторов P и Q в $\mathcal{H}$ верхнюю и нижнюю грань обозначаем $P \vee Q$ и $P \wedge Q$ соответственно. Аналогичные символы используются и для соответствующих подпространств в $\mathcal{H}$: $(P \vee Q)\mathcal{H} = P\mathcal{H} \vee Q\mathcal{H}$, $(P \wedge Q)\mathcal{H} = P\mathcal{H} \wedge Q\mathcal{H}$.

2. Случай одного эндоморфизма. Пусть α – эндоморфизм фактора $\mathcal{M}$, стандартно реализованного в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, Ω – некоторый бициклический для $\mathcal{M}$ вектор и $J = J_\Omega$ – ассоциированная с Ω модулярная инволюция. Полагая $j(\cdot) = J(\cdot)J$, обозначим $\beta = j \circ \alpha \circ j^{-1} \in \text{End}(\mathcal{M}')$ и рассмотрим множество

$$\mathcal{E}_\alpha^\Omega = \{X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : XA = \alpha(A)X \quad \forall A \in \mathcal{M}, \quad XB = \beta(B)X \quad \forall B \in \mathcal{M}'\}. \quad (2)$$

В силу $(\mathcal{M} \vee \mathcal{M}')' = \mathbb{C}I$ множество $\mathcal{E}_\alpha^\Omega$ есть гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{E}_\alpha^\Omega}$, определяемым равенством $X^*Y = \langle X, Y \rangle_{\mathcal{E}_\alpha^\Omega} I$. Доказательство этого утверждения аналогично данному в [6] для множества операторов, сплетающих эндоморфизм $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Если выбрать вместо Ω другой бициклический вектор Ω' , то в случае $J_{\Omega'} \neq J_\Omega$ изменится эндоморфизм β , а значит, вообще говоря, $\mathcal{E}_{\alpha'}^{\Omega'} \neq \mathcal{E}_\alpha^\Omega$. “Независимость” от Ω показывает следующая

ЛЕММА 1. *Если Ω' отличный от Ω бициклический вектор для $\mathcal{M}$, то гильбертовы пространства $\mathcal{E}_\alpha^\Omega$ и $\mathcal{E}_{\alpha'}^{\Omega'}$ изоморфны. Роль унитарного преобразования из $\mathcal{E}_\alpha^\Omega$ на $\mathcal{E}_{\alpha'}^{\Omega'}$ играет отображение $Ad_{W^*} = W^*(\cdot)W$, где W – унитарный оператор, принадлежащий $\mathcal{M}'$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если Ω' лежит в ассоциированном с Ω положительном конусе $\mathcal{P}_\Omega$, то в силу предложения 2.5.30 из [4] $J_{\Omega'} = J_\Omega$, а значит, $\mathcal{E}_{\alpha'}^{\Omega'} = \mathcal{E}_\alpha^\Omega$ и утверждение леммы получается при $W = I$. Если Ω' не лежит в $\mathcal{P}_\Omega$, то по основному свойству конуса $\mathcal{P}_\Omega$ в нем найдется бициклический вектор Ω'' такой, что $(\Omega', A\Omega') = (\Omega'', A\Omega'') \quad \forall A \in \mathcal{M}$. Следовательно, соответствие $A\Omega' \mapsto A\Omega''$ определяет унитарный оператор $W \in \mathcal{M}'$. Если, как обычно, S_Ω – антилинейный оператор, задаваемый условием $S_\Omega A\Omega = A^* \Omega \quad \forall A \in \mathcal{M}$, то для операторов $S_{\Omega'}$ и $S_{\Omega''}$ имеем

$$S_{\Omega''} W A \Omega' = S_{\Omega''} A \Omega'' = A^* \Omega'' = W A^* \Omega' = W S_{\Omega'} A \Omega'.$$

Поэтому $S_{\Omega'} = W^* S_{\Omega''} W$. Единственность полярного разложения дает $J_{\Omega'} = W^* J_{\Omega''} W$. Но $J_{\Omega'} = J_\Omega = J$ в силу $\Omega'' \in \mathcal{P}_\Omega$ и предложения 2.5.30 из [4]. Используя то, что $J' = J_{\Omega'} = W^* J_\Omega W = W^* J W$ и $W \in \mathcal{M}'$, получаем $\forall B \in \mathcal{M}'$

$$\begin{aligned} \beta'(B) &:= J' \alpha(J' B J') J' = W^* J W \alpha(W^* J W B W^* J W) W^* J W \\ &= W^* J \alpha(J W B W^* J) J W = W^* \beta(W B W^*) W. \end{aligned} \quad (3)$$

Непосредственная проверка с учетом (3) показывает, что $W^*(\cdot)W$ отображает множество $\mathcal{E}_\alpha^\Omega$ на множество $\mathcal{E}_\alpha^{\Omega'}$ (которое определяется (2) с заменой β на β').

Далее, для любых X и Y из $\mathcal{E}_\alpha^\Omega$ имеем

$$\begin{aligned}\langle W^*XW, W^*YW \rangle_{\mathcal{E}_\alpha^{\Omega'}} I &= W^*X^*WW^*YW = W^*X^*YW \\ &= W^*\langle X, Y \rangle_{\mathcal{E}_\alpha^\Omega} IW = \langle X, Y \rangle_{\mathcal{E}_\alpha^{\Omega'}} I.\end{aligned}$$

Таким образом, $W^*(\cdot)W$ – унитарное преобразование из $\mathcal{E}_\alpha^\Omega$ на $\mathcal{E}_\alpha^{\Omega'}$.

В силу леммы 1 можно опустить индекс Ω в обозначении гильбертова пространства: $\mathcal{E}_\alpha^\Omega = \mathcal{E}_\alpha$.

Обозначим через $\mathcal{R}$ алгебру фон Неймана, порожденную факторами $\alpha(\mathcal{M})$ и $\beta(\mathcal{M}')$, т.е. $\mathcal{R} = [\alpha(\mathcal{M}) \vee \beta(\mathcal{M}')]^-$. Тогда $\mathcal{R}' = \alpha(\mathcal{M})' \wedge \beta(\mathcal{M}')'$.

ЛЕММА 2. Пусть изометрия T принадлежит $\mathcal{E}_\alpha$. Тогда проектор TT^* является минимальным в алгебре $\mathcal{R}'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $E = TT^* \in \mathcal{R}'$, поскольку $TT^*\alpha(A) = TAT^* = \alpha(A)TT^* \forall A \in \mathcal{M}$ и $TT^*\beta(B) = TBT^* = \beta(B)TT^* \forall B \in \mathcal{M}'$ в силу $T \in \mathcal{E}_\alpha$. Алгебра $(E\mathcal{R}'E)|_{E\mathcal{H}}$ является по предложению 5.5.6 из [5] коммутантом в $\mathcal{B}(E\mathcal{H})$ алгебры $(E\mathcal{R})|_{E\mathcal{H}} = (T\mathcal{B}(\mathcal{H})T^*)|_{E\mathcal{H}} = \mathcal{B}(E\mathcal{H})$. Поэтому $E\mathcal{R}'E = \mathbb{C}E$ и E минимален в $\mathcal{R}'$.

Лемма 1 позволяет ввести следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Эндоморфизм $\alpha \in \text{End}(\mathcal{M})$ называется *регулярным*, если

$$\dim \mathcal{E}_\alpha > 0.$$

Назовем *регулярным подрасширением* эндоморфизма α фактора $\mathcal{M}$ такой эндоморфизм φ фактора $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, что $0 \neq \varphi(I) \in \mathcal{R}'$ и

$$\varphi(A) = \varphi(I)\alpha(A) \quad \forall A \in \mathcal{M}, \quad \varphi(B) = \varphi(I)\beta(B) \quad \forall B \in \mathcal{M}'.$$

Множество $\Phi(\alpha) \subset \text{End}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ всех регулярных подрасширений эндоморфизма α непусто тогда и только тогда, когда α – регулярный эндоморфизм. Действительно, любая изометрия T из $\mathcal{E}_\alpha$ дает регулярное подрасширение $T(\cdot)T^*$, поскольку $TT^* \in \mathcal{R}'$ и

$$TAT^* = TT^*\alpha(A) \quad \forall A \in \mathcal{M}, \quad TBT^* = TT^*\beta(B) \quad \forall B \in \mathcal{M}'.$$

Наоборот, пусть φ – регулярное подрасширение эндоморфизма α . Согласно [6] для всякого $\varphi \in \text{End}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ найдется хотя бы одна (сплетающая) изометрия T такая, что $TX = \varphi(X)T$. Легко видеть, что оператор $T \in \mathcal{E}_\alpha$.

ЛЕММА 3. Сужение любого $\varphi \in \Phi(\alpha)$ на $*$ -алгебру $\mathcal{M} \vee \mathcal{M}'$ совпадает с отображением

$$\sum_k A_k B_k \mapsto \varphi(I) \left[\sum_k \alpha(A_k) \beta(B_k) \right],$$

где $\{A_k\}$ и $\{B_k\}$ – конечные наборы элементов из $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверяется непосредственно с учетом определения эндоморфизма φ .

