Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Й. Брюнинг, С. Ю. Доброхотов, М. А. Потеряхин, Об усреднении для гамильтоновых систем с одной быстрой фазой и малыми амплитудами, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 5, 660–669

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm778>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 17:03:49

УДК 517

ОБ УСРЕДНЕНИИ ДЛЯ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ БЫСТРОЙ ФАЗОЙ И МАЛЫМИ АМПЛИТУДАМИ

Й. Брюнинг, С. Ю. Доброхотов, М. А. Потеряхин

В статье рассматривается аналитическая гамильтонова система, отличающаяся малым порядком ε возмущением от интегрируемой системы. Невозмущенная интегрируемая система вырождена, причем имеется и собственное, и предельное вырождение: все переменные, кроме двух, покоятся, а на плоскости этих двух переменных имеется эллиптическая особая точка. Показано, что аналитической, $O(\varepsilon)$ -близкой к тождественной симплектической заменой переменных гамильтониан приводится к виду, который лишь экспоненциально малыми, $O(e^{-\text{const}/\varepsilon})$, членами отличается от гамильтониана, обладающего следующими свойствами: все переменные, кроме двух, меняются медленно со скоростью порядка ε , а для оставшихся двух переменных начало координат является положением равновесия, причем гамильтониан зависит только от “действия” линеаризованной около этого равновесия системы.

Библиография: 6 названий.

1. Введение. Проблема усреднения для систем с одной быстрой фазой была неоднократно рассмотрена с различных точек зрения в множестве работ. В их основе лежит известный метод усреднения Крылова–Боголюбова [1] и методы теории КАМ. Наиболее полные и законченные результаты были получены в работах Нейштадта [2], где предполагается вещественная аналитическая зависимость коэффициентов уравнений по переменным действие–угол. Однако существует большое число задач, интересных с точки зрения приложений, в которых предположение об аналитичности не имеет место в окрестности некоторых точек.

Например, рассмотрим движение заряженной частицы в малом периодическом электрическом и постоянном магнитном полях. Гамильтониан такой системы имеет вид

$$H = \frac{1}{2}((p_1 + x_2)^2 + p_2^2) + \varepsilon V(x_1, x_2).$$

Каноническая замена переменных $x_1 = Q + y_1$, $p_1 = -y_2$, $x_2 = P + y_2$, $p_2 = -Q$, $Q = \sqrt{2I} \cos \varphi$, $P = \sqrt{2I} \sin \varphi$ переводит его в

$$H = I + \varepsilon V(\sqrt{2I} \cos \varphi + y_1, \sqrt{2I} \sin \varphi + y_2).$$

Работа выполнена при частичной поддержке проекта DFG PAH 436 RUS113/572 и SFB 288.

Эта система зависит от одной быстрой фазы φ , но имеет неаналитическую зависимость от I ($\sim \sqrt{I}$) в окрестности точки $I = 0$. С математической точки зрения мера этой области мала. Тем не менее, для физических приложений именно эта область может играть наиболее важную роль. Например, в задаче квазиклассического квантования окрестность $I = 0$ соответствует так называемым нижним уровням Ландау, связанным с холловской проводимостью.

Процедура Нейштатта [2] основана на последовательной замене переменных, аналогичной методу КАМ. Цель этой работы – показать, что мы можем выбрать такое преобразование, что процедура усреднения [2] будет пригодной в окрестности точки $I = 0$, при этом переход от $I > \kappa > 0$ в $I = 0$ оказывается равномерным.

2. Постановка задачи и основные результаты. Рассмотрим гамильтониан

$$H = \mathcal{H}_0(I) + \varepsilon g_0(q, p, y_1, y_2), \quad I = \frac{p^2 + q^2}{2}, \quad (1)$$

где $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ – малый параметр, $\mathcal{H}_0$ и g_0 – вещественные аналитические функции в комплексной δ -окрестности области $D := D_{2n}\{y_1, y_2\} \times D_2^\kappa\{q, p\}$, $D_{2n} \subset \mathbb{R}^{2n}$, $D_2^\kappa = \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 \mid I < \kappa\}$. Предположим, что в D выполнены следующие условия:

$$|\mathcal{H}_0| \leq C, \quad |g_0| \leq C, \quad \left| \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial I} \right| \neq 0.$$

