Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. М. Верников, Специальные элементы решетки надкоммутативных многообразий полугрупп, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 5, 670–678

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm779>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 17:41:34

УДК 512.532.2

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ РЕШЕТКИ НАДКОММУТАТИВНЫХ МНОГООБРАЗИЙ ПОЛУГРУПП

Б. М. Верников

Полностью описаны дистрибутивные, кодистрибутивные, стандартные, костандартные и нейтральные элементы решетки надкоммутативных многообразий полугрупп.
Библиография: 8 названий.

Многообразие полугрупп называется *надкоммутативным*, если оно содержит многообразие всех коммутативных полугрупп. Совокупность всех надкоммутативных многообразий полугрупп образует решетку, которую мы будем обозначать через **ОС**. Строение этой решетки дано в работе М. В. Волкова [1]. В ней показано, что решетка **ОС** разлагается в подпрямое произведение некоторой счетной серии своих интервалов, каждый из которых антиизоморфен решетке конгруэнций некоторого G -множества (напомним, что G -*множеством* называется множество, на котором действует группа, рассматриваемое как унарная алгебра).

В работе [2] нами описаны G -множества с различными ограничениями на решетку их конгруэнций (такими, как дистрибутивность, модулярность, полумодулярность, дезарговость и др.). В сочетании с результатами работы [1] это позволило нам в [3] описать надкоммутативные многообразия с теми же ограничениями на решетку их надкоммутативных подмногообразий (см. также развернутый анонс этих результатов [4]). При этом выяснилось, что сама решетка **ОС** ни одному из рассмотренных ограничений не удовлетворяет (впрочем, это легко вытекает уже из результатов работы [1]). Желание глубже понять свойства решетки **ОС** как целого естественно приводит к задаче изучения специальных элементов различного рода в решетке **ОС**. К числу наиболее часто возникающих в теории решеток типов специальных элементов относятся (ко)дистрибутивные, (ко)стандартные и нейтральные элементы. Напомним, что элемент x решетки $\langle L; \vee, \wedge \rangle$ называется *дистрибутивным*, если

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \quad \text{для всех } y, z \in L;$$

стандартным, если

$$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \quad \text{для всех } y, z \in L;$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00090, и межвузовской научной программы “Университеты России – фундаментальные исследования” Министерства общего и профессионального образования Российской Федерации, проект № 617.

нейтральным, если

$$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) \quad \text{для всех } y, z \in L.$$

Кодистрибутивные и *костандартные* элементы определяются двойственно к дистрибутивным и стандартным соответственно. Обширную информацию об элементах всех указанных типов, показывающую естественность и важность их изучения, можно найти, например, в § III.2 монографии [5]. Кратко говоря, дистрибутивные и кодистрибутивные элементы “отвечают” за гомоморфизмы решетки на свои интервалы, а нейтральные – за ее разложение в подпрямое произведение своих интервалов. Отметим еще, что всякий (ко)стандартный элемент (ко)дистрибутивен и что элемент нейтрален тогда и только тогда, когда он стандартен и костандартен одновременно (см., например, теорему III.2.5 в [5]). С другой стороны, (ко)дистрибутивный элемент не обязан быть (ко)стандартным, а (ко)стандартный – нейтральным.

Работа состоит из двух пунктов. В п. 1 изучаются (ко)дистрибутивные, (ко)стандартные и нейтральные элементы в решетках конгруэнций G -множеств. Доказываемая в этом пункте теорема 1 дает описание таких элементов для G -множеств, удовлетворяющих некоторому дополнительному условию. Основным результатом работы является доказываемая в п. 2 теорема 2. Она дает полное описание элементов пяти указанных типов в решетке **ОС**. Доказательство теоремы 2 опирается на результаты работы [1] и теорему 1.

Автор благодарит профессора М. В. Волкова за полезные обсуждения и рецензента за указание на неточность в первоначальном варианте рукописи и некоторые другие конструктивные замечания.

1. G -множества. Выше мы уже напомнили понятие G -множества. Более формально оно вводится следующим образом. Пусть A – непустое множество, G – группа, а φ – гомоморфизм из G в группу всех перестановок множества A . Каждому элементу $g \in G$ поставим в соответствие унарную операцию g^* на A , задаваемую правилом $g^*(a) = (\varphi(g))(a)$ для всякого $a \in A$. Алгебра с носителем A и множеством операций $\{g^* \mid g \in G\}$ и называется G -множеством. Некоторая первоначальная информация о G -множествах и, в частности, о их конгруэнциях имеется, например, в монографии [6].

