Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Кашинцев, О некоторых условиях вложимости полугрупп в группы, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 5, 705–717

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm782>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 17:52:31

УДК 517

О НЕКОТОРЫХ УСЛОВИЯХ ВЛОЖИМОСТИ ПОЛУГРУПП В ГРУППЫ

Е. В. Кашинцев

В статье найдены два новых класса полугрупп, вложимых в группу, содержащих некоторые известные ранее классы полугрупп с этим свойством (теоремы 1 и 3). Кроме того, построены примеры не вложимых в группу полугрупп из класса $K_{p,r}^2$ при $p + r \geq 6$ (теорема 2), что опровергает известное ранее предположение.

Библиография: 9 названий.

Пусть

$$S = \langle\langle a_1, a_2, \dots, a_n; A_i = B_i, i \in I \rangle\rangle \quad (1)$$

– полугруппа, заданная образующими $a_1, a_2, \dots, a_n$ и определяющими соотношениями $A_i = B_i$ ($i \in I$). Мы будем всегда предполагать определяющие слова A_i и B_i непустыми и попарно различными. Символы $\equiv$, $\stackrel{s}{=}$, $\stackrel{g}{=}$ используются соответственно для обозначения графического равенства слов, равенства слов в полугруппе S и равенства слов в группе G с заданием

$$G = \langle a_1, a_2, \dots, a_n; A_i B_i^{-1} = 1, i \in I \rangle. \quad (2)$$

Слово в образующих $a_1, a_2, \dots, a_n$ без отрицательных степеней, включая пустое, будем называть *позитивным*. Слово, обратное (в свободной группе) позитивному слову, называем *негативным*.

Назовем *S-куском* относительно (1) такое слово X , для которого при некоторых U_1, U_2, V_1, V_2 слова $U_1 X U_2, V_1 X V_2$ являются определяющими, причем либо U_1 и V_1 , либо U_2 и V_2 графически не совпадают.

Условие $C_s(p)$ для (1) состоит в том, что ни одно из определяющих слов не может быть представлено произведением менее чем p S -кусков.

Условие $D(q)$ для (1) состоит в том, что ни в левом, ни в правом графе нет циклов (т.е. замкнутых путей) с числом ребер менее q .

Заметим, что $C_s(1)$ и $D(1)$ указывают на отсутствие соответствующих ограничений; $C_s(2)$ означает, что определяющее слово не является собственной частью другого определяющего слова; $D(2)$ предполагает несократимость каждого определяющего соотношения $A_i = B_i$, т.е. для каждого $i \in I$ слова A_i и B_i начинаются различными буквами.

Следуя Адяну [1], [2], введем понятие *левого* и *правого графа* для задания (1). Вершинами как левого, так и правого графа для (1) являются буквы алфавита $a_1, a_2, \dots, a_n$. Каждому определяющему соотношению $A_i = B_i$ соответствует ребро левого графа,

соединяющее начальные буквы слов A_i и B_i , и ребро правого графа, соединяющее конечные буквы этих слов.

В работе [3] изучаются классы K_p^q . По определению полугруппа S принадлежит классу K_p^q , если она обладает заданием, удовлетворяющим условиям $C_s(p)$ и $D(q)$.

Напомним некоторые результаты. Адяном [1], [2] показано, что все полугруппы из класса $K_1^\infty = \bigcap_q K_1^q$ вложимы в группы. Мальцевым в [4] был построен пример полугруппы, принадлежащей классу K_2^2 , не вложимой в группу. Более простой пример указан в [2]. Такова полугруппа $S = \langle a, b, c, d; ab = ed, aed = ced \rangle$.

Один из основных результатов работы [3] утверждает, что полугруппы из классов K_4^2 и K_3^3 вложимы в группы. Помимо этого, в [3] для любого $q > 2$ построены примеры полугрупп из класса K_2^q , не вложимых в группы. В этих примерах полугрупп не выполнялось сокращение слева. Оставались открытыми вопросы о вложимости в группы полугрупп из класса K_3^2 и о существовании примеров полугрупп с двусторонним сокращением, принадлежащих классам K_2^q при $q > 2$, не вложимых в группы. Положительный ответ на оба данных вопроса дал Губа [5]. Как показывает пример полугруппы $\langle a, b, c, d, x, y; axc = byd, ayc = bxd \rangle$, приведенный в [5], включение $K_4^2 \cup K_3^3 \subset K_3^2$ является собственным.

В недавней работе [6] рассматривается другой класс полугрупп, также включающий классы K_4^2 и K_3^2 и содержащий примеры полугрупп, не входящих в K_3^2 . Этот класс полугрупп определяется так называемым условием Ω и условием $C(6)$, налагаемыми на группу G с заданием (2).

Цель настоящей работы – указать новые классы полугрупп, вложимых в группы.