Как и в работах [1], [2], мы хотим показать, что для каждого $m > 0$, $m \in \mathbb{N}$, существует близкая к тождественной вещественная аналитическая каноническая замена переменных $(q, p, y_1, y_2) \rightarrow (Q, P, z_1, z_2)$, определяемая формулами

$$\begin{aligned} q &= Q + \varepsilon Q^1(Q, P, z_1, z_2, \varepsilon), & y_1 &= z_1 + \varepsilon Z_1^1(Q, P, z_1, z_2, \varepsilon), \\ p &= P + \varepsilon P^1(Q, P, z_1, z_2, \varepsilon), & y_2 &= z_2 + \varepsilon Z_2^1(Q, P, z_1, z_2, \varepsilon), \end{aligned} \quad (2)$$

где $|Q^1| + |P^1| + |Z_1^1| + |Z_2^1| \leq C$, такая, что гамильтониан (1) преобразуется в

$$H = \mathcal{H}_m\left(\frac{Q^2 + P^2}{2}, z_1, z_2, \varepsilon\right) + \varepsilon g_m(Q, P, z_1, z_2, \varepsilon), \quad (3)$$

и справедлива следующая теорема (анонсированная в [3]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть указанные выше условия выполнены в $(Q, P, z_1, z_2) \in D + \frac{1}{2}\delta$. Тогда существует интервал $(0, \varepsilon_1]$, целое число r и вещественная аналитическая каноническая замена переменных (2), которая переводит гамильтониан (1) в (3) с экспоненциально малым g :

$$|g_r| + |\nabla g_r| < c_2 \exp\left(-\frac{1}{c_1 \varepsilon}\right), \quad |Q^1| + |Z_2^1| + |P^1| + |Z_1^1| < c_3, \quad |\mathcal{H}_r - \mathcal{H}_0| < c_4 \varepsilon. \quad (4)$$

Здесь $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ и $\varepsilon_1, r, c_i, i = 1, 2, 3, 4$, – константы, зависящие от $\varepsilon_0, \delta, C, \kappa$.

3. Вспомогательные леммы. Пусть $w(I, \mu)$ и $g(q, p, \mu)$ – аналитические функции I и (q, p) соответственно и вектора параметров μ , $\partial w / \partial I \neq 0$, $I = (q^2 + p^2)/2$. Обозначим $\partial w / \partial q = q \partial w / \partial I$, $\partial w / \partial p = p \partial w / \partial I$. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial p} \frac{\partial W}{\partial q} - \frac{\partial w}{\partial q} \frac{\partial W}{\partial p} + g(q, p, \mu) = \bar{g}\left(\frac{q^2 + p^2}{2}, \mu\right), \quad (5)$$

$$\bar{g}\left(\frac{q^2 + p^2}{2}, \mu\right) = \int_0^{2\pi} g(q(\varphi, I), p(\varphi, I), \mu) d\varphi \Big|_{\substack{\varphi=\varphi(q,p) \\ I=I(q,p)}}, \quad (6)$$

$$g(q, p, \mu) = \bar{g}\left(\frac{q^2 + p^2}{2}, \mu\right) - \tilde{g}(q, p, \mu), \quad (7)$$

где $\bar{g}((q^2 + p^2)/2, \mu)$ – среднее по углу от $g(q, p, \mu)$, а через $\tilde{g}(q, p, \mu)$ обозначена оставшаяся часть g и для дальнейших вычислений нам удобно взять ее со знаком минус.

ЛЕММА 1. Уравнение (5) разрешимо и имеет аналитическое по (q, p) и параметру μ решение. Функция $W(q, p, \mu)$, заданная формулой

$$W(q, p, \mu) = \frac{1}{\partial w / \partial I} \left(\frac{1}{2} \int_0^\varphi \tilde{g}(q(\psi, I), p(\psi, I), \mu) d\psi + \frac{1}{2} \int_\pi^\varphi \tilde{g}(q(\psi, I), p(\psi, I), \mu) d\psi \right) \Big|_{\varphi=\varphi(q,p), I=I(q,p)}, \quad (8)$$

является аналитическим решением уравнения (5).

ЗАМЕЧАНИЕ. Общее решение уравнения (5) имеет вид

$$W(q, p, \mu) = \left(\frac{1}{\partial w / \partial I} \int_0^\varphi \tilde{g}(q(\psi, I), p(\psi, I), \mu) d\psi + W_0(I, \mu) \right) \Big|_{\varphi=\varphi(q,p), I=I(q,p)},$$

