Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. М. Тимофеев, М. Б. Хрипунова, О функции концентрации аддитивной функции с немультимпликативным весом, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 6, 877–894

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm78>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 14:55:39

УДК 511

О ФУНКЦИИ КОНЦЕНТРАЦИИ АДДИТИВНОЙ ФУНКЦИИ С НЕМУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ ВЕСОМ

Н. М. Тимофеев, М. Б. Хрипунова

Пусть $g(n)$ – аддитивная функция, принимающая вещественные значения, $\tau(n)$ – число делителей n . В работе доказано, что существует постоянная C такая, что

$$\sup_a \sum_{\substack{n < N \\ g(n) \in [a, a+1)}} \tau(N-n) \leq C \frac{N \log N}{\sqrt{W(N)}},$$

где

$$W(N) = 4 + \min_{\lambda} \left(\lambda^2 + \sum_{p < N} \frac{1}{p} \min(1, (g(p) - \lambda \log p)^2) \right).$$

Из этого результата, в частности, следует, что

$$\sup_a |\{m, n : mn < N, g(N-mn) = a\}| \ll N \log N \left(\sum_{p < N, g(p) \neq 0} (1/p) \right)^{-1/2}.$$

Подразумеваемая константа является абсолютной.

Библиография: 12 названий.

1. Введение и основные результаты. Пусть $g(n)$ – аддитивная функция, принимающая вещественные значения. Напомним, что функция g называется *аддитивной*, если $g(n \cdot m) = g(n) + g(m)$ для всех натуральных, взаимно простых чисел n, m и $g(0) = 0$.

В 1980 году Ружа [1] доказал следующий результат.

ТЕОРЕМА А. *Существует абсолютная постоянная такая, что для любой аддитивной функции справедливо неравенство*

$$\frac{1}{x} \sup_a |\{n : n \leq x, a \leq g(n) < a+1\}| \leq \frac{c}{\sqrt{W(x)}},$$

где

$$W(x) = 4 + \min_{\lambda} \left(\lambda^2 + \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \min(1, (g(p) - \lambda \log p)^2) \right).$$

Это неравенство оказалось очень полезным для изучения других интегральных и локальных характеристик аддитивных функций. Например, из него легко вытекает следующий результат Халоса (см. [2]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00070.

ТЕОРЕМА В. Существует абсолютная постоянная такая, что для любой аддитивной функции

$$\sup_a \frac{1}{x} |\{n : n \leq x, g(n) = a\}| \leq \frac{C}{E(x)},$$

где

$$E(x) = 4 + \sum_{\substack{p \leq x \\ g(p) \neq 0}} \frac{1}{p}.$$

В [3] Тимофеев доказал следующий аналог неравенства Ружи для множества сдвинутых простых чисел.

ТЕОРЕМА С. Пусть $b \neq 0$ – целое, фиксированное число, p – простое число. Существует постоянная C , зависящая только от b , такая, что

$$\sup_a \frac{1}{\pi(x)} |\{p : p + b \leq x, a \leq g(p + b) < a + 1\}| \leq \frac{C \log^2 W(x)}{\sqrt{W(x)}}. \quad (1)$$

Этот результат позволил перенести на множество сдвинутых простых чисел аналог неравенства типа Халоса и теоремы о сходимости последовательности функций распределения

$$\frac{1}{\pi(x)} |\{p : p + b \leq x, g(p + b) - A(x) < uB(x)\}|$$

к предельной функции $F(u)$ во всех точках непрерывности последней.

В 1994 году Эллиот [4] показал, что неравенство (1) справедливо без множителя $\log^2 W(x)$. В таком виде неравенство (1), как и неравенство Ружи, точны по порядку. Это означает, что существуют аддитивные функции, для которых левая часть соотношения (1) не меньше, чем $C_1(W(x))^{-1/2}$, где $C_1 > 0$. В работе [4] Эллиот доказал также следующий результат.

ТЕОРЕМА D. Существует абсолютная постоянная такая, что для всех аддитивных функций при $N \geq 3$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{\pi(N)} \sup_a |\{p : p < N, a \leq g(N - p) < a + 1\}| \leq \frac{C}{\sqrt{Y(N)}},$$

где

$$Y(N) = 4 + \min_{\lambda} \left(\lambda^2 + \sum_{\substack{p < N \\ (p, n)=1}} \min(1, |g(p) - \lambda \log p|^2) \right).$$

Используя метод работы [1], идеи и результаты работ [3], [4], здесь мы доказали следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Существует абсолютная постоянная C такая, что для любой аддитивной функции при $N \geq 2$ справедливо неравенство

$$\sup_a \sum_{\substack{n < N \\ a \leq g(n) < a+1}} \tau(N - n) \leq \frac{CN \log N}{\sqrt{W(N)}},$$

где $\tau(n)$ – число делителей n .

В теореме 1 равномерно относительно a оценено число представлений N в виде суммы $n + kl$, где n, k, l – натуральные числа, причем $a \leq g(n) < a + 1$.

Отсюда, действуя так же, как и в [1], можно вывести следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 1. Существует абсолютная постоянная такая, что для любой аддитивной функции при $N \geq 2$ справедливо неравенство

$$\sup_a \sum_{\substack{n < N \\ g(n)=a}} \tau(N-n) \leq \frac{CN \log N}{\sqrt{E(N)}}, \quad (2)$$

где

$$E(N) = 4 + \sum_{\substack{p < N \\ g(p) \neq 0}} \frac{1}{p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим при $N \geq 2$

$$\frac{1}{N \log N} \sum_{\substack{n < N \\ g(n)=a}} \tau(N-n) = A(N).$$

Для тех N , для которых $A(N) = 0$, неравенство (2) справедливо, поэтому можно считать, что $A(N) \neq 0$.

При любом $h > 0$ имеем

$$\sum_{\substack{n < N \\ a/h-1/2 \leq g(n)/h < a/h+1/2}} \tau(N-n) \geq A(N)N \log N,$$

и тогда из теоремы 1 следует существование $\lambda(h)$ такого, что

$$W(n) = 4 + \lambda^2(h) + \sum_{p < N} \frac{1}{p} \min \left(1, \left(\frac{g(n)}{h} - \lambda(h) \log p \right)^2 \right) \leq C^2 A^{-2}(N).$$

Отсюда вытекает, что $|\lambda(h)| \leq C A^{-1}(N)$. Следовательно, для тех p , для которых $g(p) \neq 0$, имеем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{g(p)}{h} - \lambda(h) \log p \right)^2 = \infty.$$

Переходя к пределу при $h \rightarrow 0$ в неравенстве

$$4 + \sum_{p < N} \frac{1}{p} \min \left(1, \left(\frac{g(p)}{h} - \lambda(h) \log p \right)^2 \right) \leq C^2 A^{-2}(N),$$

получим $E(N) \leq C^2 A^{-2}(N)$, т.е. неравенство (2).