Приведем ряд необходимых определений и обозначений. G -множество A называется *транзитивным*, если для любых двух элементов $x, y \in A$ существует $g \in G$ такой, что $g^*(x) = y$. Транзитивное G -подмножество G -множества A называется *орбитой* в A . Ясно, что любое G -множество является дизъюнктивным объединением всех своих орбит. Множество всех орбит G -множества A обозначим через $\text{Orb}(A)$. Как обычно, решетку конгруэнций на A будем обозначать через $\text{Con}(A)$, а решетку эквивалентностей на множестве X – через $\text{Eq}(X)$. Пусть $\alpha \in \text{Con}(A)$, а B и C – различные орбиты в A . Будем говорить, что

- α *изолирует орбиту* B , если из того, что $x \in B$ и $xa y$, вытекает, что $y \in B$;
- α *разделяет орбиты* B и C , если не существует элементов $x \in B$ и $y \in C$ таких, что $xa y$;
- α *связывает орбиты* B и C , если α не разделяет их, т.е. если существуют элементы $x \in B$ и $y \in C$ такие, что $xa y$;
- α *склеивает орбиты* B и C , если $xa y$ для любых элементов $x, y \in B \cup C$.

В дальнейшем нам понадобится следующая простая

ЛЕММА 1. Если конгруэнция α на G -множестве A связывает его различные орбиты B и C , то для всякого элемента $b \in B$ существует элемент $c \in C$ такой, что $b\alpha c$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию существуют элементы $x \in B$ и $y \in C$ такие, что $x\alpha y$. Пусть теперь $b \in B$. В силу транзитивности B существует элемент $g \in G$ такой, что $b = g^*(x)$. Положим $c = g^*(y)$. Тогда $c \in C$ и $b\alpha c$. Лемма доказана.

Конгруэнцию α будем называть *жадной*, если она склеивает любые две орбиты, которые она связывает. Множество всех жадных конгруэнций G -множества A обозначим через $G\text{Con}(A)$. В работе [2] показано, что $G\text{Con}(A)$ – подрешетка в $\text{Con}(A)$, и изучено строение этой подрешетки. Сформулируем эти результаты в удобном для дальнейшего виде. Для всякой конгруэнции α на A определим бинарное отношение α^* на $\text{Orb}(A)$ правилом: если $B, C \in \text{Orb}(A)$, то $B\alpha^*C$ тогда и только тогда, когда либо $B = C$, либо α связывает B и C . Очевидно, что α^* – отношение эквивалентности на $\text{Orb}(A)$.

ЛЕММА 2 [2, лемма 1.1 и предложение 1.2]. Пусть A – G -множество и $\text{Orb}(A) = \{A_i \mid i \in I\}$. Множество $G\text{Con}(A)$ является подрешеткой решетки $\text{Con}(A)$. Отображение f из $G\text{Con}(A)$ в $\text{Eq}(\text{Orb}(A)) \times \prod_{i \in I} \text{Con}(A_i)$, задаваемое правилом

$$f(\alpha) = (\alpha^*; \dots, \alpha_i, \dots),$$

где α_i есть ограничение конгруэнции $\alpha \in G\text{Con}(A)$ на орбиту A_i , является изоморфным вложением.

Пусть A – G -множество и $a \in A$. Положим

$$\text{Stab}_A(a) = \{g \in G \mid g^*(a) = a\}.$$

Ясно, что $\text{Stab}_A(a)$ – подгруппа в G . Она называется *стабилизатором элемента a в A* .

Пусть B и C – различные орбиты G -множества A , $b \in B$ и $c \in C$. Обозначим через $\rho_{b,c}$ бинарное отношение на A , заданное правилом: $x\rho_{b,c}y$ тогда и только тогда, когда либо $x = y$, либо существует $g \in G$ такой, что $\{x, y\} = \{g^*(b), g^*(c)\}$.

ЛЕММА 3. Если $\text{Stab}_A(b) = \text{Stab}_A(c)$, то $\rho_{b,c}$ – конгруэнция на A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рефлексивность, симметричность и стабильность отношения $\rho_{b,c}$ очевидны. Осталось убедиться в его транзитивности. Пусть $x\rho_{b,c}y\rho_{b,c}z$. Разумеется, можно считать, что $x \neq y$ и $y \neq z$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что существуют элементы $g_1, g_2 \in G$ такие, что $x = g_1^*(b)$, $y = g_1^*(c)$ и либо $y = g_2^*(c)$, $z = g_2^*(b)$, либо $y = g_2^*(b)$, $z = g_2^*(c)$. Однако случай, когда $y = g_2^*(b)$, невозможен, поскольку $y = g_1^*(c) \in C$, а $g_2^*(b) \in B$. Итак, $y = g_1^*(c) = g_2^*(c)$. Следовательно, $g_2^{-1}g_1 \in \text{Stab}_A(c) = \text{Stab}_A(b)$. Следовательно, $x = g_1^*(b) = g_2^*(b) = z$. В частности, $x\rho_{b,c}z$. Лемма доказана.