где $W_0(I, \mu)$ – константа интегрирования. Оно получается после применения метода [2] для переменных (q, p) . Ниже будет показано, что в окрестности точки $q = 0$, $p = 0$ указанный в формуле (8) способ выбора константы интегрирования помогает проинтегрировать уравнение (5), сохранив аналитичность решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделаем каноническую замену переменных:

$$q = \frac{u + iv}{\sqrt{2}}, \quad p = \frac{v + iu}{\sqrt{2}}.$$

Уравнение (5) примет вид

$$\left(\frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial W}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial W}{\partial v} \right) = \tilde{g}\left(\frac{u + iv}{\sqrt{2}}, \frac{v + iu}{\sqrt{2}}, \mu\right). \quad (9)$$

Теперь разложим $\tilde{g}$ в ряд Тейлора. Разложение имеет вид

$$\tilde{g}\left(\frac{u + iv}{\sqrt{2}}, \frac{v + iu}{\sqrt{2}}, \mu\right) = \sum_{k, l \in \mathbb{N}} \tilde{g}_{kl}(\mu) u^k v^l \frac{(k + l)!}{k! l!}.$$

Используя координаты (φ, ρ) : $u = \rho e^{i\varphi}$, $v = \rho e^{-i\varphi}$, мы легко интегрируем уравнение (9):

$$\begin{aligned} W &= \frac{\rho}{\partial w / \partial \rho} \left(\int_0^\varphi \tilde{g} \left(\frac{u + iv}{\sqrt{2}}, \frac{v + iu}{\sqrt{2}}, \mu \right) d\psi \right) + W_0(\rho, \mu) \\ &= \frac{\rho}{\partial w / \partial \rho} \left(\sum_{k, l \in \mathbb{N}} \tilde{g}_{kl}(\mu) \frac{u^k(\varphi, \rho) v^l(\varphi, \rho)}{i(k-l)} \frac{(k+l)!}{k!l!} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k, l \in \mathbb{N}} \tilde{g}_{kl}(\mu) \frac{|uv|^{(k+l)}}{i(k-l)} \frac{(k+l)!}{k!l!} \right) + W_0(\rho, \mu), \end{aligned} \quad (10)$$

где $W_0(\rho, \mu)$ – константа интегрирования.

Очевидно, что на нижнем пределе интегрирования может иметь место неаналитическая ($\sim (uv) = \sqrt{2}I$) зависимость от I в точке $(u = 0, v = 0)$. Но мы можем выбрать $W_0(\rho, \mu)$ таким образом, чтобы неаналитическое слагаемое пропало. Определим W_0 так:

$$\begin{aligned} W_0(\rho, \mu) &= \frac{\rho}{\partial w / \partial \rho} \left(\frac{1}{2} \int_\pi^\varphi \tilde{g}(u(\psi, \rho), v(\psi, \rho), \mu) d\psi - \frac{1}{2} \int_0^\varphi \tilde{g}(u(\psi, \rho), v(\psi, \rho), \mu) d\psi \right) \\ &= \frac{\rho}{\partial w / \partial \rho} \left(\sum_{k, l \in \mathbb{N}} \tilde{g}_{kl}(\mu) \frac{|uv|^{(k+l)}}{i(k-l)} \frac{(k+l)!}{k!l!} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Очевидно, что (11) “убивает” неаналитический член в (10), и функция W стала аналитической функцией I в точке $I = 0$. Также очевидно, что $\partial w / (\rho \partial \rho) = \partial w / \partial I$. Функция $W(q, p, \mu)$ аналитична по μ по построению: на каждом шаге параметр μ входил аналитическим образом. Следовательно, W является аналитической функцией (q, p) и параметра μ . Лемма доказана.

В доказательстве основной теоремы для построения канонического преобразования используется производящая функция.

Пусть $S(q, P, y_1, z_2, \varepsilon)$ – аналитическая функция всех своих переменных (q, P, y_1, z_2) и малого параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $(q, p, y_1, y_2) \in U$, $(Q, P, z_1, z_2) \in U - \delta$, $\delta > 0$, $U \subset \mathbb{R}^{2n+2}$; $U - \delta$ – множество точек, входящих в U вместе со своими δ -окрестностями [5]. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} Q &= q + \varepsilon \frac{\partial S(q, P, y_1, z_2, \varepsilon)}{\partial P}, & z_1 &= y_1 + \varepsilon \frac{\partial S(q, P, y_1, z_2, \varepsilon)}{\partial z_2}, \\ p &= P + \varepsilon \frac{\partial S(q, P, y_1, z_2, \varepsilon)}{\partial q}, & y_2 &= z_2 + \varepsilon \frac{\partial S(q, P, y_1, z_2, \varepsilon)}{\partial y_1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Предположим, что $\max\{|\partial S / \partial q|, |\partial S / \partial P|, |\partial S / \partial y_1|, |\partial S / \partial z_2|\} < C_U$ в области U .