Пусть

$$G = \langle a_1, \dots, a_n; R_j = 1, j \in J \rangle \quad (3)$$

– задание группы G , где множество $\{R_j \mid j \in J\}$ симметризовано, т.е. состоит из всевозможных циклических перестановок слов $A_i B_i^{-1}$ из (2) и им обратных. Заметим, что из выполнения условия $D(2)$ для (1) следует циклическая несократимость каждого слова R_j .

Напомним, что слово X называется *куском* относительно (3), если

$$R_i \equiv XU, \quad R_j \equiv XV \quad \text{и} \quad R_i \neq R_j$$

для некоторых i, j, U и V .

Условие $C(p)$ для (3) состоит в том, что никакое определяющее слово R_j не является произведением менее чем p кусков.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Условие Ω для (3) состоит в том, что никакое подслово вида

$$X^{-1}A_iY^{-1} \quad \text{или} \quad X^{-1}B_iY^{-1}$$

определяющего слова R_j , где X, Y – позитивные слова, хотя бы одно из которых непусто, не может быть представлено произведением менее чем четырех кусков.

Основной результат работы [6] утверждает, что если группа G с заданием (3) удовлетворяет условиям $C(6)$ и Ω , то полугруппа S с заданием (1) вложима в группу.

ЛЕММА 1 [3, лемма 3.2]. *Позитивное слово X или негативное слово X^{-1} тогда и только тогда является куском, когда X является S -куском.*

Через $|W|_q$ (соответственно $|W|_s$) обозначим минимальное число кусков (S -кусков), в произведение которых можно разложить слово W . Если такое разложение невозможно, то полагаем $|W|_g = \infty$ (соответственно $|W|_s = \infty$).

ЛЕММА 2 [3, лемма 3.3]. *Если W – позитивное слово, то $|W|_s = |W^\varepsilon|_g$ ($\varepsilon = \pm 1$), включая случай, когда $|W|_s = \infty$.*

ЛЕММА 3. *Если задание (3) группы G удовлетворяет условию Ω , то (3) удовлетворяет также условию $C(6)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть R – определяющее слово группы G . Если R не разложимо в произведение кусков, то для R условие $C(6)$ выполнено по определению.

Пусть R разложимо в произведение кусков. Тогда каждая его буква является куском (подслово куска является куском). Пусть $R \equiv B_1^{-1}AB_2^{-1}$ и $B_1B_2 \equiv B$. Пусть b – первая буква слова B . Тогда в силу условия Ω слово $b^{-1}A$ не разложимо в произведение менее четырех кусков. Отсюда $|A|_g \geq 3$. Симметрично доказывается, что $|B|_g \geq 3$.

Допустим, $R \equiv X_1X_2X_3X_4X_5$, где каждое X_i является куском. Заметим, что слово A не может содержать более трех кусков X_i целиком, так как иначе на долю B^{-1} (а значит, и B) приходилось бы не более двух кусков. Предположим, $A \equiv X'_iX''_{i+1}X'_{i+2}$, где $X_i \equiv X'_iX''_i$, $X_{i+2} \equiv X'_{i+2}X''_{i+2}$ и хотя бы одно из слов X'_i или X''_{i+2} было непусто. В силу условия Ω имеем $|X'_iA|_g \geq 4$ или соответственно $|AX''_{i+2}|_g \geq 4$. С другой стороны, $|X_iX_{i+1}X'_{i+2}|_g \leq 3$ и $|X''_iX_{i+1}X_{i+2}|_g \leq 3$. Противоречие. Если слово A содержит целиком два куска X_i , то рассуждения симметричны с заменой A на B . Мы доказали, что R не разложимо в произведение пяти кусков. Тем более невозможно разложение R в произведение менее пяти кусков. Следовательно, $|R|_g \geq 6$.

Лемма 3 позволяет переформулировать основной результат работы [6] следующим образом: *если группа G с заданием (3) удовлетворяет условию Ω , то полугруппа S с заданием (1) вложима в группу.*

Будем говорить, что полугруппа S с заданием (1) *принадлежит классу $(K_1^2)^\Omega$* , если для S выполнено $D(2)$ и соответствующее задание (3) группы G удовлетворяет условию Ω .

Слово A назовем *изолированным в определяющем соотношении $A = B$* полугруппы S , если первая и последняя буквы слова B не являются S -кусками. Поскольку по предположению все определяющие слова полугруппы S попарно различны, то каждое определяющее слово A входит в единственное определяющее соотношение $A = B$ (или $B = A$), поэтому можно говорить об *изолированности слова A относительно (1)*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Условие Φ для (1) состоит в том, что если определяющее слово A разложимо в произведение менее чем трех кусков, то A изолировано относительно (1). Класс полугрупп S с заданием (1), удовлетворяющих условиям Φ и $D(2)$, обозначим через $(K_1^2)^\Phi$.*

Покажем, что

$$K_3^2 \cup (K_1^2)^\Omega \subset (K_1^2)^\Phi. \quad (4)$$

Действительно, тот факт, что выполнение условия $C_s(3)$ влечет выполнение условия Φ , непосредственно следует из определения этих условий.