В следствии 1 оценено число представлений N в виде суммы $n + kl$, где n, k, l – натуральные числа и $g(n) = a$. Причем полученная оценка равномерна по a и g .

Мы приведем доказательство теоремы 1 ниже. Несколько проще, чем теорема 1, доказывается

ТЕОРЕМА 2. Пусть $b \neq 0$ – целое число. Существует постоянная $C(b)$, зависящая только от b , такая, что для всех аддитивных функций при $x \geq 3$ справедливо неравенство

$$\sup_a \sum_{\substack{0 < n+b \leq x \\ a \leq g(n) < a+1}} \tau(n+b) \leq \frac{C(b)x \log x}{\sqrt{W(x)}}.$$

Отсюда, как и в предыдущем случае, вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. Существует постоянная C , зависящая только от b , такая, что для всех аддитивных функций выполнено неравенство

$$\sup_a \sum_{\substack{0 < n+b \leq x \\ g(n)=a}} \tau(n+b) \leq \frac{Cx \log x}{E(x)}. \quad (3)$$

Убедимся, что полученные результаты точны по порядку. Суммы, стоящие в правых частях неравенств (2) и (3), в случае $g(n) = \Omega(n)$, где $\Omega(n)$ – число простых делителей n с учетом их кратности, изучались соответственно в работах [5] и [6]. В работе [5] (см. теорему 3) было показано, что при $k \leq (2 - \varepsilon) \log \log x$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq x \\ \Omega(n)=k}} \tau(n-1) &= x \prod_p \left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right) \left(1 - \frac{k-1}{(p^2-p+1) \log \log x}\right) \\ &\times F\left(\frac{k}{\log \log x}\right) \frac{(\log \log x)^{k-1}}{(k-1)!} \left(1 + O_\varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt{\log \log x}}\right)\right), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$F(z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^z \left(1 - \frac{z}{p}\right)^{-1}.$$

Выберем $k = \log \log x + O(1)$. Тогда, применив формулу Стирлинга, получим, что левая часть соотношения (4) будет

$$\geq C_1 \frac{x \log x}{\sqrt{\log \log x}},$$

где $C_1 > 0$. Таким образом, мы доказали, что неравенство (3) точно по порядку. Используя теорему работы [6], точно так же можно показать, что и неравенство (2) точно по порядку.

2. Вспомогательные результаты. Будем далее обозначать через $p(n)$ и $q(n)$ наибольший и наименьший простой делитель n соответственно, $p(1) = q(1) = 1$.

ЛЕММА 1. Пусть $2 \leq r \leq x$. Тогда

$$|\{n : n \leq x, p(n) \leq r\}| \ll x \exp\left(-\frac{\log x}{2 \log r}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой леммы приведено, например, в [7, раздел 3.5, теорема 1].

Нам потребуется результат Халоса (см. [1], [2]). Мы приведем его в форме, доказанной в книге [7, гл. 4, следствие 6.3].

ЛЕММА 2. *Существует абсолютная постоянная c такая, что для любой мультипликативной функции f , $|f(n)| \leq 1$, справедливо неравенство*

$$\left| \sum_{n \leq x} f(n) \right| \leq cx \left(\exp \left(-\frac{1}{2} \min_{|t| \leq T} \sum_{p \leq x} \frac{1 - \operatorname{Re} f(p) p^{-it}}{p} \right) + \frac{1}{\sqrt{T}} \right).$$

ЛЕММА 3. *Пусть $|f(p)| \leq 1$ для всех простых чисел p . Предположим, что найдется примитивный характер модуля δ , $\delta \leq \log^2 N$, и вещественное число λ_0 , $|\lambda_0| \leq \log^2 N$, такие, что*

$$\sum_{p \leq N} \frac{1}{p} (1 - \operatorname{Re} f(p) p^{-i\lambda_0} \chi_\delta(p)) \leq \frac{1}{100} \log \log N.$$

Тогда для всех характеров Дирихле χ_d с $d \leq \log^2 N$, не порожденных χ_δ , при $|\lambda| \leq \log^2 N$ справедливо неравенство

$$\sum_{p \leq N} \frac{1}{p} (1 - \operatorname{Re} f(p) p^{-i\lambda} \chi_d(p)) \geq \frac{1}{2} \log \log N + O(1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq N} \frac{1 - \operatorname{Re} f(p) p^{-i\lambda} \chi_d(p)}{p} &\geq \sum_{\substack{p \leq N \\ p \nmid \delta}} \frac{1 - \operatorname{Re} p^{-i(\lambda - \lambda_0)} \chi_d(p) \overline{\chi_\delta(p)}}{p} \\ &\quad - \sum_{p \leq N} \frac{|1 - f(p) p^{-i\lambda_0} \chi_\delta(p)|}{p}. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$|1 - f(p) p^{-i\lambda_0} \chi_\delta(p)| \leq \sqrt{2(1 - \operatorname{Re} f(p) p^{-i\lambda_0} \chi_\delta(p))},$$

применив неравенство Коши, получим, что вторая сумма

$$\leq \left(\sum_{p \leq N} \frac{1}{p} \cdot 2 \sum_{p \leq N} \frac{1 - \operatorname{Re} f(p) p^{-i\lambda_0} \chi_\delta(p)}{p} \right) \leq \frac{1}{5} \log \log N + O(1).$$

Первая сумма при $\sigma_N = 1 + 1/\log N$ равна

$$\begin{aligned} \sum_p \frac{1}{p^{\sigma_N}} - \operatorname{Re} \sum_p \frac{\chi_d(p) \overline{\chi_\delta(p)}}{p^{\sigma_N + i(\lambda - \lambda_0)}} + O\left(\sum_{p \mid \delta} \frac{1}{p}\right) + O(1) \\ = \log \zeta(\sigma_N) - \log |L(\sigma_N + i(\lambda - \lambda_0), \chi_d \overline{\chi_\delta})| + O(\log \log \log N). \end{aligned}$$

Так как $\chi_d \overline{\chi_\delta}$ – неглавный характер, используя хорошо известные результаты

$$\log \zeta(\sigma_N) = \log \log N + O(1),$$

$$|L(\sigma_N + i(\lambda - \lambda_0, \chi_d \overline{\chi_\delta})| \ll \log(d\delta(|\lambda - \lambda_0| + 2)),$$

получим утверждение леммы 3.