Следующая лемма позволяет доказать, что введенное преобразование является заменой переменных, и построить необходимые оценки для поправок.

ЛЕММА 2. Если $\varepsilon < \delta/(2C_U(n+1))$, где n – размерность y_1 , то система (12) разрешима и решение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} q &= Q + \varepsilon Q^1(Q, P, z_1, z_2, \varepsilon), & y_1 &= z_1 + \varepsilon Z_1^1(Q, P, z_1, z_2, \varepsilon), \\ p &= P + \varepsilon P^1(Q, P, z_1, z_2, \varepsilon), & y_2 &= z_2 + \varepsilon Z_2^1(Q, P, z_1, z_2, \varepsilon), \end{aligned} \quad (13)$$

где Q^1, P^1, Z_1^1, Z_2^1 – аналитические функции в области $U - \delta \times [0, \varepsilon_0]$, причем $\max\{|Q^1|, |P^1|, |Z_1^1|, |Z_2^1|\} < C_U$ в области $U - \delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим систему (12) в виде

$$\begin{aligned} f_1(q, p, y_1, y_2; Q, P, z_1, z_2, \varepsilon) &= 0, & f_3(q, p, y_1, y_2; Q, P, z_1, z_2, \varepsilon) &= 0, \\ f_2(q, p, y_1, y_2; Q, P, z_1, z_2, \varepsilon) &= 0, & f_4(q, p, y_1, y_2; Q, P, z_1, z_2, \varepsilon) &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

и $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)$. По теореме о неявной функции система (14) разрешима относительно (Q, P, z_1, z_2) , если $\det |DF/D(q, p, y_1, y_2)| \neq 0$, и ее решение аналитично в $U - \delta \times [0, \varepsilon_0]$. В нашем случае

$$\det \left| \frac{DF}{D(q, p, y_1, y_2)} \right| = \det \begin{vmatrix} 1 + \varepsilon \frac{\partial^2 S}{\partial P \partial q} & \varepsilon \frac{\partial^2 S}{\partial P \partial y_1} \\ \varepsilon \frac{\partial^2 S}{\partial z_2 \partial q} & 1 + \varepsilon \frac{\partial^2 S}{\partial z_2 \partial y_1} \end{vmatrix},$$

$S(q, P, y_1, z_2, \varepsilon)$ – аналитическая функция ε . Используя оценки Коши для аналитических функций [4], мы получаем

$$\det \left| \frac{DF}{D(q, p, y_1, y_2)} \right| - 1 < \sum_{i=1}^{n+1} \left(\varepsilon \frac{C_U}{\delta} \right)^i \frac{(n+1)!}{(n+1-i)!} < \sum_{i=1}^{\infty} \left(\varepsilon \frac{C_U}{\delta} (n+1) \right)^i < 1. \quad (15)$$

Следовательно, если $\varepsilon < \delta/(2C_U(n+1))$, то (15) выполнено в U всегда и система разрешима в U . Однозначность решения доказывается аналогично [5]. Решение должно удовлетворять уравнениям (12) в том числе и при $\varepsilon = 0$, так что его можно представить в виде (13). Подставим решение в уравнения (12). Из уравнений для q и y_1 мы получаем следующие представления для Q^1 и Z_1^1 :

$$Q^1 = - \frac{\partial S(Q + \varepsilon Q^1, P, z_1 + \varepsilon Z_1^1, z_2, \varepsilon)}{\partial P}, \quad Z_1^1 = - \frac{\partial S(Q + \varepsilon Q^1, P, z_1 + \varepsilon Z_1^1, z_2, \varepsilon)}{\partial z_2}.$$

Следовательно, $|Q^1| < C$, $|Z_1^1| < C$. Для p и y_2 используются формулы

$$\begin{aligned} p &= P + \varepsilon \frac{\partial S(Q + \varepsilon Q^1, P, z_1 + \varepsilon Z_1^1, z_2, \varepsilon)}{\partial q} = P + \varepsilon \frac{\partial S(Q + \varepsilon Q^1, P, z_1 + \varepsilon Z_1^1, z_2, \varepsilon)}{\partial Q}, \\ y_2 &= z_2 + \varepsilon \frac{\partial S(Q + \varepsilon Q^1, P, z_1 + \varepsilon Z_1^1, z_2, \varepsilon)}{\partial y_1} = z_2 + \varepsilon \frac{\partial S(Q + \varepsilon Q^1, P, z_1 + \varepsilon Z_1^1, z_2, \varepsilon)}{\partial z_1}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$P^1 = \frac{\partial S(Q + \varepsilon Q^1, P, z_1 + \varepsilon Z_1^1, z_2, \varepsilon)}{\partial Q}, \quad Z_2^1 = \frac{\partial S(Q + \varepsilon Q^1, P, z_1 + \varepsilon Z_1^1, z_2, \varepsilon)}{\partial z_1}$$

и снова $|P^1| < C$, $|Z_2^1| < C$. Лемма доказана.