Во множестве $\text{End}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ существует естественное отношение частичного порядка: $\gamma_1 \succ \gamma_2 \Leftrightarrow \gamma_1(X) \geq \gamma_2(X) \quad \forall X \in (\mathcal{B}(\mathcal{H}))_+$.

ЛЕММА 4. Если $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi(\alpha)$, то $\varphi_1 \succ \varphi_2 \Leftrightarrow \varphi_1(I) \geq \varphi_2(I)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы следует из сильной плотности $*$ -алгебры $\mathcal{M} \vee \mathcal{M}'$ в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и леммы 3.

ТЕОРЕМА 1. Множество $\Phi(\alpha)$ всех регулярных подрасширений регулярного эндоморфизма α содержит наибольший элемент θ . Эндоморфизм θ имеет вид

$$\theta(\cdot) = \sum_{i=1}^n T_i(\cdot) T_i^*,$$

где $\{T_i\}_{i=1}^n$ – произвольный ортонормированный базис (ОНБ) в $\mathcal{E}_\alpha$, $n = \dim \mathcal{E}_\alpha \leq \infty$.

Проектор $C = \theta(I)$ является минимальным в $\mathcal{R} \wedge \mathcal{R}'$. Множество $\mathcal{E}_\alpha$ есть гильбертово пространство операторов, сплетающих эндоморфизм θ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{T_i\}_{i=1}^n$ – произвольный ОНБ в $\mathcal{E}_\alpha$, т.е. семейство изометрий со взаимно ортогональными образами, дающими в объединении подпространство $\bigvee_{X \in \mathcal{E}_\alpha} \text{Ran } X$. Эндоморфизм $\theta(\cdot) = \sum_{i=1}^n T_i(\cdot) T_i^*$ является регулярным подрасширением α , поскольку

$$\begin{aligned} \theta(A) &= \sum_{i=1}^n T_i A T_i^* = \alpha(A) \sum_{i=1}^n T_i T_i^* = \alpha(A) \theta(I) \quad \forall A \in \mathcal{M}, \\ \theta(B) &= \sum_{i=1}^n T_i B T_i^* = \beta(B) \sum_{i=1}^n T_i T_i^* = \beta(B) \theta(I) \quad \forall B \in \mathcal{M}'. \end{aligned}$$

Пусть φ – произвольное подрасширение α . Для $\varphi \in \text{End}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ имеем

$$\varphi(\cdot) = \sum_{i=1}^m U_i(\cdot) U_i^*,$$

где $\{U_i\}_{i=1}^m$ – некоторое семейство изометрий со взаимно ортогональными образами, сплетающих φ (см. [6]). Так как φ является подрасширением α , то при каждом $k \leq m$

$$\begin{aligned} U_k A &= \varphi(A) U_k = \alpha(A) \varphi(I) U_k = \alpha(A) \left(\sum_{i=1}^m U_i U_i^* \right) U_k = \alpha(A) U_k \quad \forall A \in \mathcal{M}, \\ U_k B &= \varphi(B) U_k = \beta(B) \varphi(I) U_k = \beta(B) \left(\sum_{i=1}^m U_i U_i^* \right) U_k = \beta(B) U_k \quad \forall B \in \mathcal{M}'. \end{aligned}$$

Следовательно, $U_k \in \mathcal{E}_\alpha$ и $\varphi(I) = \sum_{i=1}^m U_i U_i^* \leq C = \theta(I)$. Лемма 4 дает $\varphi \prec \theta$. Таким образом, максимальность θ доказана.

Покажем, что $C = \theta(I) \in \mathcal{R} \wedge \mathcal{R}'$. Ясно, что $C = \theta(I) \in \mathcal{R}'$. Поскольку $(C \mathcal{R}' C)|_{C \mathcal{H}}$ есть коммутант в $\mathcal{B}(C \mathcal{H})$ фактора $(C \mathcal{R})|_{C \mathcal{H}} = (\theta(\mathcal{B}(\mathcal{H})))|_{C \mathcal{H}}$ типа I, то $C \mathcal{R}' C -$

фактор типа I. Пусть T – произвольная изометрия из $\mathcal{E}_\alpha$. Тогда по лемме 2 проектор $E = TT^*$ является минимальным в алгебре $\mathcal{R}'$ и $E \leq C$. Поскольку $C\mathcal{R}'C$ – фактор, то $C \leq C_E$, где C_E – центральный носитель проектора E в алгебре $\mathcal{R}'$. Предположим, что $C < C_E$. Тогда в факторе $C_E\mathcal{R}'$ типа I найдется частичная изометрия V такая, что $V^*V = E$ и $VV^* \leq C_E - C$. Для изометрии VT имеем $VT A = V\alpha(A)T = \alpha(A)VT \quad \forall A \in \mathcal{M}$ и $VTB = V\beta(B)T = \beta(B)VT \quad \forall B \in \mathcal{M}'$, т.е. $VT \in \mathcal{E}_\alpha$. Следовательно, $VT(VT)^* = VV^* \leq C$. Полученное противоречие показывает, что $C = C_E \in \mathcal{R} \wedge \mathcal{R}'$. Минимальность $C = C_E$ в $\mathcal{R} \wedge \mathcal{R}'$ следует из минимальности E в $\mathcal{R}'$ и предложения 6.4.3 из [5].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из (алгебраической) изоморфности алгебр $\mathcal{M} \vee \mathcal{M}'$ и $\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}'$ (теорема 5.5.4 в [5]) следует, что сопоставление конечных сумм

$$\sum_k A_k B_k \mapsto \sum_k \alpha(A_k) \beta(B_k)$$

корректно определяет инъективный $*$ -гомоморфизм алгебры $\mathcal{M} \vee \mathcal{M}'$ в себя, расширяющий α и β . Для его расширения до эндоморфизма $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ необходима и достаточна ограниченность и σ -слабая непрерывность этого гомоморфизма (лемма 10.11 из [5]). Теорема 1 и лемма 3 показывают, что в $\mathcal{H}$ существует наибольшее подпространство $C\mathcal{H}$, приводящее факторы $\alpha(\mathcal{M})$ и $\beta(\mathcal{M}')$, такое, что отображение

$$\sum_k A_k B_k \mapsto \left[\sum_k \alpha(A_k) \beta(B_k) \right] \Big|_{C\mathcal{H}}$$

ограничено и σ -слабо непрерывно.

В случае $C = \theta(I) = I$, т.е. когда $\bigvee_{X \in \mathcal{E}_\alpha} \text{Ran } X = \mathcal{H}$, эндоморфизм θ является *регулярным расширением* эндоморфизма α (см. [3]), т.е.

$$\theta(A) = \alpha(A), \quad \theta(B) = \beta(B) \quad \forall A \in \mathcal{M}, \quad \forall B \in \mathcal{M}'.$$

Наоборот, если регулярное расширение существует, то оно, очевидно, совпадает с θ . Поэтому в общем случае $C = \theta(I) \leq I$ эндоморфизм θ будем называть *регулярным квазирасширением* эндоморфизма α .

Подчеркнем, что если $\mathcal{M}$ – фактор типа I, то любой эндоморфизм α является регулярным и его регулярное квазирасширение унитарно: $C = \theta(I) = I$. Действительно, согласно [6] в этом случае $\alpha(\cdot) = \sum_{i=1}^n V_i(\cdot) V_i^*$, где $\{V_i\}_{i=1}^n$ – семейство изометрий из $\mathcal{M}$. Нетрудно проверить, что семейство $\{V_{i,j} = V_i J V_j J\}_{i,j=1}^n$ есть ОНБ в $\mathcal{E}_\alpha$ и $\theta(I) = \sum_{i,j=1}^n V_{i,j} V_{i,j}^* = I$. Если $\mathcal{M}$ – фактор типа II или III, то регулярные эндоморфизмы существуют и их регулярные квазирасширения также могут быть унитарными, как показано в [3] и в примерах раздела 5.

Отметим, что рассуждения раздела 2 можно провести в терминах дискретной полугруппы $\{\alpha^n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$, где α – регулярный эндоморфизм $\mathcal{M}$, и соответствующего регулярного квазирасширения – полугруппы $\{\theta^n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$.

3. Расширение E_0 -полугруппы эндоморфизмов. Пусть E_0 -полугруппа

$$\{\alpha_t\}_{t \geq 0}$$

состоит из регулярных эндоморфизмов фактора $\mathcal{M}$, а $\{\beta_t = j \circ \alpha_t \circ j^{-1}\}_{t \geq 0}$ – соответствующая полугруппа на $\mathcal{M}'$. Результаты предыдущего раздела позволяют при каждом $t \geq 0$ ввести гильбертово пространство $\mathcal{E}_\alpha(t) := \mathcal{E}_{\alpha_t}$, определяемое (1), и регулярное квазирасширение θ_t . Естественный вопрос о наличии у семейства $\{\theta_t\}_{t \geq 0}$ свойства E_0 -полугруппы $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ равносильен вопросу о том, образует ли семейство $\{\mathcal{E}_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$ СП гильбертовых пространств по Арвесону (см. [6]) с операторным умножением в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ в качестве тензорного произведения слоев $\mathcal{E}_\alpha(t)$. Легко проверить, что $X_t X_s \in \mathcal{E}_\alpha(t+s) \forall X_t \in \mathcal{E}_\alpha(t), \forall X_s \in \mathcal{E}_\alpha(s)$, т.е. что $\mathcal{E}_\alpha(t)\mathcal{E}_\alpha(s) \subseteq \mathcal{E}_\alpha(t+s)$, однако априори не очевидно, будет ли линейная оболочка множества $\mathcal{E}_\alpha(t)\mathcal{E}_\alpha(s)$ плотна в $\mathcal{E}_\alpha(t+s)$. Как показано ниже, данный вопрос тесно связан с поведением семейства проекторов $\{C_t = \theta_t(I)\}_{t \geq 0}$.

