Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Воловиков, Об одном свойстве функций на сфере,
Матем. заметки, 2001, том 70, выпуск 5, 679–690

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm780>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 02:42:05

УДК 515.142.226

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ФУНКЦИЙ НА СФЕРЕ

А. Ю. Воловиков

Согласно гипотезе Кнастера для любой непрерывной функции $f: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ и произвольного подмножества из n точек сферы S^{n-1} найдется вращение, переводящее все эти точки подмножества на линию уровня функции f . В статье доказывается эта гипотеза в случае, когда $n = p^2$, где p – простое нечетное число, и множество точек лежит на окружности и делит ее на равные части.

Библиография: 21 название.

Введение. В работе [1] Кнастер выдвинул гипотезу, что для любого множества точек $v_1, \dots, v_k \in S^{k+m-2}$ и произвольного (непрерывного) отображения $f: S^{k+m-2} \rightarrow \mathbb{R}^m$ найдется вращение сферы $A \in SO(k+m-1)$ такое, что $f(Av_1) = \dots = f(Av_k)$.

В настоящее время известно много контрпримеров к этой гипотезе для $m > 2$ (см. [2]–[5]). Положительных результатов, связанных с гипотезой Кнастера, не так много. Некоторые из них перечисляются ниже. Обзоры по этой гипотезе см. в [3]–[7].

В этой заметке мы будем рассматривать случай $m = 1$. Гипотеза Кнастера в этом случае относится к функциям на сфере S^n , т.е. к непрерывным отображениям $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}$, и состоит в утверждении, что если заданы функция f и множество точек $v_1, \dots, v_{n+1} \in S^n$, то найдется вращение $A \in SO(n+1)$ (зависящее от множества точек и функции) такое, что $f(Av_1) = \dots = f(Av_{n+1})$. Иными словами, требуется доказать, что для любой непрерывной функции, определенной на сфере S^n , и любого множества из $n+1$ точек на сфере найдется вращение, переводящее эти $n+1$ точек на поверхность уровня функции.

Из результатов Флойда [8], показавшего, что любые три точки на двумерной сфере можно вращением поместить на линию уровня любой заданной (непрерывной) функции f , вытекает, что гипотеза Кнастера верна для $n = 2$.

Классическим результатом в случае $n > 2$ является результат Ямабэ–Юдзёбо [9], доказанный другим способом Янгом [10] и утверждающий, что множество из $n+1$ точек на n -мерной сфере, радиус векторы которых образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^{n+1}$, удовлетворяет гипотезе Кнастера.

В случае $n > 2$ все множества, для которых доказана справедливость гипотезы Кнастера, обладают той или иной степенью симметрии. Обзор результатов для множеств, обладающих $\mathbb{Z}_p^n$ -симметрией, см. в [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00304, и фонда INTAS, грант № 96-0712.

В настоящей заметке, основываясь на имеющих самостоятельный интерес усилениях результатов Манкхольма [11], мы покажем, что гипотеза Кнастера справедлива для множества из p^2 точек, лежащих на окружности в вершинах правильного p^2 -угольника, где p – нечетное простое число, а также для множества из $p^2 + 1$ точек, которое получается из описанного выше добавлением одной точки – любого конца диаметра, перпендикулярного плоскости окружности. При этом размерность сферы, на которой определена функция, меньше, чем $p^2 - 1$. Группой симметрии в этом случае будет служить циклическая группа порядка p^2 . Аналогичные результаты для группы симметрии $\mathbb{Z}_p$ рассматривались в [7], [12]–[14].

Некоторые результаты настоящей заметки анонсированы в [13] и [14].

1. G -отображения сферы в многообразии 2-реперов. Обозначим через V_n многообразие Штифеля $V_{n,2}$ ортонормированных 2-реперов в $\mathbb{R}^n$. На V_n действует окружность S^1 следующим образом. Элемент $e^{i\varphi} \in S^1$ действует на $(u, v) \in V_n$ поворотом этого репера на угол φ в плоскости векторов u, v (от u к v). Если отождествить плоскость, натянутую на векторы u, v , с комплексными числами $\mathbb{C}$, переведя u в 1 и v в $i \in \mathbb{C}$, то $e^{i\varphi}$ будет действовать умножением на $e^{i\varphi}$. Это действие является свободным. Таким образом, любая циклическая группа (как подгруппа S^1) действует свободно на V_n .

На единичной сфере $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ окружность свободно действует также умножением на $e^{i\varphi}$.

Пусть G – циклическая группа нечетного порядка. Тогда G свободно действует на S^{2n-3} и V_n . Поскольку размерность многообразия V_n равна $2n - 3$, имеется эквивариантное отображение $V_n \rightarrow S^{2n-3}$ (в силу $(2n - 3)$ -универсальности сферы S^{2n-3}).

ЛЕММА 1. *Для нечетного n имеется G -отображение $S^{2n-3} \rightarrow V_n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $E_G \rightarrow B_G$ универсальное главное G -расслоение. Можно считать, что $E_G = S^\infty$ – бесконечномерная сфера и что $(2k - 1)$ -мерный остов E_G есть сфера S^{2k-1} с указанным выше действием G . Как известно, G -отображения $S^{2n-3} \rightarrow V_n$ взаимно однозначно соответствуют сечениям расслоения $S^{2n-3} \times_G V_n$ со слоем V_n , ассоциированного с главным расслоением $S^{2n-3} \rightarrow S^{2n-3}/G$. Чтобы построить такое сечение, достаточно построить сечение расслоения $E_G \times_G V_n \rightarrow B_G$ над $(2n - 3)$ -мерным остовом. Фундаментальная группа $\pi_1(B_G) = G$ действует на гомотопических группах многообразия V_n тривиальным образом (поскольку G действует как подгруппа окружности). Поэтому препятствия к построению сечения лежат в группах $H^i(G; \pi_{i-1}(V_n))$ (с постоянной системой коэффициентов). Если n нечетно, то V_n является когомологической $(2n - 3)$ -мерной сферой по модулю p для любого простого нечетного числа p (см. [15]) и, следовательно, гомотопические группы $\pi_j(V_n)$ многообразия V_n являются 2-группами в размерностях $0 < j < 2n - 3$ (см. [15, гл. 5, § 6]). Поскольку порядок G – нечетное число, указанные выше группы когомологий тривиальны при $i \leq 2n - 3$ и, следовательно, можно построить искомое сечение над $(2n - 3)$ -мерным остовом.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Нетрудно видеть, что при четном n не существует G -отображения $S^{2n-3} \rightarrow V_n$. Действительно, предполагая противное, рассмотрим композицию этого отображения с G -отображением $V_n \rightarrow S^{2n-3}$. Тогда полученное G -отображение $S^{2n-3} \rightarrow S^{2n-3}$ должно иметь ненулевую степень. С другой стороны, V_n имеет такие