Пусть для (3) выполняется Ω , и пусть $A = B$ – определяющее соотношение полугруппы S . Пусть $B \equiv bB_1c$. Если b^{-1} и c^{-1} не являются кусками, то по лемме 1 буквы b и c не являются S -кусками. Тогда слово A является изолированным относительно (1) и для A условие Φ выполнено. Пусть b^{-1} является куском. Тогда в силу Ω слово $b^{-1}A$ не разложимо в произведение менее четырех кусков и A не разложимо в произведение менее трех кусков. Поскольку A – положительное слово, то $|A|_g = |A|_s$ по лемме 2. Отсюда следует выполнение $C_s(3)$ для A , а значит, и условия Φ для A . Аналогично рассматривается случай, когда c^{-1} является куском.

Пример полугруппы

$$S_1 = \langle\langle a, b, x, y, z, t; xay = yax, xby = ybx, a = zat \rangle\rangle$$

показывает, что включение (4) является собственным.

ТЕОРЕМА 1. *Каждая полугруппа S из класса $(K_1^2)^\Phi$ вложима в группу.*

Доказательство теоремы опирается на технику диаграмм Линдона–Ван Кампена [7, гл. 5]. Учитывая особенности задания (3) группы G , доказываем усиленный вариант (лемма 5) формулы кривизны [7, гл. 5, теорема 4.3] для (4, 4)-карт.

Пусть полугруппа S с заданием (1) принадлежит классу $(K_1^2)^\Phi$. Перепишем (1) в виде

$$S = \langle\langle a_1, \dots, a_n; A_l = B_l, A_k = B_k (l \in L, k \in K) \rangle\rangle, \quad (5)$$

где $L \cup K = I$, $L \cap K = \emptyset$ и множество $\{A_k = B_k, k \in K\}$ состоит из тех и только тех определяющих соотношений из (1), которые содержат изолированное слово.

Добавим к (5) образующие x_l , $l \in L$, и заменим каждое соотношение $A_l = B_l$ парой новых соотношений $x_l = A_l$ и $x_l = B_l$. Получим новое задание полугруппы S :

$$S = \langle\langle a_1, \dots, a_n, x_1, x_2, \dots; x_l = A_l, x_l = B_l, A_k = B_k (l \in L, k \in K) \rangle\rangle. \quad (6)$$

Рассмотрим соответствующую группу G :

$$G = \langle a_1, \dots, a_n, x_1, x_2, \dots; A_l x_l^{-1} = 1, B_l x_l^{-1} = 1, A_k B_k^{-1} = 1 (l \in L, k \in K) \rangle. \quad (7)$$

Пусть

$$G = \langle a_1, \dots, a_n, x_1, x_2, \dots; P_{l'} = 1, Q_{k'} = 1 (l' \in L', k' \in K') \rangle, \quad (8)$$

где $\{P_{l'}\}$ и $\{Q_{k'}\}$ получены замыканием соответствующих множеств $\{A_l x_l^{-1}, B_l x_l^{-1}\}$ и $\{A_k B_k^{-1}\}$ относительно операций циклического сдвига и взятия обратного слова. Элементы множеств $\{P_{l'}\}$ и $\{Q_{k'}\}$ будем для краткости называть соответственно P -словами и Q -словами.

Условие $T(q)$ для группы G с симметризованным множеством определяющих слов состоит в том, что для любой последовательности определяющих слов $R_1, R_2, \dots, R_t$, где $t < q$ и пары соседних слов, а также слова R_t и R_1 не являются взаимно обратными, по меньшей мере одно из произведений $R_1 R_2, \dots, R_{t-1} R_t, R_t R_1$ не допускает сокращений.

ЛЕММА 4. Если полугруппа S принадлежит классу $(K_1^2)^\Phi$, то задание (8) группы G удовлетворяет условиям $C(4)$ и $T(4)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выполнимость $C(4)$ для (8) непосредственно вытекает из следующих фактов. Всякий кусок является позитивным или негативным словом. Если кусок X содержит x_i^ε ($\varepsilon = \pm 1$), то $X \equiv x_i^\varepsilon$. Всякое позитивное X или негативное X^{-1} слово в алфавите $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ является куском тогда и только тогда, когда X является S -куском относительно (1).