Пусть μ – конгруэнция G -множества A , которая связывает, но не склеивает некоторые его различные орбиты B и C . Ясно, что ограничение μ на B не является универсальным отношением. Следовательно, $(v, w) \notin \mu$ для некоторых элементов $v, w \in B$. В силу леммы 1 существует элемент $w' \in C$ такой, что $w\mu w'$.

ЛЕММА 4. Если $\text{Stab}_A(v) = \text{Stab}_A(w')$, то конгруэнция $\mu \wedge \rho_{v,w'}$ разделяет орбиты B и C .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, отметим, что в силу леммы 3 $\rho_{v,w'}$ – конгруэнция на A . Предположим, что $(x, y) \in \mu \wedge \rho_{v,w'}$ для некоторых элементов $x \in B$ и $y \in C$. Ясно, что $x \neq y$. Поскольку $(x, y) \in \rho_{v,w'}$, существует $g \in G$ такой, что $x = g^*(v)$ и $y = g^*(w')$. Учитывая, что $(x, y) \in \mu$, получаем, что $v\mu w'$. Но тогда $v\mu w$, что противоречит выбору элементов v и w . Лемма доказана.

Если μ – конгруэнция G -множества A , а X – орбита в A , то мы будем обозначать ограничение μ на X через μ_X .

Основным результатом данного пункта является

ТЕОРЕМА 1. Пусть A – нетранзитивное G -множество такое, что $\text{Stab}_A(x) = \text{Stab}_A(y)$ для любых элементов $x, y \in A$. Для произвольной конгруэнции α на A следующие условия эквивалентны:

- а) α – дистрибутивный элемент решетки $\text{Con}(A)$;
- б) α – кодистрибутивный элемент решетки $\text{Con}(A)$;
- в) α – стандартный элемент решетки $\text{Con}(A)$;
- г) α – костандартный элемент решетки $\text{Con}(A)$;
- д) α – нейтральный элемент решетки $\text{Con}(A)$;
- е) α – либо универсальное отношение, либо отношение равенства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликации $\text{е) } \Rightarrow \text{д) } \Rightarrow \text{г) } \Rightarrow \text{б) и д) } \Rightarrow \text{в) } \Rightarrow \text{а)}$ очевидны. Поэтому в доказательстве нуждаются лишь импликации $\text{а) } \Rightarrow \text{е)}$ и $\text{б) } \Rightarrow \text{е)}$. Итак, пусть α – конгруэнция на A , отличная от универсального отношения и являющаяся дистрибутивным или кодистрибутивным элементом в $\text{Con}(A)$. Надо доказать, что α – отношение равенства.

Проверим сначала, что выполнены следующие утверждения:

- А) α изолирует каждую орбиту G -множества A ;
- Б) если конгруэнция β на A связывает некоторую орбиту B с некоторой другой орбитой, то ограничение α на B содержится в ограничении β на B .

Эта проверка естественно распадается на два случая.

Случай 1. α – дистрибутивный элемент в $\text{Con}(A)$.

Прежде всего, докажем, что α – жадная конгруэнция. Предположим, что это не так. Тогда существуют различные орбиты B и C в A , которые связываются, но не склеиваются конгруэнцией α . Определим конгруэнции β и γ на A следующим образом: $v\beta w$ тогда и только тогда, когда либо $v = w$, либо $v, w \in B$ и $v\alpha w$, либо $v, w \in C$; $v\gamma w$ тогда и только тогда, когда либо $v = w$, либо $v, w \in B$, либо $v, w \in C$ и $v\alpha w$. Пусть $x, y \in B$ и $(x, y) \notin \alpha$ (такие элементы существуют, поскольку α не склеивает B и C). Ясно, что $(x, y) \in \gamma \subseteq \alpha \vee \gamma$. В силу леммы 1 существуют элементы $x', y' \in C$ такие, что $x\alpha x'$ и $y\alpha y'$. Тогда $x\alpha x'\beta y'\alpha y$, и потому $(x, y) \in \alpha \vee \beta$. Следовательно, $(x, y) \in (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$. Предположим теперь, что $(x, y) \in \alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$. Тогда существует последовательность $x_0, x_1, \dots, x_n$ элементов из A такая, что $x_0 = x$, $x_n = y$ и для всякого $i = 0, 1, \dots, n-1$ либо $x_i\alpha x_{i+1}$, либо $(x_i, x_{i+1}) \in \beta \wedge \gamma$. Пусть $x_0, x_1, \dots, x_n$ – кратчайшая последовательность с таким свойством. Предположим, что $x_0, x_1, \dots, x_{i-1} \in B \cup C$, но $x_i \notin B \cup C$ для некоторого i . Ясно, что $0 < i < n$. Из определения конгруэнций β и γ вытекает, что $x_{i-1}\alpha x_i\alpha x_{i+1}$. Но это противоречит тому, что $x_0, x_1, \dots, x_n$ – кратчайшая последовательность с указанным выше свойством. Итак, $x_0, x_1, \dots, x_n \in B \cup C$. Предположим теперь, что $x_0, x_1, \dots, x_{i-1} \in B$, но $x_i \in C$