же целочисленные когомологии, что и произведение сфер $S^{n-2} \times S^{n-1}$ (см. [16, предложение 10.1]). Поэтому отображение $S^{2n-3} \rightarrow V_n$ индуцирует тривиальный гомоморфизм в когомологиях, что приводит к противоречию.

Поскольку $V_{n-1} \subset V_n$, при четном n имеется G -отображение $S^{2n-5} \rightarrow V_n$.

Далее нам будет удобно представлять действие циклической группы $G = \mathbb{Z}_q$ на $V_n = V_{n,2}$ следующим образом. Пусть T – образующая группы $G = \mathbb{Z}_q$ и $(u, v) \in V_n$. Положим $(u_{i+1}, v_{i+1}) = T^i(u, v)$, где $i = 0, \dots, q-1$. Тогда точка (u, v) однозначно соответствует q -набору точек $(u_1, \dots, u_q)$, которые являются вершинами правильного q -угольника, и G действует циклическими перестановками. Таким образом, V_n эквивариантно гомеоморфно подпространству в произведении $S^{n-1} \times \dots \times S^{n-1}$, состоящему из точек вида $(Cu_1^0, \dots, Cu_q^0)$, где $C \in SO(n)$ и $(u_1^0, \dots, u_q^0)$ – один из наборов указанного выше вида.

Будем рассматривать S^{n-1} как экватор в S^n . Пусть e – северный полюс. Если $(z_1, \dots, z_q) \in V_n = V_{n,2}$, то набор $(z_1, \dots, z_q, e)$ можно рассматривать как точку пространства $V_{n+1,3}$. Пусть $A_t \in SO(n+1)$, $t \in I = [0, 1]$, – такая непрерывная кривая, что кривая $A_t e$ вложена в S^n . Тогда, переводя $(z_1, \dots, z_q) \in V_{n,2}$ в $(A_t z_1, \dots, A_t z_q, A_t e)$, получаем вложение $V_{n,2} \times I \subset V_{n+1,3}$. Пусть $G = \mathbb{Z}_q$ действует на $V_{n+1,3}$ циклическими перестановками первых q точек в наборе, а на $V_{n,2} \times I$ действует, как на произведении $\mathbb{Z}_q$ -пространств, причем на I действие тривиально. Легко видеть, что указанное выше вложение является эквивариантным отображением.

2. Теоремы типа Борсука–Улама для пространств с действием группы $\mathbb{Z}_{p^\alpha}$. Пусть X – свободное G -пространство, где G – конечная группа, и $f: X \rightarrow Y$ – непрерывное отображение в пространство Y . Положим

$$A(f) = \{x \in X \mid f(x) = f(gx) \forall g \in G\}.$$

Скажем, что $A(f)$ *C-существенно*, если для любой гомотопии $F: X \times I \rightarrow Y$ отображения f в $A(F) \subset X \times I$ имеется компонента, соединяющая основания цилиндра (здесь I – отрезок $[0, 1]$ с тривиальным действием группы G).

Далее в этом пункте мы будем считать, что $G = \mathbb{Z}_{p^\alpha}$, где p – нечетное простое число.

Рассмотрим нечетномерную сферу S^{2n-3} со стандартным свободным действием группы G (см. выше). Пусть $f: S^{2n-3} \rightarrow \mathbb{R}^m$ – непрерывное отображение. Естественно было бы предполагать, что $A(f)$ имеет размерность, не меньшую, чем $2n - 3 - m(|G| - 1)$, поскольку $A(f)$ задается системой из $m(|G| - 1)$ уравнений. А.С. Шварц показал, что при $\alpha = 1$ это действительно так [17]. Манкхольм [11] обнаружил, что для $\alpha > 1$ это уже неверно, и нашел следующую оценку (которая, как он показал в той же работе, не является точной):

$$\begin{aligned} \dim A(f) &\geq 2n - 3 - (p^\alpha - 1)m - [m(\alpha - 1)p^\alpha - (m\alpha + 2)p^{\alpha-1} + m + 3] \\ &= 2n - 6 - \alpha m p^\alpha + (m\alpha + 2)p^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Эта же оценка справедлива и для любого свободного действия группы G на S^{2n-3} .

Основываясь на рассуждениях из работы [11], мы докажем более общее утверждение, следствие из которого нам понадобится в следующем пункте.

Пусть X – компактное метрическое свободное G -пространство и $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ – непрерывное отображение.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что существует G -отображение $S^{2n-3} \rightarrow X$ и $2n - 6 - \alpha \tau p^\alpha + (m\alpha + 2)p^{\alpha-1} \geq 0$. Тогда $A(f)$ является C -существенным и*

$$\dim A(f) \geq 2n - 6 - \alpha \tau p^\alpha + (m\alpha + 2)p^{\alpha-1}.$$

Если $F: X \times I \rightarrow \mathbb{R}^m$ – гомотопия отображения f и $h: X \times I \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная инвариантная относительно действия G функция, неотрицательная на верхнем основании и неположительная на нижнем основании, то

$$\dim A(F) \cap h^{-1}(0) \geq 2n - 6 - \alpha \tau p^\alpha + (m\alpha + 2)p^{\alpha-1}.$$

Для доказательства нам понадобится следующая лемма, в которой через $e(\zeta)$ обозначается эйлеров класс в комплексной K -теории комплексного векторного расслоения ζ .