Допустим, для (8) не выполняется условие $T(4)$. Тогда найдутся определяющие слова R_1, R_2, R_3 такие, что каждое из произведений $R_1 R_2, R_2 R_3, R_3 R_1$ допускает сокращение и не равно 1 в свободной группе. В этом случае некоторое R_i имеет вид $R_i \equiv a^\varepsilon T b^{-\varepsilon}$, где $\varepsilon = \pm 1$ и a, b – буквы, являющиеся кусками. Можно считать $i = 1$. Тогда из вида соотношений (7) следует, что $R_1 \equiv A^\varepsilon B^{-\varepsilon}$, где $A = B$ – определяющее соотношение из (6). Если бы R_1 было Q -словом, то в силу определения задания (6) хотя бы одна из букв a, b не являлась куском. Допустим, R_1 – P -слово. Тогда $a \equiv x_j$ или $b \equiv x_j$ для некоторой буквы x_j . В случае $a \equiv x_j$ имеем $R_3 \equiv c^\varepsilon U x_j^{-\varepsilon}$, $R_2 \equiv b^\varepsilon V c^{-\varepsilon}$, и мы получаем противоречие, повторив рассуждение для R_2 вместо R_1 . Аналогично, в случае $b \equiv x_j$ получаем противоречие для R_3 вместо R_1 .

СЛЕДСТВИЕ 1. В каждой конечно определенной полугруппе из класса $(K_1^2)^\Phi$ разрешима проблема равенства слов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теоремы 1, леммы 4 и разрешимости проблемы равенства слов в конечно определенных группах с условиями $C(4)$ и $T(4)$ (см. [7, гл. 5]).

ЗАМЕЧАНИЕ. Известна разрешимость проблемы равенства слов для полугрупп с условием $C_s(3)$ и даже для несколько более широких классов полугрупп (см. [8]). Однако для всех этих полугрупп характерно то, что любое слово имеет лишь конечное число равных ему в полугруппе слов. В классе $(K_1^2)^\Phi$ имеются полугруппы, в которых найдутся слова, имеющие бесконечное число слов, равных им. Это связано с допущением, что одно определяющее слово может быть собственной частью другого определяющего слова.

Пусть M – произвольная карта. Через $V^\bullet, E^\bullet, F^\bullet$ будем обозначать соответственно число граничных вершин, число граничных ребер и число граничных областей карты M . Условимся считать, что граничный цикл связной односвязной карты M и граничные циклы ее областей ориентированы в одном направлении. В отличие от [7, гл. 5], *граничной областью* карты M будем называть область D , граничный цикл ∂D которой имеет ребро в ∂M . Если все внутренние вершины v карты M имеют степень $d(v) \geq q$, а все внутренние области D имеют степень $d(D) \geq p$, то M называется (q, p) -картой; $\sum d(v), \sum d(D)$ обозначают суммирование по всем вершинам и по всем областям карты M . Знак $\sum^\bullet$ применяется для суммирования по всем граничным вершинам или граничным областям, а знак $\sum^\circ$ – для суммирования по всем внутренним вершинам или внутренним областям.

ЛЕММА 5. Пусть M – связная односвязная $(4, 4)$ -карта с простым замкнутым граничным контуром ∂M , и пусть все граничные вершины, кроме быть может двух v_1 и v_2 , имеют степень не меньше четырех, а при $i = 1, 2$ $d(v_i) \geq 3$. Тогда в M найдутся две области D_1 и D_2 , граничные контуры которых состоят каждый из двух ребер: граничного и внутреннего.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольной карты M (см. [7, гл. 5, формула 3.2]) имеет место равенство

$$P(Q - h) = \sum^{\bullet} \left[\frac{p}{q} + 2 - d(v) \right] + \sum^{\circ} [p - d(v)] \\ + \frac{p}{q} \sum^{\bullet} [q - d(D)] + \frac{p}{q} \sum^{\circ} [q - d(D)] + \frac{p}{q} (V^{\bullet} - E^{\bullet}),$$

где Q – число компонент карты M , h – число дырок в M , p и q – натуральные числа, удовлетворяющие уравнению $1/p + 1/q = 1/2$.

В нашем случае $p = q = 4$, $Q = 1$, $h = 0$. Так как M есть $(4, 4)$ -карта, то $\sum^{\circ} [4 - d(v)]$ и $\sum^{\circ} [4 - d(D)]$ принимают неположительные значения. Поскольку ∂M – простой замкнутый контур, то $V^{\bullet} = E^{\bullet}$. Отсюда как следствие получаем неравенство

$$\sum^{\bullet} [4 - d(D)] + \sum^{\bullet} [3 - d(v)] \geq 4.$$

Далее, принимая во внимание условие леммы и наше определение граничной области, получаем

$$4 \leq \sum^{\bullet} [3 - d(v)] + \sum^{\bullet} [3 - d(D)] + F^{\bullet} \leq \sum^{\bullet} [3 - d(v)] + V^{\bullet} + \sum^{\bullet} [3 - d(D)] \\ = \sum^{\bullet} [4 - d(v)] + \sum^{\bullet} [3 - d(D)] \leq 2 + \sum^{\bullet} [3 - d(D)].$$

Отсюда

$$\sum^{\bullet} [3 - d(D)] \geq 2. \quad (9)$$

Из условия леммы, очевидно, следует, что M имеет по крайней мере две области. В этом случае так как ∂M – простой замкнутый контур, граница каждой области содержит хотя бы одно внутреннее ребро. В частности, $d(D) \geq 2$ для каждой граничной области D . Тогда из (9) следует, что найдутся две области D_1 и D_2 с $d(D_i) = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть U и V – позитивные слова в алфавите $\{a_1, a_2, \dots, a_n, x_1, x_2, \dots\}$ из (6), (8). Наша задача доказать, что если $U \stackrel{g}{\sim} V$, то $U \stackrel{s}{\sim} V$.