При доказательстве леммы 4 (см. далее) мы будем применять метод Халоса [8], в котором используются следующие оценки. Пусть f – мультипликативная функция, $|f(n)| \leq 1$,

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}.$$

Тогда при $s = \sigma + it$, $\sigma = 1 + (\log x)^{-1}$, $x \geq 2$, имеем (см., например, [9, с. 233–235])

$$\left| \frac{F(s)}{\zeta(s)} \right| \ll \exp \left(\sum_{p \leq x} \frac{|f(p) - 1|}{p} \right), \quad (5)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{F(s)}{s} \right|^2 dt \ll \frac{1}{\sigma - 1}, \quad (6)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{s} \frac{F'}{F}(s) \right|^2 dt \ll \frac{1}{\sigma - 1}. \quad (7)$$

ЛЕММА 4. Существует абсолютная постоянная $c > 0$ такая, что для любой мультипликативной функции f , $|f(n)| \leq 1$, выполняется неравенство

$$\left| \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, N)=1}} f(n) - \frac{\varphi(N)}{N} \sum_{n \leq x} f(n) \right| \leq cx \left(\sum_{d|N} \frac{1 + \log d}{d} \right)^{1/2} (\log x)^{-1/4} \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} |f(p) - 1| \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При любом $y \in [2, 2x]$ и $\sigma = 1 + (\log x)^{-1}$ имеем

$$\sum_{n \leq y} f(n) \log n \log \frac{y}{n} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} s = \sigma} \frac{y^s}{s^2} F'(s) ds + O(1).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{\substack{n \leq y \\ (n, N)=1}} f(n) \log n \log \frac{y}{n} - \frac{\varphi(N)}{N} \sum_{n \leq y} f(n) \log n \log \frac{y}{n} \right| \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^\sigma}{|s|^2} \left| \left(\sum_{d|N} \frac{\mu(d)}{d^s} \cdot \sum_n \frac{f(n)}{n^s} \right)' - \frac{\varphi(N)}{N} \left(\sum_n \frac{f(n)}{n^s} \right)' \right| dt \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^\sigma}{|s|^2} \left| \sum_{d|N} \mu(d) \left(\frac{1}{d^s} - \frac{1}{d} \right) \right| \cdot |F'(s)| dt + \frac{1}{2\pi} \sum_{d|N} \frac{\log d}{d} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^\sigma}{|s|^2} |F(s)| dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Первый интеграл разобьем на две части: $|t| \leq 1$ и $|t| > 1$. При $|t| \leq 1$ воспользуемся оценкой

$$\left| \sum_{d|N} \mu(d) \left(\frac{1}{d^s} - \frac{1}{d} \right) \right| \ll |s-1| \sum_{d|N} \frac{\log d}{d},$$

а при $|t| > 1$ левая часть будет

$$\leq 2 \sum_{d|N} \frac{1}{d}.$$

Следовательно, первый интеграл сверху оценивается так:

$$\begin{aligned} &\ll x \sum_{d|N} \frac{1 + \log d}{d} \\ &\times \left(\int_{-1}^1 \left| \frac{F'}{F}(s) \right| \cdot \left| \frac{F(s)}{\zeta(s)} \right| \cdot |\zeta(s)(s-1)| \frac{dt}{|s|^2} + \int_{|t|>1} \left| \frac{F'}{F}(s) \right| \cdot \left| \frac{F(s)}{\zeta(s)} \right| \cdot |\zeta(s)| \frac{dt}{|s|^2} \right). \end{aligned}$$

Воспользуемся (5) и известными оценками:

$$\begin{aligned} |\zeta(s)(s-1)| &= O(1) \quad \text{при } \sigma > 1, \quad |t| \leq 1, \\ \zeta(s) &= O(\log 2|t|) \quad \text{при } \sigma > 1, \quad |t| \geq 1. \end{aligned}$$

Применив неравенство Шварца и (7), получим, что оцениваемый интеграл

$$\ll x(\log x)^{1/2} \sum_{d|N} \frac{1 + \log d}{d} \exp \left(\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} |f(p) - 1| \right).$$

Для второго интеграла в правой части (8) после применения неравенства Шварца и (6) получим такую же оценку. Таким образом, имеем

$$\sum_{\substack{n \leq y \\ (n, N)=1}} f(n) \log n \log \frac{y}{n} = \frac{\varphi(N)}{N} \sum_{n \leq y} f(n) \log n \log \frac{y}{n} + O(xR(x)),$$

где

$$R(x) = \sqrt{\log x} \sum_{d|N} \frac{1}{d} (1 + \log d) \exp \left(\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} |f(p) - 1| \right).$$

Возьмем $y = x$ и $y = x(1 - \varepsilon)$, $\varepsilon = \sqrt{R(x)/\log x}$ и вычтем друг из друга вновь полученные равенства. После деления на ε находим

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ (n, N)=1}} f(n) \log n = \frac{\varphi(N)}{N} \sum_{n \leq x} f(n) \log n + O(x\sqrt{R(x)\log x}).$$

Учитывая, что

$$\sum_{n \leq x} f(n) \log n = \log x \sum_{n \leq x} f(n) + O(x),$$

отсюда получим утверждение леммы 4.

Следующая лемма доказана в работе [10].

ЛЕММА 5. Если $Q \leq x$, $f(n) \geq 0$, то

$$\sum_{k \leq Q} \max_{(a,k)=1} \left(\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{k}}} f(n) + \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{n \leq x} f(n) \right) \ll \left(\sum_{n \leq x} f^2(n) \right)^{1/2} (Q + \sqrt{x} \log^{3/2} x).$$

ЛЕММА 6. Пусть $\{a_n\}, \{b_m\}$ – последовательности комплексных чисел такие, что $a_n = 0$ при $n \leq z_1$, $b_m = 0$ при $m \leq z_2$, d_1, d_2 – натуральные числа, причем $p(d_1) \leq z$, $q(d_2) > z$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta(Q) &:= \sum_{d=d_1 d_2 \leq Q} \max_{(a,d)=1} \left| \sum_{\substack{nm \leq x \\ nm \equiv a \pmod{d}}} a_n b_m - \frac{1}{\varphi(d_2)} \sum_{\substack{nm \leq x \\ (nm, d_2)=1 \\ nm \equiv a \pmod{d_1}}} a_n b_m \right| \\ &\ll \left(\frac{1}{\log^A x} \left(\sum_{k \leq 2x} \left(\sum_{n=m=k} |a_n b_m| \right)^2 \right)^{1/2} \right. \\ &\quad + \left(\sum_{|k-x| \leq x/\log^A x} \left(\sum_{n=m=k} |a_n b_m|^2 \right) \right)^{1/2} \Big) (Q + \sqrt{x} \log^{3/2} x) \\ &\quad + (\log \log x) \max_{y \leq x} \left(\frac{1}{x} \sum_{n \leq y} |a_n|^2 \sum_{m \leq x/y} |b_m|^2 \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(Q \sqrt{x} \log \frac{x}{z_1 z_2} + \left(\frac{x}{\sqrt{z_2}} + \frac{x}{\sqrt{z_1}} \right) \log^2 Q + \frac{x}{z} (\log Q) \log \frac{x}{z_1 z_2} \right), \end{aligned}$$

где A – любая положительная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем промежуток изменения n , т.е. $(z_1, x/z_2)$, на промежутки вида

$$(U_j, U_{j+1}], \quad \text{где } U_j = 2^j z_1, \quad 0 \leq j \leq \log_2 \frac{x}{z_2 z_1} = r.$$