ЛЕММА 2. *Пусть ζ – комплексное векторное расслоение над цилиндром $Z \times I$, где Z – компакт и $I = [0, 1]$, а s – некоторое его сечение над $Z \times I$. Пусть A – множество нулей сечения s . Тогда если $e(\zeta) \neq 0$, то в A имеется компонента, соединяющая основания цилиндра.*

Предположим дополнительно, что имеется комплексное векторное расслоение ζ' над $Z \times I$ комплексной размерности d такое, что $e(\zeta \oplus \zeta') \neq 0$. Тогда если $h: Z \times I \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция, неотрицательная на верхнем основании и неположительная на нижнем основании, то $\dim A \cap h^{-1}(0) \geq 2d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $A_t = A \cap Z \times \{t\}$, где $t \in [0, 1]$. Поскольку $e(\zeta) \neq 0$ и $K(Z \times I) = K(Z)$, имеем $A_t \neq \emptyset$ при любом t .

Доказательство проведем от противного. Тогда найдутся открытые множества U_0, U_1 такие, что

$$A \subset U_0 \cup U_1, \quad U_0 \cap U_1 = \emptyset, \quad Z \times \{0\} \subset U_0, \quad Z \times \{1\} \subset U_1.$$

В частности, $U_0 \cap Z \times \{1\} = \emptyset$ и $U_1 \cap Z \times \{0\} = \emptyset$. Положим $N_0 = Z \times I \setminus U_0$, $N_1 = Z \times I \setminus U_1$. Тогда $N_0 \cap N_1 \subset Z \times I \setminus A$ и $Z \times \{0\} \subset N_1$, $Z \times \{1\} \subset N_0$.

Обозначим через e_0 образ $e(\zeta)$ в $K(N_0)$. Рассмотрим отрезок последовательности Майера–Виеториса

$$K(Z \times I) \rightarrow K(N_0) \oplus K(N_1) \rightarrow K(N_0 \cap N_1).$$

Элемент $e_0 \oplus 0 \in K(N_0) \oplus K(N_1)$ переходит в нуль в группе $K(N_0 \cap N_1)$. Действительно, образ этого элемента является эйлеровым классом векторного расслоения $\zeta|_{N_0 \cap N_1}$, которое имеет ненулевое сечение (и, следовательно, его эйлеров класс тривиален), поскольку пересечение A с $N_0 \cap N_1$ пусто. Из точности последовательности Майера–Виеториса следует, что существует $\alpha \in K(Z \times I)$ такой, что его образ в $K(N_0)$ равен e_0 , а образ в $K(N_1)$ равен нулю. Поскольку $K(Z \times I) = K(Z)$ и $Z \times \{0\} \subset N_1$, мы получаем, что $\alpha = 0$. Аналогично, пользуясь тем, что $Z \times \{1\} \subset N_0$, и тем, что e_0 является образом как класса α , так и класса $e(\zeta) \neq 0$, получаем, что $\alpha \neq 0$. Полученное противоречие доказывает первое утверждение леммы.

Для доказательства второго утверждения положим $N_0 = \{h \geq 0\}$, $N_1 = \{h \leq 0\}$. Тогда $Z \times \{1\} \subset N_0$, $Z \times \{0\} \subset N_1$ и $N_0 \cap N_1 = h^{-1}(0)$. Рассуждения, приведенные

выше, показывают, что эйлеров класс ограничения расслоения $\zeta \oplus \zeta'$ на $h^{-1}(0)$ не равен нулю.

Положим $A_0 = A \cap h^{-1}(0)$. Расслоение $\zeta'|_{A_0}$ не может иметь нигде ненулевого сечения. Действительно, если бы такое сечение существовало, его можно было продолжить до сечения s' расслоения $\zeta'|_{h^{-1}(0)}$. Тогда $s \oplus s'$ – нигде ненулевое сечение расслоения $(\zeta \oplus \zeta')|_{h^{-1}(0)}$ и, следовательно, эйлеров класс этого расслоения равен нулю. Полученное противоречие доказывает сделанное утверждение.

Для завершения доказательства леммы достаточно установить следующий факт (частный случай которого доказан в [11]): *векторное расслоение μ (комплексное или вещественное) вещественной размерности k над компактом Y с $\dim Y < k$ имеет всюду ненулевое сечение.*

Расслоение μ индуцировано из тавтологического расслоения над грассмановым многообразием $G_{N,k}$, где N достаточно велико, некоторым отображением $Y \rightarrow G_{N,k}$. Заменяя, если необходимо, это отображение гомотопным отображением, можно считать, что оно пропускается через нерв K достаточно мелкого покрытия пространства Y . Поскольку $\dim Y < k$, можно считать, что $\dim K < k$. Таким образом, μ изоморфно векторному расслоению, индуцированному из k -мерного векторного расслоения над CW -комплексом размерности $< k$. Из теории препятствий следует, что последнее расслоение имеет нигде ненулевое сечение, поэтому и μ имеет такое сечение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть Y – свободное G -пространство и L – пространство комплексного представления группы G . Тогда $Y \times_G L \rightarrow Y/G$ – комплексное векторное расслоение над Y/G .

Обозначим через $\mathbb{C}$ представление G , при котором образующий G действует умножением на $e^{2\pi i/q}$, $q = p^\alpha$. Через $d\mathbb{C}$ обозначим прямую сумму d экземпляров представления $\mathbb{C}$, где

$$d = n - 3 + p^{\alpha-1} - \frac{1}{2}\alpha m(p^\alpha - p^{\alpha-1}).$$

Обозначим через $\xi \oplus \xi'$ расслоение $S^{2n-3} \times_G (W \oplus d\mathbb{C}) \rightarrow S^{2n-3}/G$, где $W = (\mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m)/\Delta$, Δ – диагональ и в произведении взято $|G| = p^\alpha$ сомножителей. Таким образом, $\dim_{\mathbb{R}} W = m(p^\alpha - 1)$. Образующий группы G действует на W как циклическая перестановка. Поскольку G оставляет неподвижным только нулевой вектор, представление W вещественно изоморфно комплексному представлению. Манкхольм показал в [11] (см. также [18]), что $e(\xi \oplus \xi') \neq 0$ в $\tilde{K}(S^{2n-3}/G)$.