Пусть M – минимальная диаграмма над заданием (8) с меткой граничного контура UV^{-1} . Число областей диаграммы M назовем *степенью* слова UV^{-1} и обозначим $\deg(UV^{-1})$; $\ell(W)$ обозначает длину слова W . Доказательство теоремы ведем индукцией по упорядоченным парам

$$K(U, V) = (\deg(UV^{-1}), \ell(UV^{-1})),$$

где порядок на множестве таких пар определяется лексикографически.

Если $\deg(UV^{-1}) = 0$, то $U \equiv V$ и теорема доказана.

Пусть $\deg(UV^{-1}) > 0$ и слова U и V начинаются с одной буквы: $U \equiv aU'$, $V \equiv aV'$. Поскольку $\deg(U'V'^{-1}) = \deg(UV^{-1})$, то $K(U'V') < K(U, V)$, откуда по индукции заключаем, что $U' \stackrel{s}{\sim} V'$ и, следовательно, $U \stackrel{s}{\sim} V$. Аналогично рассматривается случай, когда U и V оканчиваются на одну букву. Поэтому можно предположить, что слово UV^{-1} циклически несократимо.

Если $\deg(UV^{-1}) = 1$, то $U = V$ – определяющее соотношение полугруппы S .

Предположим, что ∂M имеет самопересечение. Тогда $\partial M = \alpha_1 \beta \alpha_2$, где β – непустой простой замкнутый путь. Пусть метка W пути β входит в U . Имеем $W \stackrel{g}{=} 1$ и $K(W, 1) < K(U, V)$. По индуктивному предположению $W \stackrel{s}{=} 1$, что невозможно при непустых определяющих словах полугруппы S . Аналогично доказывается, что W не входит в V . Следовательно, имеем $U \equiv U_1 U_2$, $V \equiv V_1 V_2$ и $W \equiv U_2 V_2^{-1}$. Тогда для $i = 1, 2$ получаем $U_i \stackrel{g}{=} V_i$, $K(U_i, V_i) < K(U, V)$ и по индуктивному предположению $U_i \stackrel{s}{=} V_i$. Отсюда $U \stackrel{s}{=} V$.

Будем считать теперь, что ∂M – простой замкнутый путь и $\deg(UV^{-1}) > 1$.

Рассмотрим случай, когда M содержит область D , метка граничного контура которой является Q -словом. С точностью до циклической перестановки любое Q -слово имеет вид AB^{-1} или BA^{-1} , где $A = B$ – определяющее соотношение полугруппы S и A – слово, изолированное относительно (1). То есть имеем $B \equiv aB'b$, где a, b не являются S -кусками, а значит, не являются кусками относительно (8). Поскольку M – минимальная диаграмма, то она является приведенной, поэтому буквы $a^\varepsilon, b^\varepsilon$ ($\varepsilon = \pm 1$) не могут входить в метки внутренних ребер. Следовательно, буквы a, b входят одновременно либо в слово U , либо в слово V . Пусть, например, $U \equiv U_1 a U_2 b U_3$. Тогда $aU_2 b \stackrel{g}{=} A$ и $U_1 A U_3 \stackrel{g}{=} V$ (рис. 1).

Рис. 1

Если $U_1 A U_3 \not\equiv V$, то $\deg(aU_2 b A^{-1}) < \deg(UV^{-1})$ и $\deg(U_1 A U_3 V^{-1}) < \deg(UV^{-1})$. По индуктивному предположению $aU_2 b \stackrel{s}{=} A$ и $U_1 A U_3 \stackrel{s}{=} V$, откуда $U \stackrel{s}{=} V$.

Если $U_1 A U_3 \equiv V$, то слова U_1 и U_3 пусты, поскольку UV^{-1} циклически несократимо. Тогда $U \stackrel{g}{=} B$, $\deg(UB^{-1}) < \deg(UV^{-1})$ и по индуктивному предположению $U \stackrel{s}{=} B \stackrel{s}{=} A \equiv V$.

Аналогично рассматривается случай, когда буквы a и b входят в слово V . Тем самым рассмотрен случай, когда M содержит область с Q -меткой.