4. Доказательство основной теоремы. Мы строим нашу замену переменных как композицию последовательно определяемых канонических преобразований, дающих зависимость гамильтониана от q и p вида $(q^2 + p^2)/2$ все более высокой степени по ε .

4.1. Процедура последовательно определяемых замен переменных. Положим, что гамильтониан, получаемый после i замен переменных, имеет вид

$$H = \mathcal{H}_i \left(\frac{q^2 + p^2}{2}, y_1, y_2, \varepsilon \right) + \varepsilon g_i(q, p, y_1, y_2, \varepsilon), \quad (16)$$

$$(q, y_2, p, y_1) \in D_i, \quad D_i = D_1 - 2(i-1)K\varepsilon, \quad D + \frac{\delta}{2} \subset D_i \subset D + \delta, \quad D_1 = D + \frac{3}{4}\delta.$$

На $i+1$ шаге необходимо построить такую близкую к эквивалентной каноническую замену переменных (см. [2], [4], [5]) $(q, p, y_1, y_2) \rightarrow (Q, P, z_1, z_2)$

$$\begin{aligned} q &= Q + \varepsilon Q^1(Q, P, z_1, z_2, \varepsilon), & y_1 &= z_1 + \varepsilon Z_1^1(Q, P, z_1, z_2, \varepsilon), \\ p &= P + \varepsilon P^1(Q, P, z_1, z_2, \varepsilon), & y_2 &= z_2 + \varepsilon Z_2^1(Q, P, z_1, z_2, \varepsilon), \end{aligned} \quad (17)$$

что гамильтониан примет вид

$$\begin{aligned} H &= \mathcal{H}_{i+1} \left(\frac{Q^2 + P^2}{2}, z_1, z_2, \varepsilon \right) + \varepsilon g_{i+1}(Q, P, z_1, z_2, \varepsilon), \\ \mathcal{H}_{i+1} &= \mathcal{H}_i + \varepsilon \bar{g}_i, \quad g_{i+1} = O(\varepsilon^{i+1}), \end{aligned} \quad (18)$$

где $\mathcal{H}_{i+1}$ содержит члены порядка $i+1$ по ε , а операция “черта” определена в п. 3.

Это можно сделать с помощью производящей функции (при этом полученное преобразование сразу будет каноническим):

$$S = S(q, P, y_1, z_2, \varepsilon) = qP + y_1 z_2 + \varepsilon S^1(q, P, y_1, z_2, \varepsilon).$$

Все остальные переменные определяются через (q, P, y_1, z_2) и $S(q, P, y_1, z_2)$:

$$\begin{aligned} Q &= q + \varepsilon \frac{\partial S^1(q, P, y_1, z_2, \varepsilon)}{\partial P}, & z_1 &= y_1 + \varepsilon \frac{\partial S^1(q, P, y_1, z_2, \varepsilon)}{\partial z_2}, \\ p &= P + \varepsilon \frac{\partial S^1(q, P, y_1, z_2, \varepsilon)}{\partial q}, & y_2 &= z_2 + \varepsilon \frac{\partial S^1(q, P, y_1, z_2, \varepsilon)}{\partial y_1}. \end{aligned} \quad (19)$$

Подставим (19) в (16) и (18) и приравняем гамильтонианы в этих “смешанных” старых-новых переменных:

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}_i \left(\left(\frac{q^2 + (P + \varepsilon \frac{\partial S^1}{\partial q})^2}{2} \right), y_1, z_2 + \varepsilon \frac{\partial S^1}{\partial y_1}, \varepsilon \right) + \varepsilon g_i \left(q, P + \varepsilon \frac{\partial S^1}{\partial q}, y_1, z_2 + \varepsilon \frac{\partial S^1}{\partial y_1}, \varepsilon \right) \\ &= \mathcal{H}_i \left(\left(\frac{(q + \varepsilon \frac{\partial S^1}{\partial P})^2 + P^2}{2} \right), y_1 + \varepsilon \frac{\partial S^1}{\partial z_2}, z_2, \varepsilon \right) \\ &\quad + \varepsilon \bar{g}_i \left(\frac{(q + \varepsilon \frac{\partial S^1}{\partial P})^2 + P^2}{2}, y_1 + \varepsilon \frac{\partial S^1}{\partial z_2}, z_2, \varepsilon \right) \\ &\quad + \varepsilon g_{i+1} \left(q + \varepsilon \frac{\partial S^1}{\partial P}, P, y_1 + \varepsilon \frac{\partial S^1}{\partial z_2}, z_2, \varepsilon \right). \end{aligned}$$