Поскольку имеется эквивариантное отображение $S^{2n-3} \rightarrow X$, мы получаем, что $\xi \oplus \xi'$ индуцировано из расслоения $X \times_G (W \oplus d\mathbb{C}) \rightarrow X/G$. Поэтому отличен от нуля эйлеров класс в комплексной K -теории векторного расслоения $(X \times I) \times_G (W \oplus d\mathbb{C}) \rightarrow Z \times I$, где $Z = X/G$, которое мы обозначим через $\zeta \oplus \zeta'$.

В [11] показано, что по $F: X \times I \rightarrow \mathbb{R}^m$ естественным образом строится сечение $s = s_F$ расслоения ζ , множество нулей которого совпадает с $A = A(F)/G$.

Для построения такого сечения определим отображение $\hat{F}: X \times I \rightarrow W$ формулой

$$\hat{F}(x, t) = (F(x, t), F(Tx, t), \dots, F(T^q x, t)),$$

где T – образующий группы G . Легко видеть, что $\hat{F}$ эквивариантно, поэтому отображение $X \times I \rightarrow (X \times I) \times W$, переводящее (x, t) в $(x, \hat{F}(x, t))$, также является G -отображением.

ем. Отображение факторпространств, индуцированное последним G -отображением, и есть требуемое сечение s .

Теперь мы находимся в условиях леммы 2, где вместо h нужно, пользуясь инвариантностью этой функции, взять возникающую функцию $\bar{h}: X/G \times I \rightarrow \mathbb{R}$. Поскольку размерности пространств $A(F) \cap h^{-1}(0)$ и $A(F)/G \cap \bar{h}^{-1}(0)$ одинаковы, применяя лемму 2, получаем, что $A(f)$ C -существенно и

$$\begin{aligned} \dim A(F) \cap h^{-1}(0) &\geq 2 \dim_{\mathbb{C}} \zeta' = 2n - 6 + 2p^{\alpha-1} - \alpha m(p^{\alpha} - p^{\alpha-1}) \\ &= 2n - 6 + p^{\alpha-1}(\alpha m + 2) - \alpha m p^{\alpha}. \end{aligned}$$

Оценка размерности $A(f)$ вытекает из предыдущей оценки, если определить F и h формулами

$$F(x, t) = f(x), \quad h(x, t) = t - 1, \quad x \in X, \quad t \in [0, 1].$$

Тогда $h^{-1}(0) = X \times \{1\}$ и после естественного отождествления последнего пространства с X имеем $A(F) \cap h^{-1}(0) = A(f)$. Доказательство теоремы 1 закончено.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. C -существование множества $A(f)$ можно вывести из общего результата Александра-Йорка [19] (см. также статью Аллигуда [20]), используя тот факт, что $e(\zeta) \neq 0$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $G = \mathbb{Z}_{p^2}$, где p – нечетное простое число, и $f: V_n \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция. Тогда $A(f)$ непусто и C -существенно, если $n \geq p^2 - 2p + 4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить утверждение для $n = p^2 - 2p + 4$. Так как n нечетно, из леммы 1 следует, что имеется G -отображение $S^{2n-3} \rightarrow V_n$. Из теоремы 1 вытекает, что $A(f)$ является C -существенным и $\dim A(f) \geq 2n - 6 - 2p^2 + 4p = 2$; следовательно, $A(f) \neq \emptyset$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Манкхольм показал в [11], что для $G = \mathbb{Z}_{25}$ и любого $h: S^{31} \rightarrow \mathbb{R}$ множество $A(h)$ непусто. Поэтому из леммы 1 вытекает, что $A(f) \neq \emptyset$ для любого $f: V_{17} \rightarrow \mathbb{R}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Для действия группы $G = \mathbb{Z}_{27}$ на V_{21} имеет место следующий результат: для любого $f: V_{21} \rightarrow \mathbb{R}$ множество $A(f)$ непусто и C -существенно. Это непосредственно вытекает из леммы 1 и теоремы 1 (по теореме Манкхольма для $G = \mathbb{Z}_{27}$ и любого $h: S^{39} \rightarrow \mathbb{R}$ множество $A(h)$ непусто).

Приведем теперь усиление “обратной теоремы Борсука–Улама” для группы $\mathbb{Z}_{p^{\alpha}}$, доказанной Манкхольмом в [11]. Наши рассуждения основаны на тех же идеях.

Далее мы предполагаем, что $G = \mathbb{Z}_{p^{\alpha}}$, где p – нечетное простое число и $\alpha > 1$.

Манкхольм показал в [11], что если $2n - 3 \leq m(p^{\alpha} - 1) + (2p - 3)m - 1$ и $p^{\alpha} \neq 9$, то существует $f: S^{2n-3} \rightarrow \mathbb{R}^m$ с $A(f) = \emptyset$.