для некоторого i . Ясно, что вновь $0 < i < n$. Поскольку конгруэнции β и γ разделяют орбиты B и C , получаем, что $x_{i-1}\alpha x_i$. Если $x_{i+1} \in B$, то по той же причине $x_i\alpha x_{i+1}$. Если же $x_{i+1} \in C$, то вновь $x_i\alpha x_{i+1}$, поскольку ограничение конгруэнции $\beta \wedge \gamma$ на C совпадает с ограничением α на C . Итак, в любом случае $x_{i-1}\alpha x_i\alpha x_{i+1}$. Это вновь противоречит тому, что $x_0, x_1, \dots, x_n$ – кратчайшая последовательность с указанным выше свойством. Таким образом, $x_0, x_1, \dots, x_n \in B$. Учитывая, что ограничение конгруэнции $\beta \wedge \gamma$ на B совпадает с ограничением α на B , получаем, что $x = x_0\alpha x_n = y$, что противоречит выбору элементов x и y . Мы показали, что $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \neq (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$ вопреки предположению о том, что α – дистрибутивный элемент решетки $\text{Con}(A)$. Следовательно, α – жадная конгруэнция.

Из леммы 2 теперь непосредственно вытекает, что эквивалентность α^* – дистрибутивный элемент решетки $\text{Eq}(\text{Orb}(A))$. Хорошо известно и легко проверяется, что отношение эквивалентности на произвольном множестве не содержит ни дистрибутивных, ни кодистрибутивных элементов, отличных от универсального отношения и отношения равенства. Ясно, что α^* не является универсальным отношением на $\text{Orb}(A)$, так как в противном случае из жадности α вытекало бы, что α – универсальное отношение на A . Следовательно, α^* – отношение равенства на $\text{Orb}(A)$. Это означает, что выполнено утверждение А).

Осталось проверить утверждение Б). Пусть β – конгруэнция на A , которая связывает некоторую орбиту B G -множества A с некоторой другой его орбитой C . Предположим, что $\alpha_B \not\subseteq \beta_B$. Тогда существуют элементы $x, y \in B$ такие, что xy , но $(x, y) \notin \beta$. В силу леммы 1 существует элемент $y' \in C$ такой, что yy' . Положим $\gamma = \rho_{x, y'}$. По условию $\text{Stab}_A(x) = \text{Stab}_A(y')$. В силу леммы 3 γ – конгруэнция на A , а в силу леммы 4 конгруэнция $\beta \wedge \gamma$ разделяет орбиты B и C . Поскольку α изолирует каждую орбиту, конгруэнция $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$ также разделяет орбиты B и C . В частности, $(x, y') \notin \alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$. В то же время $(x, y') \in \alpha \vee \beta$, поскольку $xyyy'$, и $x\gamma y'$ по построению γ . Следовательно, $(x, y') \in (\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \subseteq (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$. Таким образом, $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \neq (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$ вопреки предположению о том, что α – дистрибутивный элемент решетки $\text{Con}(A)$. Это противоречие доказывает, что $\alpha_B \subseteq \beta_B$, что и требовалось.

Случай 2. α – кодистрибутивный элемент в $\text{Con}(A)$.