Последний промежуток может быть неполным. С помощью разрывного множителя

$$\int_{-\infty}^{+\infty} n^{i\alpha} \frac{\sin \alpha \log([x] + 1/2)}{\alpha} d\alpha = \begin{cases} \pi, & \text{если } n \leq x, \\ 0, & \text{если } n > x, \end{cases}$$

сделаем суммирование по n и m независимым друг от друга. В результате получим

$$\begin{aligned} \Delta(Q) &\ll \sum_{d=d_1 d_2 \leq Q} \sum_{0 \leq j \leq r} \max_{(a,d)=1} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha \log([x] + 1/2)}{\alpha} \right. \\ &\quad \times \sum_{\substack{U_j < n \leq U_{j+1} \\ (n,d)=1}} a_n n^{i\alpha} \left(\sum_{\substack{z_2 < m \leq x/U_j \\ nm \equiv a \pmod{d}}} b_m m^{i\alpha} - \frac{1}{\varphi(d_2)} \sum_{\substack{z_2 < m \leq x/U_j \\ nm \equiv a \pmod{d_1} \\ (m, d_2)=1}} b_m m^{i\alpha} \right) \Big| d\alpha. \end{aligned}$$

Промежуток интегрирования разобьем на три части:

$$|\alpha| \geq x^5, \quad (\log x)^{2A} \leq |\alpha| \leq x^5, \quad |\alpha| \leq \log^{2A} x,$$

где $A \geq 4$. Если nm не входит в

$$I = \left[x - \frac{x}{\log^A x}, x + \frac{x}{\log^A x} \right],$$

то в первом и втором интегралах воспользуемся оценкой

$$\left| \int_{|\alpha| \geq t} n^{i\alpha} \frac{\sin \alpha \log([x] + 1/2)}{\alpha} d\alpha \right| \ll \frac{1}{|t| \log((2[x] + 1)/(2n))} \ll \frac{\log^A x}{|t|}.$$

Если $nm \in I$, то эти интегралы оценим как $O(\log x)$. После применения леммы 5 получим, что эти части дадут вклад в $\Delta(Q)$, оцениваемый через

$$\begin{aligned} &\ll \left(\frac{1}{\log^A x} \left(\sum_{k \leq 2x} \left(\sum_{nm=k} |a_n b_m| \right)^2 \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{x-x/\log^A x \leq k \leq x+x/\log^A x} \left(\sum_{nm=k} |a_n b_m| \right)^2 \right)^{1/2} \right) (Q + \sqrt{x}(\log x)^{3/2}). \end{aligned} \quad (9)$$

Оставшаяся часть суммы $\Delta(Q)$ (обозначим ее через $\Delta_1(Q)$) будет оцениваться так:

$$\Delta_1(Q) \ll \log \log x \max_{\alpha} \sum_{\substack{d_1 d_2 \leq Q \\ d_2 > z}} \frac{1}{\varphi(d_1 d_2)} \sum_{\substack{\chi_{d_1} \chi_{d_2} \\ \chi_{d_2} \neq \chi_0}} \sum_{j=0}^r |S_j(\chi_{d_1 d_2})| \cdot |F_j(\chi_{d_1 d_2})|,$$

где

$$S_j(\chi_d) = \sum_{U_j < n \leq U_{j+1}} \chi_d(n) a_n n^{i\alpha}, \quad F_j(\chi_d) = \sum_{m \leq x/U_j} \chi_d(m) a_m m^{i\alpha}.$$

Перейдем к примитивным характеристам. Так как $\chi_{d_2} \neq \chi_0$ и все простые делители d_2 больше z , то модуль примитивного характера, порождающего $\chi_{d_1} \chi_{d_2}$, будет больше z . Таким образом, получим

$$\Delta_1(Q) \ll \log \log x \max_{\alpha} \sum_{0 \leq j \leq r} \sum_{1 \leq d \leq Q} \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{z < k \leq Q/d} \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi_k^*} |S_{j,d}(\chi_k^*)| \cdot |F_{j,d}(\chi_k^*)|.$$

Здесь χ_k^* – примитивный характер модуля k , а суммы $S_{j,d}, F_{j,d}$ те же, что и S_j, F_j по $(n, d) = 1$ и $(m, d) = 1$.

Разобьем промежутки $(z, Q/d]$ на промежутки вида $[2^t z, 2^{t+1} z]$, где $0 \leq t \leq T = \log_2(Q/dz)$. После применения неравенства Коши получим

$$\begin{aligned} \Delta_1(Q) &\ll \log \log x \max_{\alpha} \sum_{0 \leq j \leq r} \sum_{d \leq Q} \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{0 \leq t \leq T} \frac{1}{2^t z} \\ &\quad \times \left(\sum_{k \leq 2^{t+1} z} \frac{k}{\varphi(k)} \sum_{\chi_k^*} |S_{j,d}(\chi_k^*)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k \leq 2^{t+1} z} \frac{k}{\varphi(k)} \sum_{\chi_k^*} |F_{j,d}(\chi_k^*)|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Применив большое решето в форме Галахера (см. [11])

$$\sum_{k \leq Q} \frac{k}{\varphi(k)} \sum_{\chi_k^*} \left| \sum_{M < n \leq M+N} C_n \chi_k^*(n) \right|^2 \leq (Q^2 + \pi N) \sum_{M < n \leq M+N} |C_n|^2,$$

находим

$$\begin{aligned} \Delta_1(Q) &\ll \log \log x \sum_{0 \leq j \leq r} \sum_{d \leq Q} \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{0 \leq t \leq T} \frac{1}{2^t z} \\ &\quad \times \left(((2^t z)^2 + 2^j z_1) \sum_{n \leq 2^j z_1} |a_n|^2 \left((2^t z)^2 + \frac{x}{2^j z_1} \right) \sum_{m \leq x/(2^j z_1)} |b_m|^2 \right)^{1/2} \\ &\ll (\log \log x) \max_{y \leq x} \left(\frac{1}{x} \sum_{n \leq y} |a_n|^2 \sum_{m \leq x/y} |b_m|^2 \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(Q\sqrt{x} \log \frac{x}{z_1 z_2} + \left(\frac{x}{\sqrt{z_2}} + \frac{x}{\sqrt{z_1}} \right) \log^2 Q + \frac{x}{z} (\log Q) \log \log \frac{x}{z_1 z_2} \right). \end{aligned}$$

Учитывая (9), отсюда получим утверждение леммы 6.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Мы приведем доказательство наиболее сложного случая, т.е. оценим

$$X(N) := \sup_a \sum_{\substack{n < N \\ g(n) \in [a, a+1)}} \tau(N-n).$$

Покажем, что для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что

$$X^*(N) := \sup_a \sum_{\substack{n < N \\ (n, N)=1 \\ g(n) \in [a, a+1)}} \tau(N-n) \ll \left(\frac{\varphi(N)}{N} \right)^2 \frac{N \log N}{\sqrt{W(N, g)}}. \quad (10)$$

Напомним, что

$$W(N, g) = 4 + \min_{\lambda} \left(\lambda^2 + \sum_{p < N} \frac{1}{p} \min(1, (g(p) - \lambda \log p)^2) \right).$$

В тех местах, где аддитивная функция одна и та же, будем обозначать $W(N, g)$ через $W(N)$.