ЛЕММА 3. Пусть $\eta_1, \dots, \eta_r$ – векторные расслоения над конечным или счетным CW -комплексом X . Предположим, что при любом $i = 1, \dots, r$ расслоение η_i имеет ненулевое сечение над m_i -мерным остовом комплекса X . Тогда $\eta_1 \oplus \dots \oplus \eta_r$ имеет ненулевое сечение над l -мерным остовом пространства X , где $l = r - 1 + \sum_{i=1}^r m_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим k -мерный остов CW -комплекса X через X_k . Пусть $s_1, \dots, s_r$ – сечения над X расслоений $\eta_1, \dots, \eta_r$ такие, что s_i не обращается в нуль ни в одной точке m_i -мерного остова X_{m_i} . Тогда $s_1 \times \dots \times s_r$ является сечением расслоения $\eta_1 \times \dots \times \eta_r$ с базой X^r , ненулевым над объединением подпространств вида $X \times \dots \times X_{m_i} \times \dots \times X$, где i -й сомножитель равен X_{m_i} и остальные $r - 1$ сомножителей равны X . Пусть $\Delta: X \rightarrow X^r$ – какая-нибудь клеточная аппроксимация диагонали $dX = \{(x, \dots, x) \in X^r \mid x \in X\} \subset X^r$. Тогда $\eta_1 \oplus \dots \oplus \eta_r = \Delta^*(\eta_1 \times \dots \times \eta_r)$ и $\Delta^*(s_1 \times \dots \times s_r)$ – сечение расслоения $\eta_1 \oplus \dots \oplus \eta_r$, являющееся ненулевым над X_l . Действительно, $\Delta(X_l)$ содержится в l -мерном остове пространства X^r , который является объединением подпространств вида $X_{k_1} \times \dots \times X_{k_r}$, где $\sum_{i=1}^r k_i \leq l$. Пусть $\Delta(x) = (x_1, \dots, x_r) \in X_{k_1} \times \dots \times X_{k_r}$, где $x \in X_l$. Из неравенства $\sum_{i=1}^r k_i \leq l$ следует, что $k_i \leq m_i$ при некотором i (в противном случае $\sum_{i=1}^r k_i \geq l + 1$). Следовательно, $s_i(x_i) \neq 0$, что влечет $\Delta^*(s_1 \times \dots \times s_r)(x) \neq 0$.

Рассмотрим все положительные целые числа, делящиеся на p и не превосходящие $(p^\alpha - 1)/2$. Обозначим через $Q(p^\alpha, m)$ множество с повторением, составленное из чисел указанного вида, в котором каждое число повторено m раз. Обозначим через $L(p^\alpha, m)$ наибольшее из чисел r таких, что существует разбиение множества $Q(p^\alpha, m)$ на r непересекающихся подмножеств таких, что произведение всех чисел из каждого подмножества делится на p^α .

Пользуясь тем, что среди целых положительных чисел, не превосходящих $(p^\alpha - 1)/2$, имеется $(p^{\alpha-j} - 1)/2$ чисел, делящихся на $p^{\alpha-j}$, $j = 1, \dots, \alpha - 1$, можно показать, что $((p^\alpha - 1)/2)!^m$ делится на p^A и не делится на p^{A+1} , где $A = m(p^\alpha - \alpha p + \alpha - 1)/(2(p - 1))$. Поэтому

$$L(p^\alpha, m) \leq \left\lceil \frac{m(p^\alpha - \alpha p + \alpha - 1)}{2\alpha(p - 1)} \right\rceil,$$

где квадратными скобками обозначена целая часть числа. Для небольших α , например для $\alpha \leq 8$, нетрудно непосредственно проверить, что имеет место равенство (индукцией нетрудно доказать, что имеет место равенство в случае, когда α является степенью двойки). В частности, в случае $\alpha = 2$, представляющем основной интерес в этой заметке, имеем $L(p^2, m) = [m(p - 1)/4]$.

ТЕОРЕМА 2. Если $2n - 3 \leq m(p^\alpha - 1) + (2p - 3)L(p^\alpha, m) - 1$, то существует отображение $f: S^{2n-3} \rightarrow \mathbb{R}^m$ такое, что $A(f) = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через λ линейное расслоение $E_G \times_G \mathbb{C} \rightarrow B_G$, где, как и выше, на $\mathbb{C}$ образующий группы G действует как умножение на $e^{2\pi i/p^\alpha}$. Можно считать, что $E_G = S^\infty \subset \mathbb{C}^\infty$. Положим $\xi = \lambda \oplus \lambda^2 \oplus \dots \oplus \lambda^k$, где $k = (p^\alpha - 1)/2$ и λ^j есть j -я тензорная степень расслоения λ . В [11] показано, что ненулевое сечение расслоения $m\xi = \xi \oplus \dots \oplus \xi$ над S^{2N-3}/G дает $f: S^{2N-3} \rightarrow \mathbb{R}^m$ с $A(f) = \emptyset$ (отметим, что $m\xi$ изоморфно расслоению $E_G \times_G W \rightarrow B_G$ и S^{2N-3}/G можно считать $(2N - 3)$ -мерным остовом пространства B_G).

Хорошо известно, что $H^*(B_G; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{p^\alpha}[u]$, где $\deg u = 2$.

Имеем

$$e(\lambda^{i_1} \oplus \dots \oplus \lambda^{i_s}) = e(\lambda^{i_1}) \cdots e(\lambda^{i_s}) = c_1(\lambda^{i_1}) \cdots c_1(\lambda^{i_s}) = i_1 \cdots i_s u^s,$$

где e и c_1 – классы Эйлера и Чженя соответственно. Если $i_1 \cdots i_s$ делится на p^α , то указанный класс тривиален (заметим, что $e(m\xi) = (k!)^m u^{km}$).

Положим $r = L(p^\alpha, m)$; тогда $m\xi$ можно представить в виде $m\xi = \eta_1 \oplus \cdots \oplus \eta_r$, где $e(\eta_i) = 0$, $i = 1, \dots, r$. (Манкхольм в [11] использовал разложение $m\xi = \xi \oplus \cdots \oplus \xi$.) Пусть $\dim_{\mathbb{R}} \eta_i = 2m_i$; тогда $2 \sum_{i=1}^r m_i = m(p^\alpha - 1)$.

Поскольку $e(\eta_i) = 0$, расслоение η_i имеет ненулевое сечение над $2m_i$ -мерным остовом пространства B_G . Дальнейшие препятствия лежат в группах когомологий

$$H^{2m_i+t}(B_G; \pi_{2m_i-1+t}(S^{2m_i-1})).$$

Системы коэффициентов постоянны в силу того, что любое комплексное векторное расслоение ориентируемо. Указанные группы тривиальны при $0 < t < 2p - 3$, поскольку группы $\pi_{2m_i-1+t}(S^{2m_i-1})$ при таких t не имеют p -кручения [15]. Таким образом, имеется ненулевое сечение расслоения η_i над $(2m_i + 2p - 4)$ -мерным остовом пространства B_G . Из леммы 3 следует, что расслоение $m\xi$ имеет ненулевое сечение над l -мерным остовом пространства $B_G = S^\infty/G$, где

$$l = -1 + \sum_{i=1}^r (2m_i + 2p - 3) = m(p^\alpha - 1) + (2p - 3)r - 1,$$

что и требовалось доказать.