Как и при рассмотрении случая 1, проверим сначала, что α – жадная конгруэнция. Предположим противное. Тогда существуют различные орбиты B и C в A , которые связываются, но не склеиваются конгруэнцией α . Определим конгруэнцию β на A следующим образом: $v\beta w$ тогда и только тогда, когда либо $v = w$, либо $v, w \in B$ и $v\alpha w$, либо $v, w \in C$. Пусть $x, y \in B$ и $(x, y) \notin \alpha$ (такие элементы существуют, поскольку α не склеивает B и C). В силу леммы 1 существуют элементы $x', y' \in C$ такие, что xx' и yy' . Положим $\gamma = \rho_{x, y'}$. Как и в случае 1, из леммы 3 и условия теоремы вытекает, что γ – конгруэнция на A . Далее, $x\gamma y'\beta x'$, откуда $(x, x') \in \beta \vee \gamma$. Поскольку, кроме того, xx' , получаем, что $(x, x') \in \alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$. С другой стороны, из определения конгруэнции β и леммы 4 вытекает, что каждая из конгруэнций $\alpha \wedge \beta$ и $\alpha \wedge \gamma$ разделяет орбиты B и C . Учитывая, что $x \in B$, а $x' \in C$, получаем, что $(x, x') \notin (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$. Следовательно, $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \neq (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ вопреки предположению о том, что α – кодистрибутивный элемент в $\text{Con}(A)$. Следовательно, α – жадная конгруэнция. Как и в случае 1, отсюда вытекает, что выполнено утверждение А).

Остается проверить выполнение утверждения Б). Пусть β – конгруэнция на A , которая связывает некоторую орбиту B G -множества A с некоторой его другой орбитой C . Предположим, что $\alpha_B \not\subseteq \beta_B$. Тогда существуют элементы $x, y \in B$ такие, что xy , но $(x, y) \notin \beta$. Определим конгруэнцию γ на A правилом: $v\gamma w$ тогда и только тогда, когда

либо $v = w$, либо $v, w \in C$. В силу леммы 1 существуют элементы $x', y' \in C$ такие, что $x\beta x'$ и $y\beta y'$. Тогда $x\beta x'\gamma y'\beta y$ и потому $(x, y) \in \beta \vee \gamma$. Поскольку $x\alpha y$, получаем, что $(x, y) \in \alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$. Предположим, что $(x, y) \in (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$. Тогда существует последовательность $x_0, x_1, \dots, x_n$ элементов из A такая, что $x_0 = x$, $x_n = y$ и для всякого $i = 0, 1, \dots, n-1$ либо $(x_i, x_{i+1}) \in \alpha \wedge \beta$, либо $(x_i, x_{i+1}) \in \alpha \wedge \gamma$. В силу утверждения А) каждая из конгруэнций $\alpha \wedge \beta$ и $\alpha \wedge \gamma$ изолирует B . Поскольку $x_0 = x \in B$, отсюда вытекает, что $x_1, \dots, x_n \in B$. Учитывая, что ограничение конгруэнции $\alpha \wedge \gamma$ на B есть отношение равенства, получаем, что $(x, y) \in \alpha \wedge \beta$. Но это противоречит тому, что $(x, y) \notin \beta$. Итак, $(x, y) \notin (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$. Следовательно, $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \neq (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ вопреки предположению о том, что α – кодистрибутивный элемент в $\text{Con}(A)$. Следовательно, $\alpha_B \subseteq \beta_B$, что и требовалось доказать.

Итак, утверждения А) и Б) выполнены в любом случае. Проверим, что ограничение α на произвольную орбиту является отношением равенства. Этого достаточно для завершения доказательства теоремы, так как в этом случае из утверждения А) вытекает, что α – отношение равенства.

Пусть B и C – различные орбиты в A . Зафиксируем элементы $b_0 \in B$ и $c_0 \in C$. По условию $\text{Stab}_A(b_0) = \text{Stab}_A(c_0)$. Из транзитивности G -множества B вытекает, что для всякого $b \in B$ существует элемент $g_b \in G$ такой, что $b = g_b(b_0)$. Определим отображение φ из B в C правилом: если $b \in B$, то $\varphi(b) = g_b^*(c_0)$. Ясно, что φ – сюръективный гомоморфизм из B в C . Проверим, что φ взаимно однозначно. Предположим, что $\varphi(b) = \varphi(d)$ для некоторых элементов $b, d \in B$. Иными словами, $g_b^*(c_0) = g_d^*(c_0)$. Тогда $g_d^{-1}g_b \in \text{Stab}_A(c_0) = \text{Stab}_A(b_0)$. Следовательно, $d = g_d^*(b_0) = g_b^*(b_0) = b$. Итак, φ – изоморфизм из B на C .

Определим бинарное отношение β на A правилом: $x\beta y$ тогда и только тогда, когда либо $x = y$, либо $x \in B$, $y \in C$ и $y = \varphi(x)$, либо $x \in C$, $y \in B$ и $x = \varphi(y)$. Из того, что φ – изоморфизм, легко вытекает, что β – конгруэнция на A . Ясно, что она связывает орбиты B и C . В силу утверждения Б) $\alpha_B \subseteq \beta_B$. Поскольку β_B – отношение равенства, получаем, что тем же свойством обладает и α_B . Итак, ограничение α на произвольную неоднородную орбиту является отношением равенства.