ЛЕММА 5. Семейство проекторов $\{C_t = \theta_t(I)\}_{t \geq 0}$ коммутативно и

$$\theta_t(C_s) = C_t C_{t+s}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Коммутативность семейства $\{C_t\}_{t \geq 0}$ легко выводится из доказанной в теореме 1 принадлежности при каждом $t > 0$ проектора C_t алгебре $\mathcal{R}_t \wedge \mathcal{R}'_t$ и очевидных включений $\mathcal{R}_t \supseteq \mathcal{R}_{t+s}, \mathcal{R}'_t \subseteq \mathcal{R}'_{t+s} \quad \forall t, s > 0$. Поскольку $\theta_t(\alpha_s(A)\beta_s(B)) = C_t \alpha_{t+s}(A)\beta_{t+s}(B) \quad \forall A \in \mathcal{M}, \forall B \in \mathcal{M}'$ в силу леммы 3, то

$$\theta_t(\mathcal{R}_s) = C_t \mathcal{R}_{t+s}. \quad (4)$$

Из (4) с учетом $\theta_t(\mathcal{B}(\mathcal{H})) = C_t \theta_t(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ получаем

$$\theta_t(\mathcal{R}'_s) \subseteq C_t \mathcal{R}'_{t+s} C_t. \quad (5)$$

Из (4) и (5) следует, что $\theta_t(\mathcal{R}_s \wedge \mathcal{R}'_s) \subseteq C_t(\mathcal{R}'_{t+s} \wedge \mathcal{R}'_{t+s})$. Поскольку $C_s \in \mathcal{R}_s \wedge \mathcal{R}'_s$ по теореме 1, то $\theta_t(C_s)$ – проектор в $C_t(\mathcal{R}'_{t+s} \wedge \mathcal{R}'_{t+s})$.

Далее, $\theta_t(\cdot) = \sum_{i=1}^{n_t} T_t^i(\cdot)(T_t^i)^*$, где $\{T_t^i\}_{i=1}^{n_t}$ – произвольный ОНБ в $\mathcal{E}_\alpha(t)$, а

$$C_s = \sum_{j=1}^{n_s} T_s^j (T_s^j)^*,$$

где $\{T_s^j\}_{j=1}^{n_s}$ – произвольный ОНБ в $\mathcal{E}_\alpha(s)$. Поэтому с учетом $\mathcal{E}_\alpha(t)\mathcal{E}_\alpha(s) \subseteq \mathcal{E}_\alpha(t+s)$ имеем

$$\theta(C_s) = \sum_{i=1}^{n_t} \sum_{j=1}^{n_s} T_t^i T_s^j (T_s^j)^* (T_t^i)^* \leq C_{t+s}. \quad (6)$$

Проектор C_{t+s} минимален в алгебре $\mathcal{R}_{t+s} \wedge \mathcal{R}'_{t+s}$ по теореме 1. Следовательно, проектор $C_t C_{t+s}$ минимален в алгебре $C_t(\mathcal{R}_{t+s} \wedge \mathcal{R}'_{t+s})$ (предложение 5.5.5 из [5]). Эта минимальность вместе с (6) дает $\theta_t(C_s) = C_t C_{t+s}$.

Следующая лемма показывает наличие ослабленной версии полугруппового свойства у семейства эндоморфизмов $\{\theta_t\}_{t \geq 0}$.

ЛЕММА 6. Эндоморфизмы семейства $\{\theta_t\}_{t \geq 0}$ связаны соотношением

$$\theta_t(\theta_s(\cdot)) = \theta_t(I)\theta_{t+s}(\cdot).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $A \in \mathcal{M}$ и $B \in \mathcal{M}'$ в силу лемм 3 и 5 имеем

$$\begin{aligned}\theta_t(\theta_s(AB)) &= \theta_t(C_s \alpha_s(A) \beta_s(B)) = \theta_t(C_s) \theta_t(\alpha_s(A) \beta_s(B)) = C_t C_{t+s} \alpha_{t+s}(A) \beta_{t+s}(B) \\ &= \theta_t(I) \theta_{t+s}(AB).\end{aligned}$$

Утверждение леммы следует из слабой плотности в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ алгебры $\mathcal{M} \vee \mathcal{M}'$ и нормальности эндоморфизмов семейства $\{\theta_t\}_{t \geq 0}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. E_0 -полугруппа эндоморфизмов $\{\alpha_t\}_{t \geq 0}$ фактора $\mathcal{M}$, стандартно реализованного в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, называется *регулярной*, если

1. существует сильно непрерывное семейство изометрий $\{T_t\}_{t \geq 0}$ такое, что $T_t \in \mathcal{E}_\alpha(t)$ $\forall t \geq 0$;
2. $\exists t_0 > 0$: $\bigwedge_{s \leq t_0} C_s > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Второе условие в определении 2 носит технический характер. Это условие заведомо выполнено в “унитальном” случае $C_t = I \forall t \geq 0$, а также когда семейство $\{T_t\}_{t \geq 0}$ является коммутативным, поскольку, как показывает следующая лемма, в этом случае $\text{Ran } T_t \subseteq \text{Ran } T_s \subseteq C_s \mathcal{H} \forall t > 0, \forall s \in [0, t]$.

ЛЕММА 7. Любое сильно непрерывное коммутативное семейство изометрий $\{T_t\}_{t \geq 0}$ такое, что $T_t \in \mathcal{E}_\alpha(t) \forall t \geq 0$, можно превратить в сильно непрерывную полугруппу $\{\mu(t)T_t\}_{t \geq 0}$ умножением на комплекснозначную непрерывную функцию $\mu(t)$ такую, что $|\mu(t)| = 1 \forall t \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $T_{t+s}, T_t T_s \in \mathcal{E}_\alpha(t+s) \forall t, s \geq 0$, то по лемме 2 коммутирующие проекторы $T_{t+s} T_{t+s}^*$ и $T_t T_s (T_t T_s)^*$ являются минимальными в $\mathcal{R}'_{t+s}$. Следовательно, $\text{Ran } T_{t+s}$ и $\text{Ran } T_t T_s$ либо ортогональны, либо совпадают. Поэтому

$$F_s^t = T_{t+s}^* T_t T_s = \langle T_{t+s}, T_t T_s \rangle_{\mathcal{E}_\alpha(t+s)} I = \lambda(t, s) I, \quad (7)$$

где комплексное число $\lambda(t, s)$ либо равно нулю, либо $|\lambda(t, s)| = 1$. При каждом фиксированном $t \geq 0$ семейство $\{F_s^t\}_{s \geq 0}$ сильно непрерывно в силу сильной непрерывности семейства $\{T_t\}_{t \geq 0}$ и непрерывности в сильной операторной топологии операции умножения по совокупности сомножителей на единичном шаре $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Используя топологическую связность $[0; +\infty)$, легко показать, что либо $\lambda(t, s) = 0 \forall s \geq 0$, либо $|\lambda(t, s)| = 1 \forall s \geq 0$. Но $\lambda(t, 0) = 1$, так как $F_0^t = T_t^* T_t = I$. Поэтому имеет место второй случай, а значит, $\text{Ran } T_{t+s} = \text{Ran } T_t T_s$. С учетом (7) получаем

$$T_{t+s} = \lambda(t, s) T_t T_s, \quad (8)$$

где $\lambda(t, s) \in \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Доопределим значения функции $\lambda(t, s)$ для отрицательных значений t, s по формуле $\lambda(-t, -s) = \overline{\lambda(t, s)}$, $\lambda(-s, t) = \lambda(t, -s) = \lambda(t, s - t) = 1$, $s \geq t$, $\lambda(-s, t) = \lambda(t, -s) = \overline{\lambda(s, t - s)}$, $t \geq s$, $t, s \geq 0$ (здесь черта обозначает комплексное сопряжение). Получившаяся функция будет удовлетворять условию 2-коцикла для всех значений аргументов: $\lambda(t + s, r) \lambda(t, s) = \lambda(t, s + r) \lambda(s, r)$, $\lambda(0, t) = \lambda(t, 0) = 1$, где $s, t, r \in \mathbb{R}$. В ходе доказательства теоремы 3.2.73 из [4] на с. 302 вводится 2-коцикл $z(t, s)$ со значениями в множестве унитарных операторов, принадлежащих центру произвольной алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$. Далее устанавливается существование в центре $\mathcal{M}$ семейства $\mu(t)$ со свойством $z(t, s) = \mu(t) \mu(s) \mu(t + s)^{-1}$, $s, t \in \mathbb{R}$, такого, что для любых фиксированных $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, для которых $\|z(t, s) - I\| \leq \varepsilon$ при $|t| + |s| \leq \delta$,

выполняется $\|\mu(t) - I\| \leq 3\varepsilon$ при $|t| + |s| \leq \delta$. Таким образом, в [4] доказано даже более сильное утверждение, чем нам требуется, и 2-коцикл $\lambda(t, s)$ тривиальный, т.е. $\lambda(t, s) = \mu(t)\mu(s)\mu(t+s)^{-1}$ для некоторой непрерывной в нуле функции $\mu(t)$. Полагая $S_t = \mu(t)T_t$, из (8) получаем, что полугруппа изометрий $\{S_t\}_{t \geq 0}$ сильно непрерывна в нуле, а значит, и при всех $t \geq 0$, т.е. принадлежит классу C_0 -полугрупп.