В заключение отметим, что вместо S^{2n-3} в теореме 2 можно взять любое компактное свободное G -пространство Y с $\dim Y \leq 2n - 3$, поскольку существует G -отображение такого Y в S^{2n-3} . В частности, это верно для $Y = V_n$.

3. Приложения к гипотезе Кнастера. В этом пункте мы применим результаты п. 2 к гипотезе Кнастера. Через G будет обозначаться циклическая группа $\mathbb{Z}_{p^2}$ порядка p^2 , где p – простое нечетное число.

Пусть S^N – единичная сфера в $\mathbb{R}^M$, $M > N$, задающаяся уравнениями

$$x_1^2 + \cdots + x_{N+1}^2 = 1,$$

и $x_i = 0$ при $i > N + 1$. Предположим, что $R \subset S^N$ – конечное множество точек. Для $A \in SO(N + 1)$ обозначим через AR множество точек, полученных из R с помощью вращения A . Обозначим через l размерность линейной оболочки радиус-векторов точек из R . Тогда можно найти вращение $B \in SO(N + 1)$ такое, что $BR \subset S^{l-1} \subset S^m$, где $m \geq l - 1$. Обозначим через $k(R)$ наименьшее из чисел m , для которых выполнено следующее свойство: для любой функции $f: S^m \rightarrow \mathbb{R}$ найдется вращение $C \in SO(m + 1)$, переводящее BR в поверхность уровня функции f . Из определения ясно, что $k(R) = k(AR)$ для произвольного вращения $A \in SO(N + 1)$. Гипотеза Кнастера состоит в том, что $k(R) \leq |R| - 1$, где $|R|$ – количество точек в R .

Пусть S^N – сфера единичного радиуса в $\mathbb{R}^{N+1}$ и $S^2 \subset S^N$ – единичная двумерная сфера. Для $0 \leq \rho < \infty$ определим множество $R_\rho \subset S^2$ такое, что $|R_0| = p^2$ и $|R_\rho| = p^2 + 1$ при $\rho > 0$, следующим образом: R_0 состоит из p^2 вершин правильного p^2 -угольника, вписанного в экватор сферы S^2 .

Для того чтобы определить R_ρ при $\rho > 0$, рассмотрим окружность, которая получается в результате сечения сферы S^2 некоторой плоскостью, параллельной экваториальной плоскости (или совпадающей с последней). По определению множество R_ρ при $\rho > 0$ состоит из p^2 вершин правильного p^2 -угольника, вписанного в эту окружность, и северного полюса сферы S^2 . Число $0 < \rho < \infty$ определяется как отношение расстояния от северного полюса до центра p^2 -угольника к радиусу окружности, в которую вписан многоугольник. Ясно также, что множество R_{ρ_1} не может быть получено из R_{ρ_2} вращением сферы при $\rho_1 \neq \rho_2$.

ТЕОРЕМА 3. *Выполнено $k(R_0) \leq p^2 - 2p + 3$ и $k(R_\rho) \leq p^2 - 2p + 4$ при $\rho > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение относительно множества $k(R_0)$ вытекает непосредственно из следствия 1. Действительно, пусть $f: S^{p^2-2p+3} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция. Определим $g: V_{p^2-2p+4} \rightarrow \mathbb{R}$ как $g(z) = f(v_1)$, где $z = (v_1, v_2) \in V_{p^2-2p+4}$. Таким образом, $g = f \circ \nu_1$, где $\nu_1: V_{p^2-2p+4} \rightarrow S^{p^2-2p+3}$ – проекция на первый вектор. Из следствия 1 вытекает, что $A(g) \neq \emptyset$; поэтому имеется орбита, на которой g постоянна. Легко видеть, что проекция этой орбиты при отображении ν_1 есть множество точек, конгруэнтное $R_0 \subset S^{p^2-2p+3}$, и функция f постоянна на этом множестве.

Утверждение относительно множества R_ρ при $\rho > 0$ доказывается с использованием вложения $V_n = V_{n,2} \subset V_{n+1,3}$ и C -существенности множества $A(g)$ тем же способом, как в теореме 6 из [14] или в теореме 7 из [4].

Например, докажем утверждение для множества R_1 . Заметим, что R_1 получается из R_0 добавлением одной точки – северного полюса.

Положим $q = p^2$, $n = p^2 - 2p + 4$ и пусть $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}$. Нам будет удобно представлять точку многообразия $V_{n,2}$ (соответственно $V_{n+1,3}$) как q -набор (соответственно $(q+1)$ -набор) точек сферы, как описано в конце п. 1. Например, $x \in V_{n+1,3}$ представляется в виде $x = (v_1, \dots, v_{q+1})$, причем множество точек $\{v_1, \dots, v_{q+1}\}$ получается из R_1 некоторым вращением $A \in SO(n+1)$ и элементы группы G переставляют первые q точек в наборе.

Положим

$$C(f) = \{(v_1, \dots, v_{q+1}) \in V_{n+1,3} \mid f(v_1) = \dots = f(v_{q+1})\}.$$

Определим функции $g, h: V_{n+1,3} \rightarrow \mathbb{R}$ формулами

$$g(x) = f(v_1), \quad h(v_1, \dots, v_{q+1}) = f(v_{q+1}) - \max_{1 \leq i \leq q} f(v_i),$$

где $x = (v_1, \dots, v_{q+1}) \in V_{n+1,3}$. Заметим, что функция h непрерывна и постоянна на орбитах G -действия и $C(f) = A(g) \cap h^{-1}(0)$.