Раскладывая по формуле Тейлора, выпишем члены одинакового порядка по ε и учтем, что $\partial \mathcal{H}_i / \partial y_1 = \partial \mathcal{H}_i / \partial z_2 = O(\varepsilon)$:

$$\mathcal{H}_i \left(\frac{q^2 + P^2}{2}, y_1, z_2, \varepsilon \right) = \mathcal{H}_i \left(\frac{q^2 + P^2}{2}, y_1, z_2, \varepsilon \right), \quad (20)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial P} \frac{\partial S^1}{\partial q} - \frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial q} \frac{\partial S^1}{\partial P} + g_i(q, P, y_1, z_2, \varepsilon) = \bar{g}_i \left(\frac{q^2 + P^2}{2}, y_1, z_2, \varepsilon \right). \quad (21)$$

Уравнение (21) интегрируется с помощью леммы 1: $S(q, P, y_1, z_2, \varepsilon) = W(q, P, \mu)$, где $\mu = (y_1, z_2, \varepsilon)$. Функция S является аналитической функцией всех своих переменных и малого параметра ε , и мы можем решить систему (19), используя лемму 2. Решение непрерывно и имеет непрерывные производные; следовательно, оно определяет замену переменных. Мы нашли каноническое преобразование (17). После подстановки в (16) мы получим явное выражение для $\mathcal{H}_{i+1}$ и εg_{i+1} .

4.2. Оценки. Пусть сделано r шагов. Область D_i , в которой рассматривается наш гамильтониан после i шагов, определена как $D_{i+1} = D_1 - 2(i-1)K\varepsilon$, где $D_1 = D + \frac{3}{4}\delta$, K – положительная константа, определяемая ниже.

На первом шаге легко показать, что если $(q, p, y_1, y_2) \in D_1$ и ε достаточно мало, то (17) определено и выполнены следующие условия:

$$|g_1| + |\nabla g_1| < k_1\varepsilon, \quad |Q^1 + P^1 + Z_1^1 + Z_2^1| < k_2, \quad |\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_0| < k_3\varepsilon,$$

где $\{k_i\}$ – положительные константы. Действительно, из (18) мы немедленно получаем, что $g_1 = O(\varepsilon^2)$. Все остальные неравенства следуют из определяемой ниже процедуры оценивания.

Примем индуктивную гипотезу, что при $i: 1 \leq i \leq r$, выполнены следующие оценки:

$$|\mathcal{H}_i| < 2C, \quad c < \left| \frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial I} \right| < 2C, \quad |\nabla g_i| + |g_i| < M_i, \quad M_i = \frac{k_1\varepsilon}{2^{i-1}}, \quad (22)$$

где $I = (q^2 + p^2)/2$. Теперь необходимо найти такие ε_1 и K , что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ $(Q, P, z_1, z_2) \in D_{r+1} = D_r - 2K\varepsilon$, система (17) определена с $i = r$ и (22) удовлетворяются с $i = r + 1$.

Для $\partial S^1 / \partial \varphi$ мы имеем следующие оценки из определения $\tilde{g}_i$ (7), уравнения (21) и вида решения (8):

$$\left| \frac{\partial S^1}{\partial \varphi} \right| < |\tilde{g}_i| \leq |g_i| < M_i.$$

Оценки для $\partial S^1 / \partial J$, $J = (q^2 + P^2)/2$, получаются следующим способом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S^1}{\partial J} &= \frac{\partial}{\partial J} \left(\frac{1}{\partial \mathcal{H}_i / \partial J} \left(\frac{1}{2} \int_0^\varphi \tilde{g}(\psi, J) d\psi + \frac{1}{2} \int_\pi^\varphi \tilde{g}(\psi, J) d\psi \right) \right) \\ &= -\frac{\partial^2 \mathcal{H}_i}{\partial J^2} \frac{S^1}{\partial \mathcal{H}_i / \partial J} + \frac{1}{\partial \mathcal{H}_i / \partial J} \frac{\partial}{\partial J} \left(\frac{1}{2} \int_0^\varphi \tilde{g}(\psi, J) d\psi + \frac{1}{2} \int_\pi^\varphi \tilde{g}(\psi, J) d\psi \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Мы можем оценить $\partial^2 \mathcal{H}_i / \partial J^2$:

$$\left| \frac{\partial^2 \mathcal{H}_i}{\partial J^2} \right| < \left| \frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial J^2} \right| + \varepsilon \left| \frac{\partial^2 \bar{g}_0}{\partial J^2} \right| + \varepsilon \sum_{j=1}^i \left| \frac{\partial^2 \bar{g}_j}{\partial J^2} \right|.$$