Назовем *регулярным подрасширением* E_0 -полугруппы эндоморфизмов $\{\alpha_t\}_{t \geq 0}$ фактора $\mathcal{M}$ такую e_0 -полугруппу эндоморфизмов $\{\varphi_t\}_{t \geq 0}$ фактора $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, что при каждом $t > 0$ эндоморфизм φ_t является регулярным подрасширением эндоморфизма α_t .

В отличие от случая одного регулярного эндоморфизма, существование у регулярной полугруппы хотя бы одного регулярного подрасширения априори не очевидно. Достаточным условием существования регулярного подрасширения у регулярной полугруппы $\{\alpha_t\}_{t \geq 0}$ является наличие в $\{\mathcal{E}_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$ сильно непрерывного коммутативного семейства изометрий $\{T_t\}_{t \geq 0}$. Действительно, в силу леммы 7 семейство эндоморфизмов $\{T_t(\cdot)T_t^*\}_{t \geq 0}$ образует E_0 -полугруппу $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, причем при каждом $t > 0$ эндоморфизм $T_t(\cdot)T_t^*$ является в силу $T_t \in \mathcal{E}_\alpha(t)$ регулярным подрасширением эндоморфизма α_t . Следующая теорема 2 (вместе с замечанием 3) устанавливает, в частности, что необходимым и достаточным условием существования регулярного подрасширения у полугруппы эндоморфизмов является ее регулярность.

Во множестве всех полугрупп эндоморфизмов $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ существует естественное отношение частичного порядка: $\{\gamma'_t\}_{t \geq 0} \succ \{\gamma''_t\}_{t \geq 0} \Leftrightarrow \gamma'_t(X) \geq \gamma''_t(X) \forall X \in (\mathcal{B}(\mathcal{H}))_+ \forall t > 0$.

ТЕОРЕМА 2. *Множество $\Phi(\{\alpha_t\})$ всех регулярных подрасширений регулярной E_0 -полугруппы $\{\alpha_t\}_{t \geq 0}$ фактора $\mathcal{M}$ непусто и содержит наибольший элемент $\{\bar{\theta}_t\}_{t \geq 0}$, причем $\bar{\theta}_t(\cdot) = \bar{C}_t\theta_t(\cdot) \forall t \geq 0$, где $\bar{C}_t = \bigwedge_{r \in [0, t]} C_r$ – проектор из $\mathcal{R}'_t$.*

При каждом $t \geq 0$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{E}_\alpha(t)$ существует наибольшее нетривиальное подпространство $\bar{\mathcal{E}}_\alpha(t)$ такое, что семейство $\{\bar{\mathcal{E}}_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$ является СП с операторным умножением в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ в качестве тензорного произведения слоев, причем

$$\bar{\mathcal{E}}_\alpha(t) = \{X \in \mathcal{E}_\alpha(t) : \text{Ran } X \subseteq \bar{C}_t\mathcal{H}\}.$$

СП $\{\bar{\mathcal{E}}_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$ ассоциирована по Арвесону с e_0 -полугруппой $\{\bar{\theta}_t\}_{t \geq 0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим прежде всего, что $\bar{C}_t = \bigwedge_{r \in [0, t]} C_r$ – ненулевой проектор из $\mathcal{R}'_t$ при каждом $t > 0$ в силу регулярности полугруппы $\{\alpha_t\}_{t \geq 0}$ и включений $C_r \in \mathcal{R}'_r \subseteq \mathcal{R}'_t \forall r \in [0, t]$. Следовательно, $\{\bar{\theta}_t(\cdot) = \bar{C}_t\theta_t(\cdot)\}_{t \geq 0}$ – семейство эндоморфизмов $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, причем при каждом $t > 0$ эндоморфизм $\bar{\theta}_t$ есть регулярное подрасширение эндоморфизма α_t . Покажем, что

$$\bar{\theta}_t(\bar{C}_s) = \bar{C}_{t+s} \quad \forall t, s > 0. \quad (9)$$

Пусть $\mathcal{F}_s$ – множество всех конечных подмножеств отрезка $[0, s]$, частично упорядоченное по включению, а $C_s(\lambda) = \bigwedge_{r \in \lambda} C_r$ при каждом $\lambda \in \mathcal{F}_s$. Ясно, что $\{C_s(\lambda)\}_{\lambda \in \mathcal{F}_s}$ – убывающая направленность в $\mathcal{B}(\mathcal{H})_+$. В силу леммы 2.4.19 из [4] существует предел в сильной операторной топологии

$$s - \lim_{\lambda} C_s(\lambda) = \inf_{\lambda} C_s(\lambda) = \bar{C}_s.$$

Используя лемму 5, получаем

$$\bar{\theta}_t(C_s(\lambda)) = \bar{\theta}_t\left(\bigwedge_{r \in \lambda} C_r\right) = \bar{\theta}_t\left(\prod_{r \in \lambda} C_r\right) = \prod_{r \in \lambda} \bar{\theta}_t(C_r) = \prod_{r \in \lambda} \bar{C}_t \theta_t(C_r) = \prod_{r \in \lambda} \bar{C}_t C_{t+r}.$$

Переход к пределу по λ с учетом нормальности эндоморфизма $\bar{\theta}_t$ дает

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_t(\bar{C}_s) &= \bar{\theta}_t(C_s(\lambda)) = s - \lim_{\lambda} \bar{\theta}_t(C_s(\lambda)) = s - \lim_{\lambda} \prod_{r \in \lambda} \bar{C}_t C_{t+r} \\ &= \inf_{\lambda} \prod_{r \in \lambda} \bar{C}_t C_{t+r} = \bar{C}_{t+s}. \end{aligned}$$

Таким образом, (9) доказано.

Полугрупповое свойство семейства $\{\bar{\theta}_t\}_{t \geq 0}$ легко выводится из (9) и леммы 6:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_t(\bar{\theta}_s(\cdot)) &= \bar{\theta}_t(\bar{C}_s \theta_s(\cdot)) = \bar{\theta}_t(\bar{C}_s) \bar{\theta}_t(\theta_s(\cdot)) = \bar{C}_{t+s} \bar{C}_t \theta_t(\theta_s(\cdot)) \\ &= \bar{C}_{t+s} \theta_{t+s}(\cdot) = \bar{\theta}_{t+s}(\cdot). \end{aligned}$$

Покажем σ -слабую непрерывность полугруппы $\{\bar{\theta}_t\}_{t \geq 0}$. Для этого достаточно установить непрерывность в сильной операторной топологии любой ее траектории

$$\{\bar{\theta}_t(X)\}_{t \geq 0}, \quad X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}),$$

справа при $t = 0$. Действительно, сильная непрерывность траектории повлечет ее непрерывность в σ -слабой операторной топологии справа при $t = 0$, поскольку любая траектория полугруппы эндоморфизмов лежит в некотором шаре $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Далее, нормальность эндоморфизмов $\bar{\theta}_t$ означает существование предсопряженных операторов $*\bar{\theta}_t$ в $\mathcal{B}(\mathcal{H})_*$, образующих полугруппу сжатий банахова пространства $\mathcal{B}(\mathcal{H})_*$. Из σ -слабой непрерывности справа при $t = 0$ полугруппы $\{\bar{\theta}_t\}_{t \geq 0}$ следует $\sigma(\mathcal{B}(\mathcal{H})_*, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ -непрерывность траекторий полугруппы $\{*\bar{\theta}_t\}_{t \geq 0}$ справа при $t = 0$. Как известно (см., например, [8, глава 1]), это повлечет непрерывность любой траектории $\{*\bar{\theta}_t(\omega)\}_{t \geq 0}$, $\omega \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_*$, по норме $\mathcal{B}(\mathcal{H})_*$ при всех $t \geq 0$. Иначе говоря, $\{*\bar{\theta}_t\}_{t \geq 0}$ будет полугруппой класса C_0 в $\mathcal{B}(\mathcal{H})_*$, а сопряженная полугруппа $\{\bar{\theta}_t\}_{t \geq 0}$ будет C_0^* -полугруппой в банаховом пространстве $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, т.е. σ -слабо непрерывной полугруппой эндоморфизмов.