Теорема доказана.

Основное ограничение, наложенное на G -множество в теореме 1 (равенство стабилизаторов любых двух элементов), является достаточно сильным. Но в рамках данной работы его можно считать естественным, поскольку, как мы увидим в п. 2, оно выполнено для всех G -множеств, возникающих при описании строения решетки надкоммутативных многообразий полугрупп.

2. Надкоммутативные многообразия. Мы начнем этот пункт с воспроизведения необходимых нам результатов работы [1].

Пусть F – абсолютно свободная полугруппа над счетным алфавитом $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Если $u \in F$, то множество всех букв, входящих в запись u , будем обозначать через $c(u)$, длину слова u – через $\ell(u)$, а число вхождений буквы x_i в запись u – через $\ell_i(u)$. Если $u \in F$ и $c(u) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, то через $\text{part}(u)$ мы обозначаем последовательность $(\ell_1(u), \ell_2(u), \dots, \ell_m(u))$. Символом $\equiv$ обозначается отношение равенства на F .

Напомним, что тождество $u = v$ называется *уравновешенным*, если $\ell_i(u) = \ell_i(v)$ для всякого i . Хорошо известно, что многообразие полугрупп надкоммутативно тогда и только тогда, когда оно задается только уравновешенными тождествами. Пусть

$u = v$ – уравновешенное тождество. Тогда, очевидно, $c(u) = c(v)$, $\ell(u) = \ell(v)$ и $\text{part}(u) = \text{part}(v)$. Второе из этих равенств позволяет определить *длину* уравновешенного тождества $u = v$ как длину каждого из слов u и v .

Пусть n – натуральное число и $n \geq 2$. Обозначим через $\mathcal{C}_n$ многообразие полугрупп, заданное всеми уравновешенными тождествами длины $\geq n$. Ясно, что

$$\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{M} = \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_3 \subset \dots \subset \mathcal{C}_n \subset \dots \subset \mathcal{S}\mathcal{E}\mathcal{M},$$

где $\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{M}$ – многообразие всех коммутативных полугрупп, а $\mathcal{S}\mathcal{E}\mathcal{M}$ – многообразие всех полугрупп. Пусть, далее, m – натуральное число такое, что $2 \leq m \leq n$. Обозначим через $\mathcal{C}_{n,m}$ многообразие полугрупп, заданное всеми уравновешенными тождествами длины $> n$ и всеми уравновешенными тождествами длины n , зависящими от $\leq m$ букв. Для удобства обозначений положим также $\mathcal{C}_{n,1} = \mathcal{C}_{n+1}$. Ясно, что

$$\mathcal{C}_n = \mathcal{C}_{n,n} \subset \mathcal{C}_{n,n-1} \subset \dots \subset \mathcal{C}_{n,2} \subset \mathcal{C}_{n,1} = \mathcal{C}_{n+1}.$$

Пусть, наконец, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ – разбиение числа n на m частей, т.е. последовательность $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ натуральных чисел такая, что

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = n.$$

Обозначим через $\mathcal{C}_\lambda$ подмногообразие многообразия $\mathcal{C}_{n,m-1}$, заданное внутри последнего всеми уравновешенными тождествами $u = v$ длины n такими, что $c(u) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ и $\text{part}(u) = \lambda$. Ясно, что $\mathcal{C}_{n,m} \subset \mathcal{C}_\lambda \subset \mathcal{C}_{n,m-1}$. Интервал $[\mathcal{C}_\lambda, \mathcal{C}_{n,m-1}]$ решетки **ОС** обозначим через I_λ .

Обозначим через Λ множество всех невозрастающих последовательностей натуральных чисел длины ≥ 2 . Ясно, что если λ – разбиение числа n на m частей, то $\lambda \in \Lambda$, и наоборот, если $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \Lambda$, то λ – разбиение числа $n = \sum_{i=1}^m \lambda_i$ на m частей.

ЛЕММА 5 [1, предложения 2.2 и 3.1]. *Решетка всех надкоммутативных многообразий полугрупп разлагается в подпрямое произведение интервалов вида I_λ , где λ пробегает множество Λ .*

Зафиксируем натуральные числа m и n такие, что $2 \leq m \leq n$, и разбиение $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ числа n на m частей. Через $\mathbf{S}_m$ будем обозначать симметрическую группу на множестве $\{1, 2, \dots, m\}$. Положим

$$\begin{aligned} W_\lambda &= \{u \in F \mid \ell(u) = n, c(u) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \text{ и } \text{part}(u) = \lambda\} \text{ и} \\ \mathbf{S}_\lambda &= \{\sigma \in \mathbf{S}_m \mid \lambda_i = \lambda_{\sigma(i)} \text{ для всякого } i = 1, 2, \dots, m\}. \end{aligned}$$