Действительно,

$$X(N) \leq \sum_{d|N} \tau(d) \sup_a \sum_{\substack{n < N/d, (n, N/d)=1 \\ g(nd) - g(d) \in [a - g(d), a - g(d) + 1)}} \tau\left(\frac{N}{d} - n\right).$$

Функция $g_d(n) = g(nd) - g(d)$ аддитивная, поэтому, используя (10), имеем

$$X(N) \ll \sum_{d|N} \tau(d) \left(\frac{\varphi(N/d)}{N/d} \right)^2 \frac{(N/d) \log(N/d)}{\sqrt{W(N/d, g_d)}}.$$

Заметим, что $g(pd) - g(d) = g(p)$, если $p \nmid d$, поэтому при $d \leq \sqrt{N}$

$$W\left(\frac{N}{d}, g_d\right) = W(N, g) + \Theta\left(\sum_{\sqrt{N} \leq p \leq N} \frac{1}{p} + \sum_{p|d} \frac{1}{p}\right),$$

где $|\Theta| \leq 1$ и

$$\frac{1}{\sqrt{W(N/d, g_d)}} - \frac{1}{\sqrt{W(N, g)}} \ll \frac{1}{\sqrt{W(N, g)}} \left(1 + \sum_{p|d} \frac{1}{p}\right).$$

Следовательно, получаем

$$\begin{aligned} X(N) &\ll \left(\frac{\varphi(N)}{N}\right)^2 N \log N \sum_{d|N} \frac{\tau(d)}{d} \left(\frac{d}{\varphi(d)}\right)^2 \left(1 + \sum_{p|d} \frac{1}{p}\right) \frac{1}{\sqrt{W(N, g)}} \\ &\quad + N \sum_{d|N} \frac{\tau(d)}{d} \log d. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что

$$\begin{aligned} &\sum_{d|N} \frac{\tau(d)}{d} \left(\frac{d}{\varphi(d)}\right)^2 \left(1 + \sum_{p|d} \frac{1}{p}\right) \\ &\ll \left(1 + \sum_{p|N} \frac{2}{(p-1)}\right) \prod_{p|N} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\tau(p^r)}{p^r} \left(\frac{p}{p-1}\right)^2\right) \ll \left(\frac{N}{\varphi(N)}\right)^2 \end{aligned}$$

и

$$\sum_{d|N} \frac{\tau(d)}{d} \log d \ll \sum_{p^r|N} \frac{(r+1) \log p^r}{p^r} \sum_{d|N} \frac{\tau(d)}{d} \ll (\log \log N)^3,$$

получим неравенство теоремы 1.

Так как $(\varphi(N)/N)^2 \gg (\log \log N)^{-2}$ и $W(N) \ll \log \log N$, то части суммы $X^*(N)$, которые равны $O(N(\log N)(\log \log N)^{-3})$, будут удовлетворять неравенству (10). Выделим части, допускающие эту оценку. Представим n в виде

$$n = n_1 n_2, \quad p(n_1) \leq z_3, \quad q(n_2) > z_3.$$

Разобьем $X^*(N)$ на четыре суммы

$$X^*(N) \leq X_1(N) + X_2(N) + X_3(N) + X_4(N). \quad (11)$$

В первой сумме $n = n_1 n_2 < N$, $n_1 \leq z_1$, во второй $n = n_1 n_2 < N$, $n_1 \geq z_4$, в третьей $n = n_1 n_2 < N$, $n_1 \leq z_4$, $n_2 \leq z_2$ и в четвертой $n = n_1 n_2 < N$, $z_1 < n_1 \leq z_4$, $z_2 < n_2$, $(n, N) = 1$, $g(n) \in [a, a+1)$. Возьмем $z_1 = \log^{11} N$, $z_3 = \exp((\log \log N)^5)$, $z_4 = \exp(12(\log \log N)^6)$, $z_2 = N z_4^{-1} \log^{-10} N$. Первая сумма будет оцениваться так:

$$\leq 2 \sum_{n_1 \leq z_1} \sum_{\substack{d \leq \sqrt{N} \\ (d, N)=1}} \sum_{\substack{n_2 \leq N/n_1 \\ n_1 n_2 \equiv N \pmod{d}}} 1.$$

Так как $z_3 \ll \sqrt[3]{N/(z_1 d)}$, то для оценки суммы по n_2 можно применить решетку Сельберга (см. [12, теорема 4.10]). Получим

$$X_1(N) \ll \frac{N}{\log z_3} \sum_{n_1 \leq z_1} \frac{1}{n_1} \sum_{d \leq \sqrt{N}} \frac{1}{\varphi(d)} \ll \frac{N \log N}{(\log \log N)^4}.$$

Для оценки второй суммы воспользуемся неравенством Коши и леммой 1. Находим

$$\begin{aligned} X_2(N) &\leq \left(\sum_{n_2 \leq N/z_4} \sum_{z_4 < n_1 \leq N/n_2} 1 \right)^{1/2} \left(\sum_{n < N} \tau^2(n) \right)^{1/2} \\ &\ll N \exp\left(-\frac{\log z_4}{4 \log z_3}\right) \log^2 N \ll N \log^{-1} N. \end{aligned}$$

Третья сумма оценивается так:

$$\begin{aligned} X_3(N) &\ll |\{n = n_1 n_2 : n_1 \leq z_4, n_2 \leq z_2\}|^{1/2} (N \log^3 N)^{1/2} \\ &\ll \sqrt{z_4 z_2 N} \log^{3/2} N \ll N \log^{-1} N. \end{aligned}$$

Возвращаясь к неравенству (11), получим

$$\begin{aligned} X^*(N) &\leq 2 \sum_{d \leq \sqrt{N}} \left| \left\{ n = n_1 n_2 : z_1 < n_1 \leq z_4, z_2 < n_2 \leq \frac{N}{n_1}, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. g(n) \in (a, a+1], n \equiv N \pmod{d} \right\} \right| + O\left(\frac{N \log N}{(\log \log N)^4}\right). \end{aligned}$$