Соединим (произвольные) максимум и минимум функции f дугой большого радиуса и параметризуем эту дугу отрезком I . Обозначим точки на дуге через e_t , $t \in I$, и будем считать, что e_0 – точка минимума функции f , а e_1 – точка максимума. Как объяснялось в конце п. 1, имеется эквивариантное вложение $j: V_{n,2} \times I \subset V_{n+1,3}$, при котором $\nu_{q+1}(j(x, t)) = e_t$ для любого $x \in V_{n,2}$, где $\nu_{q+1}: V_{n+1,3} \rightarrow S^n$ – проекция на последний вектор, определенная формулой $\nu_{q+1}(x) = v_{q+1}$, $x = (v_1, \dots, v_{q+1})$.

Положим

$$\bar{g} = g \circ j, \quad \bar{h} = h \circ j: V_{n,2} \times I \rightarrow \mathbb{R}.$$

Из следствия 1 вытекает, что в $A(\bar{g})$ имеется компонента, соединяющая основания цилиндра $V_{n,2} \times I$. Кроме того, $\bar{h}$ принимает неположительные значения на нижнем основании цилиндра и неотрицательные на верхнем основании. Из этих двух фактов следует, что $A(\bar{g}) \cap \bar{h}^{-1}(0) \neq \emptyset$; поэтому и $C(f) \neq \emptyset$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. При $p = 5$, т.е. в случае $|R_0| = 25$, из замечания 3 следует, что $k(R_0) \leq 16$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Пусть R_0 – множество вершин правильного 27-угольника, вписанного в экватор единичной двумерной сферы. Так же, как и выше, по R_0 определим множество R_ρ , $\rho > 0$. Тогда из замечания 4 следует, что $k(R_0) \leq 20$ и $k(R_\rho) \leq 21$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Используя лемму 1 и теорему 1, можно получить аналог следствия 1 для случая действия на V_n группы $\mathbb{Z}_{p^\alpha}$, $\alpha \geq 3$ (в том числе и для отображений в $\mathbb{R}^m$ с $m \geq 1$). Это даст, в частности, как в теореме 3, оценку сверху на $k(R_0)$ и $k(R_\rho)$, где R_0 – множество вершин правильного p^α -угольника, вписанного в экватор единичной двумерной сферы. Однако при $\alpha \geq 3$ и $p^\alpha \neq 27$ получающаяся оценка, как нетрудно проверить, больше, чем предположенная Кнастером (за неимением лучшей, такая оценка, возможно, представляет некоторый интерес). Таким образом, предложенный метод приводит к положительному решению лишь в случае групп симметрии $\mathbb{Z}_{p^2}$ (p – нечетное простое число) и $\mathbb{Z}_{27}$.

Утверждение теоремы 3 относительно множества R_ρ может быть рассмотрено с более общих позиций.

Пусть $R = \{v_1, \dots, v_s\}$ – множество точек на сфере S^{k-1} , где $s = |R|$. Обозначим через l размерность линейной оболочки радиус векторов точек из R . Множество точек вида $(Av_1, \dots, Av_s)$, где A пробегает $SO(k)$, гомеоморфно многообразию Штифеля $V_{k,l}$ ортонормированных l -реперов в $\mathbb{R}^k$.

Определим $\nu_d: V_{k,l} \rightarrow S^{k-1}$ как проекцию на d -й вектор, т.е. формулой $\nu_d(P) = Av_d$, где $P = (Av_1, \dots, Av_s) \in V_{k,l}$, $d = 1, \dots, s$.

Для $f: S^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}$ положим

$$B(f) = \{x \in V_{k,l} \mid f(\nu_1(x)) = \dots = f(\nu_s(x))\}.$$

C -существенность множества $B(f)$ определяется таким же образом, как и C -существенность $A(f)$, и означает следующее: мы можем определить $B(F)$ для гомотопии $F: S^{k-1} \times I \rightarrow \mathbb{R}$ отображения f формулой

$$B(F) = \{(x, t) \in V_{k,l} \times I \mid f_t(\nu_1(x)) = \dots = f_t(\nu_s(x))\},$$

где $f_t(y) = F(y, t)$, $y \in S^{k-1}$. Тогда $B(f)$ называется C -существенным, если для любой гомотопии F отображения f в $B(F)$ имеется компонента связности, соединяющая основания цилиндра.

Скажем, что R C -существенно (при данном k), если C -существенным является $B(f)$ при любом f .

Например, C -существенным является множество R_0 из теоремы 3.

По множеству $R \subset S^{k-1}$ построим множество $R_\rho \subset S^k$, $\rho > 0$, такое, что $|R_\rho| = |R| + 1$, следующим образом. Будем, как и выше, считать, что единичная сфера S^{k-1} является

экватором в $S^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$. Обозначим через S_r^{k-1} сферу радиуса $r < 1$, являющуюся пересечением S^k с гиперплоскостью, параллельной экваториальной гиперплоскости (таких сфер ровно две). Экватор обозначим через S_1^{k-1} . Пусть $\rho = h/r$, где h – расстояние между северным полюсом сферы S^k и центром сферы S_r^{k-1} . Тогда ρ – произвольное положительное число. Обозначим через rR множество, полученное из R гомотетией с параметром r . Сдвигом перенесем множество rR на сферу S_r^{k-1} и добавим к полученному множеству северный полюс сферы S^k . Определенное таким образом множество и есть R_ρ . В частности, R_1 получается из R добавлением северного полюса сферы S^k .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $R \subset S^{k-1}$ является C -существенным, то $k(R_\rho) \leq k$.

Предложение доказывается таким же образом, как утверждение теоремы 3, касающееся множества R_ρ .

Разнообразные применения результатов типа теоремы 3 к задачам комбинаторной геометрии были найдены В. В. Макеевым в [2], [7], [12], [21]. Используя следствие 1, легко получить аналогичные результатам из [2], [7], [12], [21] утверждения о возможности вписать (описать) правильный p^2 -угольник, имеющий центр в произвольной внутренней точке, в выпуклое тело размерности $\geq p^2 - 2p + 4$ (вокруг двумерного сечения такого выпуклого тела), об ε -асферических двумерных сечениях выпуклых тел и о разрезании конечной массы, непрерывно распределенной в $\mathbb{R}^n$, специальным $\mathbb{Z}_{p^2}$ -симметричным множеством, составленным из p^2 полугиперплоскостей.