Предположим теперь, что некоторая буква x_i входит в слово U или V . Поскольку ∂M – простой замкнутый контур, то x_i является меткой ребра граничного контура некоторой области D . Пусть $U \equiv U_1 x_i U_2$, и пусть $x_i = B$ – соотношение, соответствующее метке ∂D . Тогда $U_1 B U_2 \stackrel{g}{=} V$, где $\deg(U_1 B U_2 V^{-1}) < \deg(UV^{-1})$. По индуктивному предположению $U_1 B U_2 \stackrel{s}{=} V$ и вместе с соотношением $x_i \stackrel{s}{=} B$ получаем $U \stackrel{s}{=} V$.

Остается рассмотреть случай, когда U и V – положительные слова в алфавите $a_1, a_2, \dots, a_n$ и M не содержит областей с Q -метками. Покажем, что карта M удовлетворяет условиям леммы 5. По лемме 4 задание (8) группы G удовлетворяет условиям $C(4)$ и $T(4)$. Тогда M является $(4, 4)$ -картой (см. [7, гл. 5]).

Заметим, что если e_1, e_2 – последовательные ребра, входящие в граничный контур некоторой области диаграммы M , и метки ребер e_i имеют вид $\varphi(e_1) \equiv X^\varepsilon, \varphi(e_2) \equiv Y^{-\varepsilon}$, где $\varepsilon = \pm 1$ и X, Y – положительные слова, то одно из слов $\varphi(e_i)$ содержит вхождение некоторой буквы $x_j^{\pm 1}$; если при этом e_i – внутреннее ребро, то $\varphi(e_i) \equiv x_j^{\pm 1}$.

Пусть $\nu\tau^{-1}$ – граничный контур диаграммы M , где $\varphi(\nu) \equiv U$ и $\varphi(\tau) \equiv V$. Пусть v_1 – начальная и v_2 – конечная вершины путей ν и τ .

Допустим, $d(v_i) = 2$ для $i = 1$ или $i = 2$. Пусть e_1, e_2 – последовательные ребра, входящие в граничный контур диаграммы M , где v_i – конец e_1 . Тогда для некоторых положительных слов X, Y имеем $\varphi(e_1) \equiv X^{-1}, \varphi(e_2) \equiv Y$ при $i = 1$ и $\varphi(e_1) \equiv X, \varphi(e_2) \equiv Y^{-1}$ при $i = 2$. Так как e_1, e_2 входят в граничный контур некоторой области диаграммы M , то мы получаем противоречие с предположением, что слова U и V не содержат вхождений букв x_j . Следовательно, $d(v_i) \geq 3$ ($i = 1, 2$).

Можно считать также, что $d(v) \geq 3$ для любой граничной вершины v диаграммы M , отличной от v_i . Действительно, если $d(v) = 2$, то последовательные ребра, инцидентные вершине v , можно объединить в одно.

Допустим, $d(v) = 3$ для некоторой такой вершины v . Пусть e_1, e_2 – последовательные ребра, входящие в граничный контур диаграммы M , где v – конец e_1 . Так как ∂M не имеет самопересечений, то v – начало также некоторого внутреннего ребра e_3 . В силу замечания выше $\varphi(e_3) \equiv x_j^{\pm 1}$. Так как $e_1e_3^{-1}$ и e_3e_2 входят в граничные контуры некоторых областей диаграммы M , метки которых являются P -словами, то ни одно из слов $\varphi(e_1e_3^{-1}), \varphi(e_3e_2)$ не может быть положительным или отрицательным. С другой стороны, $\varphi(e_1e_2)$ – положительное или отрицательное слово, и тогда одно из слов $\varphi(e_1e_3^{-1}), \varphi(e_3e_2)$ также должно быть положительным или отрицательным. Противоречие. Следовательно, $d(v) \geq 4$ для любой граничной вершины v диаграммы M , отличной от v_i .

Таким образом, условия леммы 5 выполнены. Тогда по лемме 5 в M найдется область с граничным циклом e_1e_2 , где e_1 – граничное ребро, а e_2 – внутреннее. Так как $\varphi(e_1)$ входит в UV^{-1} , то $\varphi(e_1)$ не содержит вхождений букв $x_j^{\pm 1}$. Следовательно, $\varphi(e_2) \equiv x_j^{\pm 1}$. Пусть для определенности e_1 входит в ν . Тогда $U \equiv U_1BU_2, \varphi(e_1) \equiv B, \varphi(e_2) \equiv x_j^{-1}$, где $B = x_j$ – определяющее соотношение полугруппы S . Как и выше, по индуктивному предположению имеем $U_1x_jU_2 \stackrel{s}{=} V$, поскольку $\deg(U_1x_jU_2V^{-1}) \leq \deg(UV^{-1}) - 1$, откуда $U \equiv U_1BU_2 \stackrel{s}{=} V$. Теорема 1 доказана.