Покажем, что $\exists s - \lim_{t \rightarrow +0} \bar{\theta}_t(X) = X \quad \forall X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Пусть $\{T_t\}_{t \geq 0}$ сильно непрерывное семейство изометрий, фигурирующее в определении 2 регулярности полугруппы $\{\alpha_t\}_{t \geq 0}$. Заметим, что в силу справедливого $\forall \xi \in \mathcal{H}$ соотношения

$$\|T_t^* \xi - \xi\| = \|T_t^* \xi - T_t^* T_t \xi\| \leq \|T_t^*\| \|\xi - T_t \xi\| = \|\xi - T_t \xi\|$$

существует $s - \lim_{t \rightarrow 0} T_t^* = I$, а значит, и $s - \lim_{t \rightarrow 0} E_t = I$, где $E_t = T_t T_t^*$. Из этого замечания и оценки, верной $\forall \xi \in \mathcal{H}, \forall X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $\forall t > 0$,

$$\begin{aligned} \|\bar{\theta}_t(X) \xi - X \xi\| &= \|\bar{\theta}_t(X) \xi - \bar{\theta}_t(X) E_t \xi + \bar{\theta}_t(X) E_t \xi - X \xi\| \\ &\leq \|\bar{\theta}_t(X) \xi - \bar{\theta}_t(X) E_t \xi\| + \|\bar{\theta}_t(X) E_t \xi - X \xi\| \\ &\leq \|\bar{\theta}_t(X)\| \|\xi - E_t \xi\| + \|T_t X T_t^* \xi - X \xi\| \\ &= \|X\| \|\xi - E_t \xi\| + \|T_t X T_t^* \xi - X \xi\| \end{aligned}$$

получаем существование указанного выше предела и, следовательно, σ -слабую непрерывность полугруппы $\{\bar{\theta}_t\}_{t \geq 0}$.

Пусть $\{\varphi_t\}_{t \geq 0}$ – регулярное подрасширение полугруппы $\{\alpha_t\}_{t \geq 0}$. Тогда при каждом $r > 0$ эндоморфизм φ_r есть регулярное подрасширение эндоморфизма α_r и в силу максимальности θ_r в $\Phi(\alpha_r)$ (теорема 1) имеем $\varphi_r(I) \leq \theta_r(I) = C_r$. Поэтому при каждом $t > 0$ имеем $\varphi_t(I) \leq \varphi_r(I) \leq C_r \quad \forall r \in [0, t]$. Следовательно,

$$\varphi_t(I) \leq \bigwedge_{r \in [0, t]} C_r = \bar{C}_t = \bar{\theta}_t(I).$$

Из леммы 4 получаем, что $\varphi_t \prec \bar{\theta}_t \quad \forall t \geq 0$. Таким образом, $\{\bar{\theta}_t\}_{t \geq 0}$ – наибольшее регулярное подрасширение полугруппы $\{\alpha_t\}_{t \geq 0}$; будем называть его *регулярным квазирасширением* исходной полугруппы.

При каждом $t > 0$ множество $\bar{\mathcal{E}}_\alpha(t) = \{X \in \mathcal{E}_\alpha(t) : \text{Ran } X \subseteq \bar{C}_t \mathcal{H}\}$ есть гильбертово пространство операторов, сплетающих эндоморфизм $\bar{\theta}_t$. Как показано в [6], $\dim \bar{\mathcal{E}}_\alpha(t)$ для всех $t > 0$ либо 1, либо ∞ . Если $\dim \bar{\mathcal{E}}_\alpha(t) = \infty \quad \forall t > 0$, то в соответствии с [6] семейство $\{\bar{\mathcal{E}}_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$ образует СП гильбертовых пространств. Если $\dim \bar{\mathcal{E}}_\alpha(t) = 1 \quad \forall t > 0$, то $\bar{\theta}_t(\cdot) = T_t(\cdot)T_t^*$ и $\bar{\mathcal{E}}_\alpha(t) = \{\mathbb{C}T_t\}$ при каждом $t \geq 0$. Лемма 7 показывает, что семейство $\{\bar{\mathcal{E}}_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$ в этом случае можно рассматривать как вырожденный случай СП.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Утверждение теоремы 2 допускает следующее обращение. Если у E_0 -полугруппы $\{\alpha_t\}_{t \geq 0}$ существует хотя бы одно регулярное подрасширение, то такая полугруппа регулярна в смысле определения 2. Действительно, если $\{\varphi_t\}_{t \geq 0}$ – такое подрасширение, то с помощью леммы 2.3 в [6] (и рассуждений после нее) нетрудно получить сильно непрерывное семейство изометрий, сплетающее $\{\varphi_t\}_{t \geq 0}$, а значит, удовлетворяющее пункту 1 определения 2. Из $\varphi_t(I) \leq \varphi_s(I) \leq C_s \quad \forall t > 0, \forall s \in [0, t]$ следует $\bigwedge_{s \leq t} C_s \geq \varphi_t(I) > 0 \quad \forall t > 0$, т.е. выполнение пункта 2 определения 2.

СЛЕДСТВИЕ 1. Семейство $\{\mathcal{E}_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$ образует СП гильбертовых пространств с операторным умножением в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ в качестве тензорного произведения слоев тогда и только тогда, когда семейство подпространств

$$\left\{ C_t \mathcal{H} = \bigvee_{X \in \mathcal{E}_\alpha(t)} \text{Ran } X \right\}_{t \geq 0}$$

является монотонно убывающим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\{C_t\}_{t \geq 0}$ – монотонно убывающее семейство проекторов, то $\bar{C}_t = C_t$, а значит, $\bar{\theta}_t = \theta_t$ и $\bar{\mathcal{E}}_\alpha(t) = \mathcal{E}_\alpha(t)$ при каждом $t \geq 0$. Обратное утверждение очевидно.

Регулярность некоторых классов полугрупп и конкретные примеры регулярных квазисвободных полугрупп на алгебре КАС рассмотрены в разделе 5.

4. Коциклические возмущения регулярных полугрупп. Теперь мы исследуем поведение введенных в разделе 3 объектов $\{\theta_t\}_{t \geq 0}$, $\{\bar{\theta}_t\}_{t \geq 0}$, $\{\mathcal{E}_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$ и $\{\bar{\mathcal{E}}_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$ при коциклических возмущениях регулярной полугруппы $\{\alpha_t\}_{t \geq 0}$.

Рассмотрим E_0 -полугруппу $\{\alpha_t^u(\cdot) = U_t \alpha_t(\cdot) U_t^*\}_{t \geq 0}$, где $\{U_t\}_{t \geq 0}$ – коцикл в $\mathcal{M}$, т.е. сильно непрерывное семейство унитарных операторов из $\mathcal{M}$ со свойством $U_{t+s} =$

$U_t \alpha_t(U_s) \quad \forall t, s \geq 0$. Полугруппа $\{\beta_t^u = j \circ \alpha_t^u \circ j^{-1}\}_{t \geq 0}$ сопряжена с полугруппой $\{\beta_t = j \circ \alpha_t \circ j^{-1}\}_{t \geq 0}$ посредством коцикла $\{U_t' = JU_t J\}_{t \geq 0}$:

$$\beta_t^u(\cdot) = J \alpha_t^u(J(\cdot)J)J = JU_t \alpha_t(J(\cdot)J)U_t^* J = U_t' J \alpha_t(J(\cdot)J)JU_t'^* = U_t' \beta_t(\cdot)U_t'^*.$$

Введем сильно непрерывное семейство $\{\tilde{U}_t = U_t U_t'\}_{t \geq 0}$ унитарных операторов в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и соответствующее семейство $\{L_{\tilde{U}}(t)\}_{t \geq 0}$ преобразований на $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ операторного умножения слева: $L_{\tilde{U}}(t): X \mapsto \tilde{U}_t X \quad \forall X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \forall t \geq 0$.

При каждом $t \geq 0$ для любого T из $\mathcal{E}_\alpha(t)$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{U}_t T A &= U_t U_t' \alpha_t(A) T = U_t \alpha_t(A) U_t^* U_t U_t' T = \alpha_t^u(A) \tilde{U}_t T \quad \forall A \in \mathcal{M}, \\ \tilde{U}_t T B &= U_t U_t' \beta_t(B) T = U_t \beta_t(B) U_t^* U_t U_t' T = \beta_t^u(B) \tilde{U}_t T \quad \forall B \in \mathcal{M}', \end{aligned}$$

т.е. $\tilde{U}_t \mathcal{E}_\alpha(t) \subseteq \mathcal{E}_\alpha^u(t)$. Аналогично показывается, что $\tilde{U}_t^* \mathcal{E}_\alpha^u(t) \subseteq \mathcal{E}_\alpha(t)$. Следовательно, $\tilde{U}_t \mathcal{E}_\alpha(t) = \mathcal{E}_\alpha^u(t)$. Далее,

$$\langle \tilde{U}_t T_1, \tilde{U}_t T_2 \rangle_{\mathcal{E}_\alpha^u(t)} I = (\tilde{U}_t T_1)^* \tilde{U}_t T_2 = (T_1)^* T_2 = \langle T_1, T_2 \rangle_{\mathcal{E}_\alpha(t)} I \quad \forall T_1, T_2 \in \mathcal{E}_\alpha(t).$$

Таким образом, $L_{\tilde{U}}(t)$ есть унитарное преобразование из $\mathcal{E}_\alpha(t)$ на $\mathcal{E}_\alpha^u(t)$ при каждом $t \geq 0$.