В качестве еще одного геометрического примера покажем, что в компактное выпуклое тело подходящей размерности можно вписать правильную пирамиду, в основании которой лежит правильный p^2 -угольник, гомотетичную выпуклой оболочке множества R_ρ , $\rho > 0$. Такую пирамиду будем обозначать через $K_{\rho,r,O}$, где r – радиус описанной двумерной сферы, O – центр этой сферы и ρ – отношение высоты пирамиды к радиусу описанной вокруг основания окружности. Заметим, что две пирамиды с одинаковыми ρ , r и O получаются друг из друга вращением относительно точки O .

Из теоремы 3 вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть V – компактное выпуклое тело с непустой внутренностью в $\mathbb{R}^{p^2-2p+5}$. Тогда для любого $\rho > 0$ и любой внутренней точки $O \in V$ найдется пирамида типа $K_{\rho,r,O}$, вписанная в V .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим единичную сферу с центром в точке O и множество R_ρ на ней. Для точки x сферы обозначим через $f(x)$ расстояние между точкой O и границей тела V по лучу, соединяющему O с x . Таким образом, возникает функция f на $(p^2 - 2p + 4)$ -мерной сфере. Применяя к этой функции теорему 3, получаем требуемое.

Соответствующие геометрические результаты могут быть получены и с использованием группы симметрии $\mathbb{Z}_{p^\alpha}$, $\alpha > 2$ (см. замечание 7).

В заключение для удобства читателя приведем вытекающие из [4], [7], [12]–[14] оценки для $k(R_0)$ и $k(R_\rho)$ в случае $\alpha = 1$, т.е. когда $|R_0| = p$, $|R_\rho| = p + 1$, $G = \mathbb{Z}_p$ (p – нечетное простое число). Кроме того, приведем аналогичные оценки для множеств R'_0 и R'_ρ , получающихся соответственно из R_0 и R_ρ удалением одной из вершин правильного p -угольника. Имеем $|R'_0| = p - 1$ и $|R'_\rho| = p$ для $\rho > 0$.

Из [7] и [13], [14] следует, что $k(R_0) \leq (p+1)/2$. В [7] показано, что $k(R'_0) \leq (p-1)/2$. Так же, как в [4], [14], на основе соображений C -существенности доказывается, что $k(R_\rho) \leq (p+3)/2$ и $k(R'_\rho) \leq (p+1)/2$ для $\rho > 0$.

Автор благодарит рецензента за ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Knaster B. Problem 4 // *Colloq. Math.* 1947. № 1. P. 30.
- [2] Макеев В. В. О некоторых вопросах непрерывных отображений сфер и задачах комбинаторной геометрии // *Геометрические вопросы теории функций и множеств.* Калинин, 1986. С. 75–85.
- [3] Бабенко И. К., Богатый С. А. К отображению сферы в евклидово пространство // *Матем. заметки.* 1989. Т. 46. № 3. С. 3–8.
- [4] Воловиков А. Ю. Теорема типа Буржана–Янга для $\mathbb{Z}_p^n$ -действия // *Матем. сб.* 1992. Т. 183. № 7. С. 115–144.
- [5] Chen W. Counterexamples to Knaster's conjecture // *Topology.* 1998. V. 37. P. 401–405.
- [6] Богатый С. А. Топологические методы в комбинаторных задачах // *УМН.* 1986. Т. 41. № 6. С. 37–47.
- [7] Макеев В. В. Задача Кнастера и почти сферические сечения // *Матем. сб.* 1989. Т. 180. № 3. С. 424–431.
- [8] Floyd E. E. Real-valued mappings of spheres // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1955. V. 6. P. 19–22.
- [9] Yamabe H., Yujobô Z. On the continuous functions defined on a sphere // *Osaka Math. J.* 1950. V. 2. № 1. P. 19–22.
- [10] Yang C. T. On theorems of Borsuk–Ulam, Kakutani–Yamabe–Yujobô and Dyson, I // *Ann. of Math.* 1954. V. 60. № 2. P. 262–282.
- [11] Munkholm H. J. On the Borsuk–Ulam theorem for $\mathbb{Z}_{p^\alpha}$ actions on S^{2n-1} and maps $S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ // *Osaka J. Math.* 1970. V. 7. P. 451–456.
- [12] Макеев В. В. Пространственные обобщения некоторых теорем о выпуклых фигурах // *Матем. заметки.* 1984. Т. 36. № 3. С. 405–415.
- [13] Воловиков А. Ю. К теореме Янга о функциях на сфере // IX Всесоюзная геометрическая конференция. Тез. сообщ. Кишинев: Штиница, 1988. С. 68–69.
- [14] Volovikov A. Dimension and C -essentiality of $\mathbb{Z}_p$ -coincidence set of map // *Q & A in General Topology.* 1990. V. 8. Spec. Issue. P. 207–217.
- [15] Serre J.-P. Homologie singulière des espaces fibrés. Applications // *Ann. Math.* 1951. V. 54. P. 425–505.
- [16] Borel A. Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts // *Ann. of Math. (2).* 1953. V. 57. P. 115–207.
- [17] Шварц А. С. Некоторые оценки рода топологического пространства в смысле Красносельского // *УМН.* 1957. Т. 12. № 4. С. 209–214.
- [18] Munkholm H. J., Nakaoka M. The Borsuk–Ulam theorem and formal group laws // *Osaka J. Math.* 1972. V. 9. P. 337–349.
- [19] Alexander J. C., Yorke J. A. The homotopy continuation method: numerically implementable topological procedures // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1978. V. 242. P. 271–284.
- [20] Alligood K. T. Topological conditions for continuation of fixed points // *Lecture Notes in Math.* 1981. № 886. P. 20–32.
- [21] Макеев В. В. Задача Кнастера о непрерывных отображениях сферы в евклидово пространство // Исследования по топологии 6. Зап. науч. семинаров ЛОМИ. Т. 167. Л.: Наука, 1988. С. 169–178.

Московский государственный институт радиотехники,
электроники и автоматики

Поступило
06.04.1999
Исправленный вариант
27.06.2000