Наши дальнейшие рассуждения касаются полугрупп с неравномерным распределением кусков в определяющих соотношениях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Условие $C_s(p, r)$ для (1) состоит в том, что для любого определяющего соотношения $A_i = B_i$ слово A_i (или B_i) не может быть представлено произведением менее чем p кусков, а B_i (соответственно A_i) – менее чем r кусков. По определению полугруппа S принадлежит классу $K_{p,r}^q$, если она обладает заданием, удовлетворяющим условиям $C_s(p, r)$ и $D(q)$.

Заметим, что если $l = \min\{p, r\}$, то $K_l^q \supseteq K_{p,r}^q$. Если $p = r$, то $K_{p,r}^q = K_p^q$. У автора и В. С. Губы было предположение, что все полугруппы из класса $K_{p,r}^2$ при $p + r \geq 6$ вложимы в группы. Следующая теорема опровергает это предположение.

ТЕОРЕМА 2. Для любых $p \geq 3$ и $q \geq 2$ в классе $K_{2,p}^q$ существует конечно определенная полугруппа S , не вложимая в группу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем строить полугруппу S из класса $K_{p,r}^q$, в которой не выполняется левое сокращение.

В качестве образующих полугруппы S возьмем следующее множество букв, где $t_1 = p$, $t_{i+1} = t_i(p-1) + 3 - p$ ($i = 1, 2, \dots, q-2$):

$$\begin{aligned} & a_0, a_1, \dots, a_{t_1}, \\ & b_0, b_1, \dots, b_{t_2}, \\ & \dots\dots\dots \\ & f_0, f_1, \dots, f_{t_{q-3}}, \\ & g_0, g_1, \dots, g_{t_{q-2}}, \\ & h_0, h_1, \dots, h_{t_{q-1}}, \\ & x_0, x_1, \dots, x_{t_{q-1}}. \end{aligned}$$

В качестве определяющих для S возьмем следующую систему равенств $\sigma = \bigcup_{i=1}^q \sigma_i$, где $s_i = t_{i+1} - (p-2)$:

$$\begin{aligned} \sigma_1 : a_1 a_2 \dots a_{t_1} = h_0 x_0, \quad \sigma_2 : \begin{cases} b_1 b_2 \dots b_p = a_1 a_0, \\ a_0 b_{p+1} \dots b_{2p-1} = a_2 a_0, \\ \dots\dots\dots \\ a_0 b_{s_1} \dots b_{t_2} = a_{t_1} a_0, \end{cases} \\ \sigma_3 : \begin{cases} c_1 c_2 \dots c_p = b_1 b_0, \\ b_0 c_{p+1} \dots c_{2p-1} = b_2 b_0, \\ \dots\dots\dots \\ b_0 c_{s_2} \dots c_{t_3} = b_{t_2} b_0, \end{cases} \quad \dots, \quad \sigma_{q-2} : \begin{cases} g_1 g_2 \dots g_p = f_1 f_0, \\ f_0 g_{p+1} \dots g_{2p-1} = f_2 f_0, \\ \dots\dots\dots \\ f_0 g_{s_{q-3}} \dots g_{t_{q-2}} = f_{t_{q-3}} f_0, \end{cases} \\ \sigma_{q-1} : \begin{cases} h_1 h_2 \dots h_p = g_1 g_0, \\ g_0 h_{p+1} \dots h_{2p-1} = g_2 g_0, \\ \dots\dots\dots \\ g_0 h_{s_{q-2}} \dots h_{t_{q-1}} = g_{t_{q-2}} g_0, \end{cases} \quad \sigma_q : \begin{cases} h_0 x_1 = h_1 h_0, \\ h_0 x_2 = h_2 h_0, \\ \dots\dots\dots \\ h_0 x_{t_{q-1}} = h_{t_{q-1}} h_0. \end{cases} \end{aligned}$$

Заметим, что все образующие полугруппы S , кроме $x_0, x_1, \dots, x_t$, являются кусками относительно σ . Далее, нет кусков длины больше 1. Отсюда следует, что левые части равенств систем $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{q-1}$ являются произведениями ровно p кусков, а правые части равенств систем $\sigma_2, \dots, \sigma_q$ состоят ровно из двух кусков. Правые части равенства σ_1 и левые части равенств σ_q не разложимы в произведение кусков.