Пусть $\{\varphi_t\}_{t \geq 0}$ – какое-либо регулярное подрасширение полугруппы $\{\alpha_t\}_{t \geq 0}$. Рассмотрим семейство эндоморфизмов $\{\varphi_t^u(\cdot) = \tilde{U}_t \varphi_t(\cdot) \tilde{U}_t^*\}_{t \geq 0}$. При каждом $t > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \varphi_t^u(A) &= \tilde{U}_t \varphi_t(A) \tilde{U}_t^* = \tilde{U}_t \varphi_t(I) \alpha_t(A) \tilde{U}_t^* \\ &= \tilde{U}_t \varphi_t(I) \tilde{U}_t^* \tilde{U}_t \alpha_t(A) \tilde{U}_t^* = \varphi_t^u(I) \alpha_t^u(A) \quad \forall A \in \mathcal{M}, \\ \varphi_t^u(B) &= \tilde{U}_t \varphi_t(B) \tilde{U}_t^* = \tilde{U}_t \varphi_t(I) \alpha_t(B) \tilde{U}_t^* \\ &= \tilde{U}_t \varphi_t(I) \tilde{U}_t^* \tilde{U}_t \beta_t(B) \tilde{U}_t^* = \varphi_t^u(I) \beta_t^u(B) \quad \forall B \in \mathcal{M}', \end{aligned} \tag{10}$$

т.е. φ_t^u – регулярное подрасширение эндоморфизма φ_t . Далее заметим, что для всех $t, s > 0$ в силу леммы 3

$$\tilde{U}_t \varphi_t(\tilde{U}_s) = U_t U_t' \varphi_t(I) \alpha_t(U_t) \beta_t(U_t') = U_{t+s} U_{t+s}' \varphi_t(I)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi_t^u(\varphi_s^u(\cdot)) &= \tilde{U}_t \varphi_t(\tilde{U}_s \varphi_s(\cdot) \tilde{U}_s^*) \tilde{U}_t^* = \tilde{U}_t \varphi_t(\tilde{U}_s) \varphi_t(\varphi_s(\cdot)) \varphi_t(\tilde{U}_s^*) \tilde{U}_t^* \\ &= \tilde{U}_{t+s} \varphi_{t+s}(\cdot) \tilde{U}_{t+s}^* = \varphi_{t+s}^u(\cdot), \end{aligned}$$

т.е. сильно непрерывное семейство эндоморфизмов $\{\varphi_t^u(\cdot)\}_{t \geq 0}$ образует e_0 -полугруппу. Учитывая (10), заключаем, что $\{\varphi_t^u(\cdot)\}_{t \geq 0}$ – регулярное подрасширение E_0 -полугруппы $\{\alpha_t^u\}_{t \geq 0}$. В силу замечания 3 полугруппа $\{\alpha_t^u\}_{t \geq 0}$ является регулярной. Следовательно, для этой полугруппы можно ввести семейство эндоморфизмов $\{\theta_t^u\}_{t \geq 0}$, E_0 -полугруппу $\{\bar{\theta}_t^u\}_{t \geq 0}$ и СП $\{\bar{\mathcal{E}}_\alpha^u(t)\}_{t \geq 0}$.

Если $\{T_t^i\}_{i=1}^{i=n}$ – ОНБ в $\mathcal{E}_\alpha(t)$, то по доказанному выше $\{\tilde{U}_t T_t^i\}_{i=1}^{i=n}$ является ОНБ в $\mathcal{E}_\alpha^u(t)$. Поэтому в силу теоремы 1 при всех $t \geq 0$

$$\theta_t^u(\cdot) = \sum_{i=1}^n \tilde{U}_t T_i(\cdot) (\tilde{U}_t T_i)^* = \tilde{U}_t \left(\sum_{i=1}^n T_i(\cdot) T_i^* \right) \tilde{U}_t^* = \tilde{U}_t \theta_t(\cdot) \tilde{U}_t^*. \tag{11}$$

В частности,

$$C_t^u = \tilde{U}_t C_t \tilde{U}_t^*. \quad (12)$$

Аналог соотношения (11) для эндоморфизмов полугруппы $\{\bar{\theta}_t\}_{t \geq 0}$ будет установлен, если доказать для семейства $\{\bar{C}_t\}_{t \geq 0}$ аналогичное (12) равенство

$$\bar{C}_t^u = \tilde{U}_t \bar{C}_t \tilde{U}_t^*. \quad (13)$$

При каждом $t > 0$ для всех $r \in [0, t]$ в силу $C_r \in \mathcal{R}_r \wedge \mathcal{R}'_r$ и (12) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{U}_t C_r \tilde{U}_t^* &= U_r \alpha_r (U_{t-r}) U'_r \beta_r (U'_{t-r}) C_r (U_r \alpha_r (U_{t-r}) U'_r \beta_r (U'_{t-r}))^* \\ &= U_r U'_r C_r U_r^* U_r^* = \tilde{U}_r C_r \tilde{U}_r^* = C_r^u. \end{aligned}$$

Пусть $\mathcal{F}_t$ – множество всех конечных подмножеств отрезка $[0, t]$, частично упорядоченное по включению, а $C_t(\lambda)$ и $C_t^u(\lambda)$ при каждом $\lambda \in \mathcal{F}_t$ есть точные нижние грани наборов проекторов $\{C_r\}_{r \in \lambda}$ и $\{C_r^u\}_{r \in \lambda}$ соответственно. Тогда из коммутативности этих наборов и последнего равенства следует, что

$$\tilde{U}_t C_t(\lambda) \tilde{U}_t^* = \tilde{U}_t \left(\prod_{r \in \lambda} C_r \right) \tilde{U}_t^* = \left(\prod_{r \in \lambda} C_r^u \right) = C_t^u(\lambda).$$

Поскольку проекторы $\bar{C}_t$ и $\bar{C}_t^u$ есть σ -слабые пределы направленностей $\{C_t(\lambda)\}_{\lambda \in \mathcal{F}_t}$ и $\{C_t^u(\lambda)\}_{\lambda \in \mathcal{F}_t}$ соответственно, то (13) следует из нормальности отображения $\tilde{U}_t(\cdot) \tilde{U}_t^*$.

Из (11) и (13) следует, что

$$\bar{\theta}_t^u(\cdot) = C_t^u \theta_t^u(\cdot) = \tilde{U}_t C_t(\cdot) \theta_t(\cdot) \tilde{U}_t^* = \tilde{U}_t \bar{\theta}_t(\cdot) \tilde{U}_t^*. \quad (14)$$

Покажем изоморфность СП $\{\bar{\mathcal{E}}_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$ и $\{\bar{\mathcal{E}}_\alpha^u(t)\}_{t \geq 0}$. Заметим, что если полугруппа $\{\bar{\theta}_t\}_{t \geq 0}$ унитарна, то семейство $\{\tilde{U}_t\}_{t \geq 0}$ есть коцикл в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и (11) означает коциклическую сопряженность полугрупп $\{\bar{\theta}_t = \theta_t\}_{t \geq 0}$ и $\{\bar{\theta}_t^u = \theta_t^u\}_{t \geq 0}$, а значит, и изоморфность СП $\{\bar{\mathcal{E}}_\alpha(t) = \mathcal{E}_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$ и $\{\bar{\mathcal{E}}_\alpha^u(t) = \mathcal{E}_\alpha^u(t)\}_{t \geq 0}$ в силу теоремы 3.8.1 из [6].

В случае неунитарности $\{\theta_t\}_{t \geq 0}$ семейство $\{\tilde{U}_t\}_{t \geq 0}$ не является коциклом. Тем не менее, можно непосредственно показать изоморфность СП $\{\bar{\mathcal{E}}_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$ и $\{\bar{\mathcal{E}}_\alpha^u(t)\}_{t \geq 0}$, обобщая доказательство теоремы 3.8.1 из [6]. В силу (13) и (14) все необходимые изменения в указанном доказательстве касаются проверки мультипликативного свойства отображения

$$\Psi: (t, T) \mapsto (t, \tilde{U}_t T) \quad \forall T \in \bar{\mathcal{E}}_\alpha(t)$$

из $\{\bar{\mathcal{E}}_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$ на $\{\bar{\mathcal{E}}_\alpha^u(t)\}_{t \geq 0}$.