Воспользуемся равенством

$$\int_{-1}^1 (1 - |t|) e^{itu} du = \left(\frac{\sin(u/2)}{u/2} \right)^2.$$

При $|u| \leq 1$ справедливы неравенства

$$\frac{4}{\pi^2} \leq \left(\frac{\sin(u/2)}{u/2} \right)^2 \leq 1.$$

Поэтому, оценив тривиально часть суммы по d , $Q \leq d \leq \sqrt{N}$, $Q = \sqrt{N}/\log N$, получим

$$\begin{aligned} X^*(N) &\leq 6 \sum_{d_1 \leq Q} \sum_{\substack{d_2 \leq Q/d_1 \\ (d_2, N)=1}} \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{\substack{n=n_1 n_2 < N \\ (n, N d_2)=1 \\ n \equiv N \pmod{d_1}}} \int_{-1}^1 (1 - |t|) e^{-it(a-g(n))} dt \\ &\quad + 6 \sum_{\substack{d=d_1 d_2 \leq Q \\ (d_1 d_2, N)=1}} \int_{-1}^1 (1 - |t|) \left| \sum_{\substack{z_1 < n_1 \leq z_3 \\ (n_1, N d)=1}} e^{itg(n_1)} \left(\sum_{\substack{z_2 < n_2 \leq N/n_1 \\ (n_1 n_2 \equiv N \pmod{d})}} e^{itg(n_2)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\varphi(d_2)} \sum_{z_2 < n_2 \leq N/n_1} e^{itg(n_2)} \right) \right| dt + O\left(\frac{N \log N}{(\log \log N)^4}\right). \end{aligned}$$

В первой сумме мы снова вернулись к сумме по всем n , оценив, как и ранее, дополнительные суммы. Здесь $d = d_1 d_2$, $p(d_1) \leq z$, $p(d_2) > z$, $z = (\log \log N)^{10}$. Применим лемму 6, положив в ней $A = 11$, а z_1, z_2, z — теми же, что и выше. Получим, что вторая сумма в правой части оценивается так:

$$\begin{aligned} &\ll N \log^{3/2} N (\log N)^{-11/2} \\ &\quad + \log \log N \left(\frac{\sqrt{N}}{\log N} \sqrt{N} \log \frac{N}{z_1 z_2} + \left(\frac{N}{\sqrt{z_2}} + \frac{N}{\sqrt{z_1}} \right) \log^2 N + \frac{N}{z} (\log N) \log \frac{N}{z_1 z_2} \right) \\ &\ll \frac{N \log N}{(\log \log N)^3}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\sum_{\substack{d_2 \leq Q \\ (d_2, nN)=1}} \frac{1}{\varphi(d_2)} \leq \prod_{\substack{z < p \leq N \\ p \nmid N}} \left(1 + \frac{p}{(p-1)^2} \right) \ll \prod_{\substack{p|N \\ p > z}} \frac{p-1}{p} \frac{\log N}{\log z}.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} X^*(N) &\ll \frac{\log N}{\log z} \prod_{\substack{p|N \\ p > z}} \frac{p-1}{p} \sum_{\substack{d_1 \leq Q \\ (d_1, N)=1}} \sum_{\substack{n < N \\ (n, N)=1 \\ n \equiv N \pmod{d_1}}} \int_{-1}^1 (1-|t|) e^{-ita} e^{itg(n)} dt \\ &\quad + N (\log N) (\log \log N)^{-3}. \end{aligned}$$

Часть первой суммы, в которой

$$d_1 > Q_1, \quad Q_1 = \exp(6(\log z) \log \log \log N) = \exp(60(\log \log \log N)^2),$$

будет оцениваться через

$$\ll N \sum_{Q_1 < d_1 \leq Q} \frac{1}{d_1} \ll N \sum_{0 \leq k \leq \log(Q/Q_1)} \frac{1}{2^k Q_1} |\{d_1 \leq 2^{k+1} Q_1, p(d_1) \leq z\}|.$$

Применив лемму 1, получим, что эта величина оценивается так:

$$\ll N \sum_{k \geq 0} \exp\left(-\frac{\log 2^{k+1} Q}{2 \log z}\right) \ll N (\log z) (\log \log N)^{-3}.$$

Следовательно,

$$X^*(N) \ll \frac{\log N}{\log z} \prod_{\substack{p|N \\ p > z}} \frac{p-1}{p} X_1^*(N) + N (\log N) (\log \log N)^{-3}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} X_1^*(N) &= \sum_{\substack{d_1 \leq Q_1 \\ (d_1, N)=1}} \sum_{\substack{n < N \\ (n, N)=1 \\ n \equiv 1 \pmod{d_1}}} \int_{-1}^1 (1-|t|) e^{-ita} e^{itg(n)} dt \\ &= \int_{-1}^1 \sum_{\substack{d_1 \leq Q_1 \\ (d_1, N)=1}} \frac{1}{\varphi(d_1)} \sum_{\chi_{d_1}} \bar{\chi}_{d_1}(N) \sum_{\substack{n < N \\ (n, N)=1}} e^{itg(n)} \chi_{d_1}(n) (1-|t|) e^{-ita} dt. \end{aligned}$$

Для доказательства неравенства (10) нам достаточно показать, что

$$X_1^*(N) \ll (\log z) \frac{\varphi(N)}{N} \prod_{\substack{p \leq z \\ p|N}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{N}{W(N)}. \quad (13)$$

Разобьем отрезок $[-1, 1]$ на два множества следующим образом. Для $t \in U_1$ найдутся $\lambda(t)$, $|\lambda(t)| \leq Q_2 = \exp((\log \log \log N)^3)$, и характер Дирихле χ_d , $d = d(t) \leq Q_1$, $p(d) \leq z$, такие, что

$$\sum_{p < N} \frac{1}{p} (1 - \operatorname{Re} \chi_d(p) e^{itg(p)} p^{-i\lambda}) \leq (\log \log \log N)^3 \quad (14)$$

и $U_2 = [-1, 1] \setminus U_1$. Применяя лемму 2 и учитывая, что

$$\sum_{p|N} \frac{1}{p} \leq \log \log \log N + O(1),$$

получим

$$\begin{aligned} &\int_{U_2} \sum_{\substack{d_1 \leq Q_1 \\ (d_1, N)=1}} \frac{1}{\varphi(d_1)} \sum_{\chi_{d_1}} \bar{\chi}_{d_1}(N) \sum_{\substack{n < N \\ (n, N)=1}} e^{itg(n)} \chi_{d_1}(n) (1-|t|) e^{-ita} dt \\ &\ll Q_1 N \exp\left(-\frac{1}{3}(\log \log \log N)^3\right) \ll \frac{N}{(\log \log N)^3}. \end{aligned}$$

Пусть $t \in U_1$. Тогда найдутся $d = d(t) \leq Q_1$, $\lambda = \lambda(t) \leq Q_2$ такие, что имеет место неравенство (14), и поэтому

$$\sum_{p < N} \frac{1}{p} |1 - \chi_d(p) e^{itg(p)} p^{-i\lambda}| \leq 2\sqrt{\log \log N} (\log \log \log N)^{3/2}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n < N \\ (n, N)=1}} e^{itg(n)} \chi_d(n) n^{-i\lambda} e^{i\lambda \log n} &= \sum_{\substack{n < N \\ (n, N)=1}} e^{itg(n)} \chi_d(n) n^{-i\lambda} e^{i\lambda \log N} \\ &\quad - i\lambda \int_1^N \sum_{\substack{n < u \\ (n, N)=1}} e^{itg(n)} \chi_d(n) n^{-i\lambda} e^{i\lambda \log u} \frac{du}{u}. \end{aligned}$$