Ясно, что $\mathbf{S}_\lambda$ – подгруппа в $\mathbf{S}_m$. Для всякого слова $u \in W_\lambda$ и всякой перестановки $\sigma \in \mathbf{S}_\lambda$ обозначим через $\sigma^*(u)$ слово, полученное из u заменой каждого вхождения буквы x_i в u на букву $x_{\sigma(i)}$ (для всех $i = 1, 2, \dots, m$). Из определения группы $\mathbf{S}_\lambda$ непосредственно вытекает, что $\sigma^*(u) \in W_\lambda$. Очевидно, что множество W_λ с набором унарных операций $\{\sigma^* \mid \sigma \in \mathbf{S}_\lambda\}$ является $\mathbf{S}_\lambda$ -множеством.

ЛЕММА 6 [1, теорема 4.1]. Для всякого $\lambda \in \Lambda$ интервал I_λ антиизоморфен решетке конгруэнций S_λ -множества W_λ .

Ясно, что если $u \in W_\lambda$, а σ – неединичная перестановка из S_λ , то $\sigma^*(u) \neq u$ и потому $\text{Stab}_{W_\lambda}(u)$ – единичная группа, которую мы будем обозначать через E .

Основным результатом работы является

ТЕОРЕМА 2. Для надкоммутативного многообразия полугрупп $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны:

- а) $\mathcal{V}$ – дистрибутивный элемент решетки $\mathbf{OC}$;
- б) $\mathcal{V}$ – кодистрибутивный элемент решетки $\mathbf{OC}$;
- в) $\mathcal{V}$ – стандартный элемент решетки $\mathbf{OC}$;
- г) $\mathcal{V}$ – костандартный элемент решетки $\mathbf{OC}$;
- д) $\mathcal{V}$ – нейтральный элемент решетки $\mathbf{OC}$;
- е) $\mathcal{V}$ совпадает либо с многообразием всех полугрупп, либо с многообразием вида $\mathcal{C}_{n,m}$, где m и n – натуральные числа такие, что $m \leq n$ и $n \neq 1$, либо с многообразием вида $\mathcal{C}_\lambda$, где $\lambda \in \Lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация е) $\Rightarrow$ д) легко извлекается из доказательств работы [1], а импликации д) $\Rightarrow$ в) $\Rightarrow$ а) и д) $\Rightarrow$ г) $\Rightarrow$ б) очевидны. Остается доказать импликации а) $\Rightarrow$ е) и б) $\Rightarrow$ е)

Пусть $\mathcal{V}$ – надкоммутативное многообразие полугрупп, являющееся дистрибутивным или кодистрибутивным элементом решетки $\mathbf{OC}$. Вполне инвариантную конгруэнцию на полугруппе F , соответствующую многообразию $\mathcal{V}$, обозначим через ν . Ясно, что конгруэнция ν подкоммутативна, т.е. содержится во вполне инвариантной конгруэнции на F , соответствующей многообразию всех коммутативных полугрупп. Обозначим через $\mathbf{SC}$ решетку всех подкоммутативных вполне инвариантных конгруэнций на F . Ясно, что эта решетка антиизоморфна решетке $\mathbf{OC}$. В силу лемм 5 и 6 решетка $\mathbf{SC}$ изоморфна подпрямому произведению решеток вида $\text{Con}(W_\lambda)$, где λ пробегает Λ . При этом из доказательства леммы 5 (данного в [1]) видно, что проекцией на $\text{Con}(W_\lambda)$ образа конгруэнции ν при изоморфном вложении $\mathbf{SC}$ в $\prod_{\lambda \in \Lambda} \text{Con}(W_\lambda)$ является просто ограничение конгруэнции ν на W_λ . Обозначим это ограничение через ν_λ . В силу сказанного выше ν_λ является дистрибутивным или кодистрибутивным элементом решетки $\text{Con}(W_\lambda)$. Доказываемые импликации, очевидно, эквивалентны тому, что для всякого $\lambda \in \Lambda$ конгруэнция ν_λ является либо универсальным отношением, либо отношением равенства на W_λ . Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \Lambda$. Дальнейшие рассмотрения распадутся на два случая.

Случай 1. $\lambda_1 > 1$. В этом случае W_λ содержит, в частности, слова

$$u \equiv x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_m^{\lambda_m} \quad \text{и} \quad v \equiv x_1^{\lambda_1-1} x_2^{\lambda_2} \dots x_m^{\lambda_m} x_1.$$

Ясно, что $\sigma^*(u) \neq v$ для всякой перестановки $\sigma \in S_\lambda$. Следовательно, S_λ -множество W_λ нетранзитивно. Поскольку, как отмечалось перед формулировкой теоремы, стабилизаторы любых двух элементов этого S_λ -множества совпадают, остается сослаться на теорему 1.