Пусть $T \in \bar{\mathcal{E}}_\alpha(t)$ и $S \in \bar{\mathcal{E}}_\alpha(s)$. Тогда, учитывая лемму 3, теорему 1 и равенство $T = TI = \theta_t(I)T = C_t T$, имеем

$$\begin{aligned} \tilde{U}_t T \tilde{U}_s S &= \tilde{U}_t \theta_t(\tilde{U}_s) T S = U_t U'_t \theta_t(U_s U'_s) T S = U_t U'_t \alpha_t(U_s) \beta_t(U'_s) C_t T S \\ &= U_{t+s} U'_{t+s} T S = \tilde{U}_{t+s} T S. \end{aligned}$$

Следовательно, отображение Ψ сохраняет “послойное” умножение. Это завершает обобщение доказательства теоремы 3.8.1 из [6] на случай СП $\{\bar{\mathcal{E}}_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$ и $\{\bar{\mathcal{E}}_\alpha^u(t)\}_{t \geq 0}$. Таким образом, установлена следующая

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\{\alpha_t\}_{t \geq 0}$ – регулярная полугруппа и $\{\alpha_t^u(\cdot) = U_t \alpha_t(\cdot) U_t^*\}_{t \geq 0}$, где $\{U_t\}_{t \geq 0}$ – коцикл в $\mathcal{M}$. Тогда возмущенная полугруппа $\{\alpha_t^u\}_{t \geq 0}$ также регулярна. Сильно непрерывное семейство $\{\tilde{U}_t = U_t U_t' = U_t J U_t J\}_{t \geq 0}$ унитарных операторов порождает семейство $\{L_{\tilde{U}}(t)\}_{t \geq 0}$ унитарных преобразований из $\mathcal{E}_\alpha(t)$ на $\mathcal{E}_\alpha^u(t)$ и связывает регулярные квазирасширения:

$$\theta_t^u(\cdot) = \tilde{U}_t \theta_t(\cdot) \tilde{U}_t^*, \quad \bar{\theta}_t^u(\cdot) = \tilde{U}_t \bar{\theta}_t(\cdot) \tilde{U}_t^*.$$

СП гильбертовых пространств $\{\bar{\mathcal{E}}_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$ и $\{\bar{\mathcal{E}}_\alpha^u(t)\}_{t \geq 0}$ изоморфны.

Последнее утверждение теоремы 3 показывает, что СП $\{\bar{\mathcal{E}}_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$ обладает свойством устойчивости по отношению к коциклическим возмущениям полугруппы $\{\alpha_t\}_{t \geq 0}$. Это обосновывает следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. СП $\{\bar{\mathcal{E}}_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$ будем называть *системой-произведением, ассоциированной с E_0 -полугруппой $\{\alpha_t\}_{t \geq 0}$* .

Такое определение согласуется с данным в [3] для квазисвободной E_0 -полугруппы.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Пусть $\{\theta_t\}_{t \geq 0}$ – регулярное квазирасширение полугруппы $\{\alpha_t\}_{t \geq 0}$. Рассмотрим α -коцикл $\{U_t\}_{t \geq 0}$ в $\mathcal{M}$ и β -коцикл $\{U_t' = J U_t J\}_{t \geq 0}$ в $\mathcal{M}'$. Рассуждения, аналогичные приведенным выше в данном разделе, показывают, что формула

$$\theta_t^u(\cdot) = U_t' \theta_t(\cdot) U_t'^*, \quad t \geq 0,$$

корректно задает некоторое (нерегулярное) квазирасширение $\{\theta_t^u\}_{t \geq 0}$ полугруппы $\{\alpha_t\}_{t \geq 0}$. В следующем разделе показано, что в случае квазисвободных полугрупп на факторах, полученных из представлений алгебры КАС, это утверждение допускает обращение: две E_0 -полугруппы $\{\alpha_t\}_{t \geq 0}$ и $\{\gamma_t\}_{t \geq 0}$ на факторах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$ соответственно имеют общее расширение на $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ только тогда, когда полугруппа $\{j^{-1} \circ \gamma_t \circ j\}_{t \geq 0}$ коциклически сопряжена с полугруппой $\{\alpha_t\}_{t \geq 0}$. Это обстоятельство оправдывает выделение регулярных расширений среди других возможных расширений E_0 -полугруппы $\{\alpha_t\}_{t \geq 0}$ до полугруппы на $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

5. Примеры регулярных полугрупп. Прежде всего отметим, что любая E_0 -полугруппа $\{\alpha_t\}_{t \geq 0}$ на факторе $\mathcal{M}$ типа I является регулярной, поскольку у такой полугруппы всегда есть регулярное расширение $\{\theta_t\}_{t \geq 0}$ (замечание 3). Действительно, в этом случае существует изоморфизм между $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $\mathcal{M} \bar{\otimes} \mathcal{M}'$ [5], и регулярное расширение θ_t соответствует E_0 -полугруппе $\alpha_t \otimes \beta_t$ при этом изоморфизме.

Покажем регулярность важного класса полугрупп на факторах любого типа. В соответствии с [9] полугруппа $\{\alpha_t\}_{t \geq 0}$ на факторе $\mathcal{M}$ называется *вполне совместимой* с точным нормальным состоянием $\omega(\cdot) = (\Omega, (\cdot)\Omega)$, если $\omega \circ \alpha_t = \omega$ и $\alpha_t \circ \sigma_s^\omega = \sigma_s^\omega \circ \alpha_t \forall t, s \geq 0$, где σ_s^ω – модулярная группа, ассоциированная с состоянием ω . Свойство совместимости $\omega \circ \alpha_t = \omega$ означает, что соответствие $T_t: A\Omega \mapsto \alpha_t(A)\Omega \forall A \in \mathcal{M}, \forall t \geq 0$ корректно определяет сильно непрерывную полугруппу изометрий $\{T_t\}_{t \geq 0}$ на $\mathcal{H}$ такую, что $T_t A = \alpha_t(A) T_t \forall A \in \mathcal{M}$.

Свойство $\alpha_t \circ \sigma_s^\omega = \sigma_s^\omega \circ \alpha_t \forall t, s \geq 0$ показывает (см. [10]), что полугруппа $\{T_t\}_{t \geq 0}$ коммутирует с модулярной инволюцией J , ассоциированной с вектором Ω . Следовательно, при каждом $t \geq 0$

$$T_t B = T_t J J B J J = J T_t J B J J = J \alpha_t(J B J) T_t J = J \alpha_t(J B J) J T_t = \beta_t(B) T_t \quad \forall B \in \mathcal{M}'.$$

Таким образом, $T_t \in \mathcal{E}_\alpha(t) \quad \forall t \geq 0$ и полугруппа $\{\alpha_t\}_{t \geq 0}$ регулярна в силу замечания 2 к определению 2.

Рассмотрим C^* -алгебру канонических антикоммутирующих соотношений $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ над сепарабельным гильбертовым пространством $\mathcal{H}$. Образующими $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ являются операторы рождения и уничтожения $a^*(f)$ и $a(g)$, где $f, g \in \mathcal{H}$, в антисимметричном пространстве Фока $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ с вакуумным вектором Ω (см. [11]). Фиксируем в $\mathcal{H}$ положительный оператор R , $0 < R < I$, $\ker R = \ker(I - R) = 0$, антиунитарный оператор $\mathcal{J}$ и построим представления π алгебры $\mathcal{A}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ и π_R алгебры $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{F}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{F}(\mathcal{H})$ по формуле

$$\begin{aligned}\pi(a(f \oplus 0)) &= \pi_R(a(f)) = a((1 - R)^{1/2}f) \otimes \Gamma + 1 \otimes a(R^{1/2}\mathcal{J}f), \\ \pi(a(0 \oplus f)) &= a(R^{1/2}f) \otimes \Gamma - 1 \otimes a((1 - R)^{1/2}\mathcal{J}f),\end{aligned}$$

$f \in \mathcal{H}$. Здесь Γ – унитарный оператор, полностью определенный формулой $\Gamma a(f) = -a(f)\Gamma$, $\Gamma\Omega = \Omega$, $f \in \mathcal{H}$. Определим гиперфинитные факторы $\mathcal{M}_R = \pi_R(\mathcal{A}(\mathcal{H}))''$ и $\mathcal{M}_P = \pi(\mathcal{A}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}))'' = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и рассмотрим два векторных состояния на них:

$$\begin{aligned}\omega_R(x) &= \langle \Omega \otimes \Omega, \pi_R(x)\Omega \otimes \Omega \rangle, \quad x \in \mathcal{A}(\mathcal{H} \oplus 0), \\ \omega_P(x) &= \langle \Omega \otimes \Omega, \pi(x)\Omega \otimes \Omega \rangle, \quad x \in \mathcal{A}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}).\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\omega_R(\pi(a^*(f)a(g))) &= (f, Rg), \quad f, g \in \mathcal{H}, \\ \omega_P(\pi(a^*(f)a(g))) &= (f, Pg), \quad f, g \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H},\end{aligned}$$

где

$$P = \begin{pmatrix} R & R^{1/2}(I - R)^{1/2} \\ R^{1/2}(I - R)^{1/2} & I - R \end{pmatrix}$$

– ортогональный проектор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Состояние ω_R точное, а состояние ω_P чистое и получается в ходе процедуры “очистения” [12] из ω_R . Операторы

$$b(f) = \Gamma \otimes \Gamma \pi(a(0 \oplus f)), \quad b^*(f) = \pi(a^*(0 \oplus f))\Gamma \otimes \Gamma, \quad f \in \mathcal{H},$$