Поэтому, применив лемму 4, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{n < N \\ (n, N) = 1}} e^{itg(n)} \chi_d(n) - \frac{\varphi(N)}{N} \sum_{n < N} e^{itg(n)} \chi_d(n) \\ & \ll \sqrt{\sum_{d|N} \frac{1 + \log d}{d}} \frac{1}{\sqrt[4]{\log N}} \exp(\sqrt{\log \log N} (\log \log \log N)^{3/2}) \\ & + \sqrt{\sum_{d|N} \frac{1 + \log d}{d}} \exp(\sqrt{\log \log N} (\log \log \log N)^{3/2}) \int_1^N \frac{du}{\sqrt[4]{\log u}} \\ & \ll \frac{N}{\sqrt[5]{\log N}}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались оценкой

$$\sum_{d|N} \frac{1 + \log d}{d} \ll \sum_{p^r | N} \frac{\log p^r}{p^r} \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \ll (\log \log N)^2.$$

Таким образом, в интеграле по множеству U_1 в сумме по $n < N$ условие $(n, N) = 1$ можно отбросить, поставив перед суммой множитель $\varphi(N)/N$. Возникающая при этом ошибка равна $O(Q_1 N (\log N)^{-1/5}) = O(N \log^{-1/6} N)$, т.е.

$$\begin{aligned} X_1^*(N) &= \frac{\varphi(N)}{N} \sum_{\substack{d_1 \leq Q_1 \\ (d_1, N) = 1}} \frac{1}{\varphi(d_1)} \int_{U_1} \sum_{\chi_{d_1}} \bar{\chi}_{d_1}(N) \sum_{n < N} e^{itg(n)} \chi_{d_1}(n) (1 - |t|) e^{-ita} dt \\ &+ O(N (\log \log N)^{-3}). \end{aligned} \quad (15)$$

Пусть χ_δ^* – примитивный характер, порождающий характер χ_d , с которым выполнено неравенство (14). Тогда

$$\sum_{p < N} \frac{1}{p} (1 - \operatorname{Re} \chi_\delta^*(p) f(p) p^{-i\lambda}) \leq (\log \log \log N)^3 + O(\log \log z).$$

Поэтому из леммы 3 для $t \in U_1$ следует, что для всех χ_{d_1} , $d_1 \leq Q$, $p(d_1) \leq z$, не порожденных χ_δ , при $|\lambda| \leq Q_2$ будет справедливо неравенство

$$\sum_{p < N} \frac{1}{p} (1 - \operatorname{Re} e^{-itg(p)} \chi_{d_1}(p) p^{-i\lambda}) \geq \frac{1}{2} \log \log N + O(1).$$

Применив лемму 2, получим, что в сумме по χ_{d_1} для каждого $t \in U_1$ можно оставить только слагаемые с χ_{d_1} , где χ_{d_1} порожден χ_δ^* . Таким образом,

$$\begin{aligned} X_1^*(N) &\ll \frac{\varphi(N)}{N} \sum_{\substack{p(d_1) \leq z \\ (d_1, N) = 1}} \frac{1}{\varphi(d_1)} N \int_{-1}^1 \exp\left(-\frac{1}{8} M(t)\right) dt + O(N (\log \log N)^{-3}) \\ &\ll N \frac{\varphi(N)}{N} \prod_{\substack{p \leq z \\ p|N}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \log z \int_{-1}^1 \exp\left(-\frac{1}{8} M(t)\right) dt + O(N (\log \log N)^{-3}), \end{aligned}$$

где

$$M(t) = \min_{\chi_d, \lambda} \sum_{p < N} \frac{1}{p} (1 - \operatorname{Re} e^{-itg(p)} \chi_d(p) p^{-i\lambda});$$

здесь минимум берется по всем λ , $|\lambda| \leq Q_2$, χ_d , $d \leq Q_1$, $p(d) \leq z$. Подставляя в (12), получим

$$X_1^*(N) \ll \left(\frac{\varphi(N)}{N} \right)^2 N \log N \int_{-1}^1 \exp\left(-\frac{1}{8}M(t)\right) dt + O(N \log N (\log \log N)^{-3}). \quad (16)$$

Положим

$$E_k = \{t : t \in [-1, 1], M(t) \leq k\}, \quad k = 1, 2, \dots, [9(\log \log \log N)] = K.$$

Тогда

$$\int_{-1}^1 \exp\left(-\frac{1}{8}M(t)\right) dt \ll \sum_{1 \leq k \leq K} \exp\left(-\frac{1}{8}k\right) m(E_k) + (\log \log N)^{-1}.$$

Предположим, что для всех $1 \leq k \leq K$ выполняется неравенство

$$m(E_k) \leq \frac{200k}{\sqrt{\log \log N}}.$$

Тогда мы получим, что оцениваемый интеграл равен $O((\log \log N)^{-1/2})$, и поэтому

$$X_1^*(N) \ll \left(\frac{\varphi(N)}{N} \right)^2 \frac{N \log N}{\sqrt{\log \log N}} \ll \left(\frac{\varphi(N)}{N} \right)^2 \frac{N \log N}{\sqrt{W(N)}}.$$

То есть мы получим утверждение теоремы 1.

Предположим, что найдется $1 \leq k \leq K$, для которого

$$m(E_k) > \frac{200k}{\sqrt{\log \log N}}.$$

Множество E_k симметрично относительно нуля и содержит нуль, поэтому (см., например, [1, лемма 5.3]) каждое число $t \in [-1, 1]$ представимо в виде $t_1 + t_2 + \dots + t_r$, где $t_j \in E_k$ и $r = [12/m(E_k)]$. Напомним, что для каждого $t_j \in E_k$ найдутся характер χ_{d_j} , $d_j \leq Q_1$, $p(d_j) \leq z$, и число $\lambda_j = \lambda(t_j)$, $|\lambda(t_j)| \leq Q_2$, такие, что

$$\sum_{p < N} \frac{1}{p} (1 - \operatorname{Re} e^{it_j g(p)} p^{-i\lambda_j} \chi_{d_j}(p)) \leq k.$$

Заметим, что при любом натуральном r и любых комплексных числах z_j , $|z_j| \leq 1$, справедливы неравенства

$$\begin{aligned} 1 - \operatorname{Re}(z_1 \cdots z_r) &\leq 1 - \operatorname{Re}(z_1 \cdots z_{r-1}) + |\operatorname{Im}(\operatorname{Re}(z_1 \cdots z_{r-1}))| \cdot |\operatorname{Im} z_r| + \operatorname{Re}(z_1 \cdots z_{r-1})(1 - \operatorname{Re} z_r) \\ &\leq 1 - \operatorname{Re}(z_1 \cdots z_{r-1}) + 2\sqrt{(1 - \operatorname{Re}(z_1 \cdots z_{r-1}))} \sqrt{1 - \operatorname{Re} z_r} + (1 - \operatorname{Re} z_r). \end{aligned}$$