Случай 2. $\lambda_1 = 1$. Ясно, что в этом случае $\lambda_2 = \dots = \lambda_m = 1$, $S_\lambda = S_m$ и W_λ есть транзитивное S_m -множество. Как хорошо известно (см., например, [6, лемма 4.20]), решетка конгруэнций транзитивного G -множества A изоморфна интервалу $[\text{Stab}_A(a), G]$ решетки подгрупп группы G (где a – произвольный элемент из A). Как обычно, мы будем обозначать решетку подгрупп группы G через $\text{Sub}(G)$. Как отмечалось перед

формулировкой теоремы, стабилизатор любого элемента S_λ -множества W_λ равен E . Следовательно, в рассматриваемом случае $\text{Con}(W_\lambda) \cong \text{Sub}(S_m)$. Осталось показать, что решетка $\text{Sub}(S_m)$ не содержит ни дистрибутивных, ни кодистрибутивных элементов, отличных от S_m и E . Решетка $\text{Sub}(S_2)$ вообще не содержит элементов, отличных от S_2 и E . Пусть теперь $m \geq 3$. Известно (см., например, [7, теорема 3.4.2]), что если подгруппа H группы G является дистрибутивным или кодистрибутивным элементом решетки $\text{Sub}(G)$, то H нормальна в G и имеет единственное дополнение в $\text{Sub}(G)$. Как хорошо известно, при $m \neq 4$ единственной нормальной подгруппой в $\text{Sub}(S_m)$, отличной от S_m и E , является знакопеременная группа A_m , а в S_4 таких подгрупп две — A_4 и четверная группа Клейна V_4 . Ясно, что при любом $m \geq 3$ группа S_m содержит более одной транспозиции и подгруппа, порожденная любой транспозицией, является дополнением к A_m в $\text{Sub}(S_m)$. Группа V_4 также содержит более одного дополнения в решетке $\text{Sub}(S_4)$ — таковыми являются подгруппы вида

$$\text{Stab}_4(i) = \{\sigma \in S_4 \mid \sigma(i) = i\}$$

для всех $i = 1, 2, 3, 4$. Таким образом, при любом m решетка $\text{Sub}(S_m)$ не содержит ни дистрибутивных, ни кодистрибутивных элементов, отличных от S_m и E . Следовательно, и в этом случае ν_λ — либо универсальное отношение, либо отношение равенства.

Теорема доказана.

Хорошо известно (см., например, доказательство теоремы III.2.4 в [5]), что если x — нейтральный элемент решетки L , то L разлагается в подпрямое произведение главного идеала $\langle x \rangle$ и главного фильтра $\langle x \rangle$. Теорема 2 показывает, что подпрямое разложение решетки **ОС**, найденное в [1], является наиболее дробным в том смысле, что оно использует все нейтральные элементы этой решетки.

Хорошо известно, что решетка **ОС** континуальна (см., например, [8]). В связи с этим представляет интерес непосредственно вытекающее из теоремы 2.

СЛЕДСТВИЕ. *Множество всех (ко)дистрибутивных элементов решетки **ОС** счетно.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Volkov M. V. Young diagrams and the structure of the lattice of overcommutative semigroup varieties // Transformation Semigroups. Proc. Int. Conf. held at the Univ. Essex. Colchester, 1994. P. 99–110.
- [2] Vernikov B. M. On congruences of G -sets // Comment. Math. Univ. Carol. 1997. V. 38. № 3. P. 601–611.
- [3] Vernikov B. M. Distributivity, modularity, and related conditions in lattices of overcommutative semigroup varieties // Semigroups with Applications, Including Semigroup Rings. St. Petersburg, 1999. P. 411–439.
- [4] Vernikov B. M. Quasiidentities implying modularity and related conditions in lattices of overcommutative semigroup varieties // Semigroup Forum. 1998. V. 57. № 1. P. 142–150.
- [5] Гретцер Г. Общая теория решеток. М.: Мир, 1982.
- [6] McKenzie R. N., McNulty G. F., Taylor W. F. Algebras. Lattices. Varieties. V. I. Monterey: Wadsworth & Brooks/Cole, 1987.
- [7] Schmidt R. Subgroup Lattices of Groups. Berlin: Walter de Gruyter, 1994.
- [8] Evans T. The lattice of semigroup varieties // Semigroup Forum. 1971. V. 2. № 1. P. 1–43.