порождают коммутант $\mathcal{M}'_R$, причем $b(f) = J\pi_R(a(f))J$, $f \in \mathcal{H}$, где J есть модулярная инволюция на $\mathcal{M}_R$, отвечающая точному нормальному состоянию ω_R . Пусть V и W – изометрические операторы в $\mathcal{H}$, коммутирующие с R . Рассмотрим квазисвободные эндоморфизмы α фактора $\mathcal{M}_R$ и γ коммутанта $\mathcal{M}'_R$, полученные подъемом V и W : $\alpha(\pi_R(a(f))) = \pi_R(a(Vf))$, $\gamma(b(f)) = b(Wf)$, $f \in \mathcal{H}$. Предположим, что у операторов V и W существуют минимальные унитарные дилатации V' и W' , действующие на одном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}'$, $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}'$, и найдется положительное сжатие R' в $\mathcal{H}'$ такое, что $V'R = R'V$, $W'R = R'W$ (о существовании такого R' см. в [13]). Зададим квазисвободный эндоморфизм θ C^* -алгебры, порожденной $\mathcal{M}_R$ и $\mathcal{M}'_R$, полагая $\theta|_{\mathcal{M}_R} = \alpha$, $\theta|_{\mathcal{M}'_R} = \gamma$. Для такого θ (заданного квазисвободным подъемом изометрических операторов V и W) верна

ТЕОРЕМА 4. *Эндоморфизм θ продолжается на $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ тогда и только тогда, когда выполнено условие $R'^{1/2}(I - R')^{1/2}(V' - W') \in s_2$ (где s_2 – класс операторов Гильберта–Шмидта в $\mathcal{H}'$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как доказано Араки в [14], любой квазисвободный *-автоморфизм θ' , заданный на C^* -алгебре $\pi(A(\mathcal{K}' \oplus \mathcal{K}'))$ условием

$$\theta'(\pi(a(f \oplus g))) = \pi(a(V'f \oplus W'g)), \quad f, g \in \mathcal{K}',$$

будет продолжаться на фактор $\mathcal{M}_{P'}$, отвечающий проектору

$$P' = \begin{pmatrix} R' & R'^{1/2}(I - R')^{1/2} \\ R'^{1/2}(I - R')^{1/2} & I - R' \end{pmatrix},$$

тогда и только тогда, когда

$$\begin{pmatrix} V' & 0 \\ 0 & W' \end{pmatrix} P' - P' \begin{pmatrix} V' & 0 \\ 0 & W' \end{pmatrix} \in s_2.$$

Унитарный оператор

$$\begin{pmatrix} V' & 0 \\ 0 & W' \end{pmatrix}$$

в пространстве $\mathcal{K}' \oplus \mathcal{K}'$ удовлетворяет этому условию и корректно определяет автоморфизм θ' . Автоморфизм θ' обладает свойством $\theta'(\Gamma \otimes \Gamma) = \Gamma \otimes \Gamma$, так что $\theta'(b(f)) = b(W'f)$, $f \in \mathcal{K}'$. Фактор $\mathcal{M}_P = \mathcal{B}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{M}_{P'}$ является инвариантным относительно действия θ' . Рассматривая сужение, получаем $\theta'|_{\mathcal{M}_P} = \theta$. Отметим, что в случае $V = W$ эндоморфизм θ является регулярным расширением α .

ЗАМЕЧАНИЕ 5. По поводу условия предыдущей теоремы см. также [15].

Пусть теперь $\{V_t\}_{t \geq 0} - C_0$ -полугруппа изометрических операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда семейство $\{\alpha_t\}_{t \geq 0}$ квазисвободных эндоморфизмов фактора $\mathcal{M}_R$, задаваемых при каждом $t \geq 0$ формулой $\alpha_t(\pi_R(a(f))) = \pi_R(a(V_t f))$, $f \in \mathcal{H}$, является E_0 -полугруппой. Введем расширяющееся семейство гильбертовых пространств $\{\mathcal{H}_t\}_{t \geq 0}$, вложенных в пространство $\mathcal{F}(\mathcal{H})$, где при каждом $t \geq 0$ пространство $\mathcal{H}_t$ порождается всевозможными векторами $a^\#(f_1)a^\#(f_2) \cdots a^\#(f_n)\Omega$, $f_i \in \ker V_t^*$, $1 \leq i \leq n$; здесь $a^\# = a^*$ или a . Семейство $\{\mathcal{H}_t\}_{t \geq 0}$ является СП гильбертовых пространств [3]. Введем СП $\{\mathcal{K}_t = \mathcal{H}_t \otimes \mathcal{J} \mathcal{H}_t\}_{t \geq 0}$. Пусть $\{\theta_t\}_{t \geq 0}$ есть регулярное расширение $\{\alpha_t\}_{t \geq 0}$ (построенное в [3]), а P_Ω — одномерный проектор на вектор $\Omega \otimes \Omega$; тогда

$$\mathcal{K}_t = \theta_t(P_\Omega)\mathcal{H}, \quad t \geq 0.$$

Таким образом, СП, ассоциированная с регулярным расширением, получается “удваиванием” СП, ассоциированной с исходной полугруппой. Нетрудно видеть (см. [3]), что семейство $\{\mathcal{K}_t\}_{t \geq 0}$ монотонно возрастает. В общем случае для e_0 -полугруппы $\{\gamma_t\}_{t \geq 0}$ эндоморфизмов $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ семейство $\{\mathcal{K}_t = \gamma_t(P)\mathcal{H}\}_{t \geq 0}$, где P — одномерный проектор, задает СП [7]. Однако в общем случае семейство $\{\mathcal{K}_t\}_{t \geq 0}$ не обязано быть монотонно возрастающим. Монотонное возрастание имеет место в случае совместимости полугруппы $\{\gamma_t\}_{t \geq 0}$ с векторным состоянием.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В отличие от [3], рассмотрим две E_0 -полугруппы $\{\alpha_t\}_{t \geq 0}$ и $\{\gamma_t\}_{t \geq 0}$ на факторе $\mathcal{M}_R$, определенные соответственно квазисвободным подъемом C_0 -полугрупп $\{V_t\}_{t \geq 0}$ и $\{W_t\}_{t \geq 0}$ в пространстве $\mathcal{H}$. Предположим, что у полугрупп $\{V_t\}_{t \geq 0}$ и $\{W_t\}_{t \geq 0}$ существуют минимальные унитарные дилатации $\{V'_t\}_{t \geq 0}$ и $\{W'_t\}_{t \geq 0}$, действующие на одном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}'$, $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}'$, и найдется положительное сжатие R' в $\mathcal{H}'$ такое, что $V'_t R = R' V_t$, $W'_t R = R' W_t \forall t \geq 0$. Условие

$$R'^{1/2}(I - R')^{1/2}(V'_t - W'_t) \in s_2, \quad t > 0,$$

достаточно для коциклической сопряженности $\{\alpha_t\}_{t \geq 0}$ и $\{\gamma_t\}_{t \geq 0}$ (см. [16]). Таким образом, класс всех расширений на коммутант, упомянутых в замечании 4, описывается в квазисвободном случае полугрупповым аналогом теоремы 4.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Powers R. T. Possible classification of continuous spatial semigroups of $*$ -endomorphisms of $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ // Proceedings of Symposia in Pure Math. 1996. V. 59. P. 161–173.
- [2] Powers R. T. Recent results concerning E_0 -semigroup of $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ // Operator Algebras and Quantum Field Theory / ed. S. Doplicher et al. Proc. of Conf. Dedicated to D. Kastler. Cambridge (M.A.): Int. Press, 1997. P. 515–524.
- [3] Амосов Г. Г., Булинский А. В. Индекс Пауэрса–Арвесаона для квазисвободных динамических полугрупп // Матем. заметки. 1997. Т. 62. № 6. С. 933–936.
- [4] Браттели У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика I. М.: Мир, 1982.
- [5] Kadison R., Ringrose J. Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. I. London–New York: Acad. Press, 1983; II. London–New York: Acad. Press, 1986.
- [6] Arveson W. Continuous analogues of Fock space // Mem. Amer. Math. Soc. 1989. V. 409. P. 1–66.
- [7] Bhat B. V. R. An index theory for quantum dynamical semigroup // Trans. Amer. Math. Soc. 1996. V. 348. P. 561–583.
- [8] Davies E. B. One-Parameter Semigroups. London–New York: Acad. Press, 1980.
- [9] Булинский А. В. Алгебраические K -системы и полупотоки сдвигов Пауэрса // УМН. 1996. Т. 52. № 5. С. 145–146.
- [10] Accardi L., Cecchini C. Conditional expectation in von Neumann algebras and a theorem of Takesaki // J. Funct. Anal. 1982. V. 45. P. 245–273.
- [11] Bratteli O., Robinson D. Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics II. New York: Springer-Verlag, 1981.
- [12] Powers R. T., Stormer E. Free states of canonical anticommutation relations // Commun. Math. Phys. 1970. V. 16. P. 1–33.
- [13] Evans D. Completely positive quasifree maps on the CAR algebra // Commun. Math. Phys. 1979. V. 70. P. 53–68.
- [14] Araki H. On quasifree states of CAR and Bogoliubov automorphisms // Publ. RIMS (Kyoto Univ.). 1971. V. 6. P. 385–442.
- [15] Amosov G. G. Cocycle perturbation of quasifree algebraic K -flow leads to the required asymptotic dynamics of the associated completely positive semigroup // Infin. Dimen. Anal. Quant. Prob. Rel. Topics. 2000. V. 2. № 3. P. 237–246.
- [16] Murakami T., Yamagami S. On types of quasifree representations of Clifford algebra // Publ. RIMS (Kyoto Univ.). 1995. V. 31. P. 33–44.