Из исходных условий мы можем утверждать, что $|\partial^2 \mathcal{H}_0 / \partial J^2| < m_1$ и $|\partial^2 \bar{g}_0 / \partial J^2| < k_4$, где $\{m_i\}$ – положительные константы и не зависят от шага i . Для $|\partial^2 \bar{g}_j / \partial J^2|$ мы используем оценки Коши для аналитических функций [4]:

$$\left| \frac{\partial^2 \bar{g}_i}{\partial J^2} \right| < \frac{M_i}{K\varepsilon}, \quad \sum_{j=1}^i \left| \frac{\partial^2 \bar{g}_j}{\partial J^2} \right| < \sum_{j=1}^i \frac{k_1 \varepsilon}{2^{j-1}} \frac{1}{K\varepsilon} < \frac{2k_1}{K}.$$

В результате мы получаем

$$\left| \frac{\partial^2 \mathcal{H}_i}{\partial J^2} \right| < m_1 + k_4 \varepsilon + \frac{2k_1}{K} \varepsilon < k_5. \quad (24)$$

Для $\partial g_i / \partial J$ мы имеем следующие оценки из (22):

$$\left| \frac{\partial g_i}{\partial J} \right| = \left| \frac{\partial \rho}{\partial J} \right| \left| \frac{\partial g_i}{\partial \rho} \right| < \frac{1}{\rho} \left(\left| \frac{\partial g_i}{\partial P} \right| + \left| \frac{\partial g_i}{\partial q} \right| \right) < \frac{1}{\rho} 2M_i,$$

где $\rho^2 = J$.

Тогда интеграл в (23) может быть оценен так:

$$\left| \frac{1}{\partial \mathcal{H}_i / \partial J} \left(\frac{1}{2} \int_0^\varphi \frac{\partial \tilde{g}(\psi, J)}{\partial J} d\psi + \frac{1}{2} \int_\pi^\varphi \frac{\partial \tilde{g}(\psi, J)}{\partial J} d\psi \right) \right| < m_2 \left(\frac{4\pi M_i}{\rho} \right) < \frac{m_3 M_i}{\rho}.$$

Выражение (23) оценивается следующим образом:

$$\left| \frac{\partial S^1}{\partial J} \right| < \left(k_5 + \frac{m_3}{\rho} \right) M_i.$$

Теперь мы имеем оценки для $\partial S^1 / \partial \varphi$ и $\partial S^1 / \partial J$ и можем получить оценки для $\partial S^1 / \partial q$ и $\partial S^1 / \partial P$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial S^1}{\partial P} \right| &= \left| \frac{\partial J}{\partial P} \frac{\partial S^1}{\partial J} + \frac{\partial \varphi}{\partial P} \frac{\partial S^1}{\partial \varphi} \right| < \rho \left(k_5 + \frac{m_3}{\rho} \right) M_i + \left| \frac{q}{q^2 + P^2} \right| |g_i| \\ &< (\rho k_5 + m_3) M_i + \left| \frac{q}{q^2 + P^2} \right| \left| \frac{\partial g_i}{\partial q} q + \frac{\partial g_i}{\partial P} P \right| \\ &< (\rho k_5 + m_3) M_i + 2M_i < m_4 M_i. \end{aligned} \quad (25)$$

Оценки для $\partial S^1 / \partial q$ получаются аналогично:

$$\left| \frac{\partial S^1}{\partial q} \right| < m_5 M_i; \quad (26)$$

$\partial S^1/\partial y_1$ и $\partial S^1/\partial z_2$ легко оцениваются путем дифференцирования g_i в определении решения для S :

$$\left| \frac{\partial S^1}{\partial y_1} \right| < m_6 M_i, \quad \left| \frac{\partial S^1}{\partial z_2} \right| < m_7 M_i. \quad (27)$$