Следовательно, по индукции получим

$$\begin{aligned}
 1 - \operatorname{Re}(z_1 \cdots z_r) &\leq (r-1)^2 \sum_{j=1}^{r-1} (1 - \operatorname{Re} z_j) \\
 &\quad + 2(r-1) \sqrt{\sum_{j=1}^{r-1} (1 - \operatorname{Re} z_j)(1 - \operatorname{Re} z_r) + (1 - \operatorname{Re} z_r)} \\
 &\leq r^2 \sum_{j=1}^r (1 - \operatorname{Re} z_j). \tag{17}
 \end{aligned}$$

Таким образом, для любого $t \in [-1, 1]$ мы имеем $t = t_1 + \cdots + t_r$, где $t_j \in E_k$, и поэтому при $\lambda = \lambda(t) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_r$, $\chi_d = \chi_{d_1} \cdots \chi_{d_r}$, $d = d(t) = [d_1, \dots, d_r]$, получим

$$\sum_{p < N} \frac{1}{p} (1 - \operatorname{Re} e^{itg(p)} p^{-i\lambda} \chi_d(p)) \leq r^2 k \leq 13^2 \frac{\log \log N}{200^2 k} \leq \frac{\log \log N}{102}. \tag{18}$$

Заметим, что $|\lambda| \leq rQ_2 \leq Q_2 \sqrt{\log \log N}$, $d = d(t) \leq Q_1^r \leq \log N$, $p(d) \leq z$. Покажем, что χ_d — главный характер. Рассмотрим любые $t_1, t_2 \in [-1, 1]$ такие, что $t_1 + t_2 \in [-1, 1]$. Покажем, что характер $\chi_\Delta = \chi_{d(t_1+t_2)} \bar{\chi}_{d(t_1)} \bar{\chi}_{d(t_2)}$ — главный. Используя неравенства (18) и (17), получим

$$\sum_{p < N} \frac{1}{p} (1 - \operatorname{Re} \chi_\Delta(p) p^{-i(\lambda(t_1+t_2) - \lambda(t_1) - \lambda(t_2))}) \leq 9 \frac{\log \log N}{100} \leq \frac{\log \log N}{10}.$$

Положим $\sigma_N = 1 + 1/\log N$. Тогда левая часть неравенства равна

$$\log \zeta(\sigma_N) - \log |L(\sigma_N + i(\lambda(t_1) + t_2) - \lambda(t_1) - \lambda(t_2)), \chi_\Delta| + O(1).$$

Если χ_Δ — неглавный характер, то

$$\zeta(\sigma_N) = \log N + O(1), \quad L(\sigma_N + it, \chi_\Delta) = O(\ln |\Delta|(|t| + 2)),$$

т.е. получим противоречие. Таким образом, χ_Δ — главный характер. Положим

$$H = \left(\prod_{p \leq z} p \right)^s, \quad \text{где } s = [\log Q_1][2\sqrt{\log \log N}].$$

Тогда модули всех характеров, о которых шла речь выше, будут делить H . Будем обозначать через $\tilde{\chi}_d$ характер по модулю H , порожденный χ_d . Тогда для любых $t_1, t_2 \in [-1, 1]$, $t_1 + t_2 \in [-1, 1]$, имеем $\tilde{\chi}_{d(t_1+t_2)} = \tilde{\chi}_{d(t_1)} \tilde{\chi}_{d(t_2)}$, и поэтому при $h = \varphi(H)$ получим $\tilde{\chi}_{d(t)} = (\tilde{\chi}_{d(t/h)})^h = \tilde{\chi}_0$, где $\tilde{\chi}_0$ — главный характер модуля H . То есть мы доказали, что $\chi_{d(t)}$ — главный характер. Учитывая, что

$$\sum_{p|d} \frac{1}{p} \ll \log \log z,$$

и неравенство (18), мы получим, что для любого $t \in [-1, 1]$ существует $\lambda = \lambda(t)$, $|\lambda(t)| \leq \log N$, такое, что

$$\sum_{p < N} \frac{1}{p} (1 - \operatorname{Re} e^{itg(p)} p^{-i\lambda}) \leq \frac{\log \log N}{100}.$$

Снова применив леммы 3 и 2 и воспользовавшись (15), получим

$$\begin{aligned} X_1^*(N) &\ll \frac{\varphi(N)}{N} \sum_{n \leq N} \left(\frac{\sin((g(n) - a)/2)}{(g(n) - a)/2} \right)^2 \sum_{(d_1, N)=1} \frac{1}{\varphi(d_1)} + \frac{N}{(\log \log N)^3} \\ &\ll \frac{\varphi(N)}{N} \prod_{\substack{p \leq z \\ p|N}} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \log z \sum_{n \leq N} \left(\frac{\sin((g(n) - a)/2)}{(g(n) - a)/2} \right)^2 + \frac{N}{(\log \log N)^3}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (12) следует оценка

$$X^*(N) \ll \left(\frac{\varphi(N)}{N} \right)^2 \log N \sup_a |\{n : n \leq N, g(n) \in [a, a+1]\}| + \frac{N}{(\log \log N)^3}.$$

Применив результат Ружи (см. [1]), мы завершим доказательство теоремы 1.

Авторы благодарят рецензента за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ruzsa I. On the concentration of additive functions // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1980. V. 36. P. 215–232.
- [2] Halasz G. On the distribution of additive arithmetic functions // Acta Arith. 1974. V. 27. P. 143–152.
- [3] Тимофеев Н. М. Гипотеза Эрдеша–Кубилюса о распределении значений аддитивных функций на последовательности сдвинутых простых чисел // Acta Arith. 1991. V. 58. № 2. P. 113–131.
- [4] Elliott P. D. T. A. The concentration function of additive functions on shifted primes // Acta Math. 1994. V. 173. P. 1–35.
- [5] Тимофеев Н. М., Хрипунова М. Б. Распределение чисел с заданным числом простых делителей в прогрессиях // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 2. С. 144–156.
- [6] Тимофеев Н. М., Хрипунова М. Б. Проблема Титчмарша с числами, имеющими заданное число простых делителей // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 4. С. 586–603.
- [7] Tenenbaum G. Introduction à la theorie analytique et probabiliste des nombres: Institut E. Cartan, 13. Université de Nancy I, 1990.
- [8] Halasz G. Über die Mittelwerte multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1968. V. 19. P. 365–403.
- [9] Elliott P. D. T. A. Probabilistic Number Theory I. Mean Value Theorems. Grundlehren Math. Wiss. V. 239. New York–Heidelberg–Berlin: Springer Verlag, 1979.
- [10] Левин В. В., Тимофеев Н. М. Распределение арифметических функций в среднем по прогрессиям (теоремы типа Виноградова–Бомбьери) // Матем. сб. 1984. Т. 125. № 4. С. 558–572.
- [11] Монтгомери Г. Мультипликативная теория чисел. М.: Мир, 1974.
- [12] Прахар К. Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967.