Определим $k_6 = \max(m_4, m_5, m_6, m_7)$. Функцию g_{i+1} можно определить так:

$$\begin{aligned} |g_{i+1}| = & \left| \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}_i}{\partial P^2} \right)_\theta \left(\frac{\partial S^1}{\partial q} \right)^2 - \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}_i}{\partial q^2} \right)_\theta \left(\frac{\partial S^1}{\partial P} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial z_2} \right)_\theta \frac{\partial S^1}{\partial y_1} - \left(\frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial y_1} \right)_\theta \frac{\partial S^1}{\partial z_2} \right. \\ & \left. + \varepsilon \left(\frac{\partial g_i}{\partial P} \right)_\theta \frac{\partial S^1}{\partial q} - \varepsilon \left(\frac{\partial \bar{g}_i}{\partial q} \right)_\theta \frac{\partial S^1}{\partial P} + \varepsilon \left(\frac{\partial g_i}{\partial z_2} \right)_\theta \frac{\partial S^1}{\partial y_1} - \varepsilon \left(\frac{\partial \bar{g}_i}{\partial y_1} \right)_\theta \frac{\partial S^1}{\partial z_2} \right|, \end{aligned}$$

где $(\cdot)_\theta$ обозначает производную в средней точке. Тогда g_{i+1} оценивается через (22), (24)–(27):

$$|g_{i+1}| < \left| 2 \frac{\varepsilon k_5 k_6 M_i^2}{2} + 2\varepsilon \left(k_4 + \frac{2k_1}{K} \right) M_i + 4\varepsilon k_6 M_i^2 \right| < k_7 M_i \varepsilon.$$

Используя оценки Коши [4], мы получаем оценки для ∇g_{i+1} :

$$|\nabla g_{i+1}| < \left| 4 \frac{\varepsilon k_5 k_6 M_i^2}{2K\varepsilon} + 2\varepsilon \left(k_4 + \frac{2k_1}{K} \right) \frac{M_i}{K\varepsilon} + 8\varepsilon k_6 \frac{M_i^2}{K\varepsilon} \right| < k_8 M_i \left(\varepsilon + \frac{1}{K} \right).$$

Выбирая K достаточно большим и ε достаточно малым, мы получаем $k_7 \varepsilon < 1/4$ и $k_8(\varepsilon + 1/K) < 1/4$. Тогда

$$|g_{i+1}| + |\nabla g_{i+1}| < \frac{M_i}{2} = M_{i+1}$$

и остальные индуктивные неравенства (22) справедливы для $i = r + 1$. Таким образом, мы можем делать необходимые замены переменных с выбранными K, ε , пока D_r не пусто. После замен $r = (\delta/(4K\varepsilon)) > k_9/\varepsilon$ мы получаем

$$|g_r| + |\nabla g_r| < \frac{k_1 \varepsilon}{2^{r-1}} < c_2 \exp \left(-\frac{1}{c_1 \varepsilon} \right),$$

и неравенства (4) также выполнены.

Теорема доказана.

5. Дополнение. Когда эта работа готовилась к публикации, на конференции, посвященной 100-летию со дня рождения И. Г. Петровского, выяснилось, что аналогичные результаты были параллельно получены В. Гелфрейчем и Л. Лерманом [6].

Благодарности. Авторы выражают свою сердечную благодарность В. А. Гейлеру, К. Панкрашкину, А. И. Шафаревичу и особенно А. И. Нейштадту за полезные советы и дискуссии.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории колебаний. М.: Наука, 1974.
- [2] Нейштадт А. И. О разделении движений в системах с быстро вращающейся фазой // ПММ. 1984. Т. 48. № 2. С. 197–205.
- [3] Брюнинг Й, Доброхотов С. Ю. Глобальное квазиклассическое описание спектра двумерного магнитного оператора Шрёдингера с периодическим электрическим и сильным магнитным полями // Докл. РАН. 2001. Т. 379. № 3.
- [4] Арнольд В. А. Малые знаменатели и проблемы устойчивости в классической и небесной механике // УМН. 1963. Т. 18. № 6. С. 91–192.
- [5] Арнольд В. А. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.
- [6] Gelfreich V., Lerman L. Almost invariant elliptic manifolds in a singularly perturbed Hamiltonian system // Mathematical Physics Preprint Archive. 2001. № 01-134.

(Й. Брюнинг) Institut für Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin, Germany Поступило
(С. Ю. Доброхотов) Институт проблем механики РАН, Москва 04.04.2001
(М. А. Потеряхин) Российский научный центр “Курчатовский институт”, Москва
E-mail: bruening@spectrum.mathematik.hu-berlin.de, dobr@ipmnet.ru,
stpma@inse.kiae.ru