Проверим условие $D(q)$. Правый граф полугруппы S не имеет циклов. Левый же граф обладает единственным циклом, определяемым первыми соотношениями систем $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q$. Этот цикл с q ребрами:

$$(h_0, a_1), (a_1, b_1), (b_1, c_1), \dots, (f_1, g_1), (g_1, h_1), (h_1, h_0).$$

Остается показать, что в S имеет место случай невыполнения сокращения слева. Следствиями соотношений σ являются следующие равенства:

$$\begin{aligned} h_0 x_0 &= a_1 \cdots a_{t_1}, & a_1 \cdots a_{t_1} a_0 &= b_1 \cdots b_{t_2}, \\ b_1 \cdots b_{t_2} b_0 &= c_1 \cdots c_{t_3}, & \dots, & f_1 \cdots f_{t_{q-3}} f_0 = g_1 \cdots g_{t_{q-2}}, \\ g_1 \cdots g_{t_{q-2}} g_0 &= h_1 \cdots h_{t_{q-1}}, & h_1 \cdots h_{t_{q-1}} h_0 &= h_0 x_1 \cdots x_{t_{q-1}}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$h_0 x_0 a_0 b_0 a_0 \cdots f_0 g_0 h_0 = h_0 x_1 \cdots x_{t_{q-1}}.$$

При сокращении слева на h_0 получим равенство двух графически не совпадающих слов, каждое из которых не содержит вхождений определяющих слов полугруппы S , что не может иметь места в S . Теорема доказана.

ПРИМЕР. Рассмотрим следующую полугруппу S из класса $K_{2,\infty}^2$:

$$S = \langle\langle a, b, c, x, y, z; a^2 = cx, ab = cy, b^2 = az \rangle\rangle.$$

Очевидно, $cxz = a^2z = ab^2 = cyb$ в S . Поскольку $xz \neq yb$ в S , то в S не выполняется сокращение слева и, следовательно, S не вложима в группу.

ЗАМЕЧАНИЕ. Правые графы полугрупп, построенных в теореме 2 и в только что рассмотренном примере, не содержат циклов, поэтому (см. [2, теорема 1]) в этих полугруппах выполняется правостороннее сокращение. Вопрос о вложимости в группу полугрупп с двусторонним сокращением из классов $K_{2,p}^q$ ($p \geq 3, q \geq 2$) и $K_{2,\infty}^2$ остается открытым.

В оставшейся части заметки мы рассмотрим некоторый класс полугрупп $(K_2^2)^\Xi$, включающий класс $K_{2,\infty}^3$, и докажем (теорема 3), что все полугруппы из этого класса вложимы в группу.

Пусть Γ – левый граф в смысле Адяна задания (1) полугруппы S . Построим новый граф Γ^* , заменяя некоторые ребра графа Γ на ориентированные. Пусть $A = B$ – определяющее соотношение полугруппы S , $A \equiv aA', B \equiv bB'$ и e – соответствующее ребро графа Γ , соединяющее буквы a и b . Букву x назовем *изолированной*, если x входит не более одного раза в определяющие соотношения полугруппы S (и, следовательно, не может входить ни в какой S -кусок). В зависимости от того, содержат или нет слова A и B изолированные буквы, рассмотрим четыре случая:

- 1) если A и B не содержат изолированных букв, то ребро e оставляем неориентированным;
- 2) если A содержит изолированную букву, а B – нет, то ребро e ориентируем от b к a ;
- 3) если A не содержит изолированных букв, а B содержит изолированную букву, то e ориентируем от a к b ;
- 4) если оба слова A и B содержат изолированные буквы, то ребро e считаем ориентированным одновременно в обоих возможных направлениях.

Аналогично строится правый граф Γ^* для S .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Условие* Ξ для S состоит в том, что любой цикл как левого, так и правого графа Γ^* для S содержит по меньшей мере два ребра, ориентированных в одном направлении. По определению класс $(K_2^2)^\Xi$ состоит из всех полугрупп, удовлетворяющих условиям $C_s(2)$, $D(2)$ и Ξ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Для выполнения условия Ξ достаточно наличия в каждом цикле трех ориентированных ребер. Условие $C_s(2, \infty)$ гарантирует ориентированность каждого ребра графа Γ^* . Отсюда следует $K_{2,\infty}^3 \subset (K_2^2)^\Xi$.

ТЕОРЕМА 3. *Любая полугруппа S из класса $(K_2^2)^\Xi$ вложима в группу.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – связная односвязная диаграмма над заданием группы G . Будем рассматривать M и как ориентированный граф в обычном смысле. Для этого каждое ребро диаграммы M разбиваем, насколько это необходимо, вершинами степени 2 на ребра, имеющие только позитивные или негативные метки. Каждому ребру e полученной диаграммы M' приписываем ориентацию, в направлении которой его метка $\varphi(e)$ читается как позитивное слово. Такую диаграмму M' будем называть *позитивно ориентированной*. Вершину v позитивно ориентированной диаграммы такую, что v не имеет входящих в нее ребер, будем называть *источником*. Если v не имеет выходящих из нее ребер, то v назовем *стоком*. Если при этом v – внутренняя вершина, то v называем соответственно *внутренним источником* и *внутренним стоком*.

Пусть M – позитивно ориентированная диаграмма над заданием (2) группы G с теми же соотношениями, что и у полугруппы S . Предположим, что метка граничного контура M имеет вид UV^{-1} , где U и V – позитивные слова. Реммерс [9, теорема 3.2] показал, что если M не имеет ни внутренних источников, ни внутренних стоков, то $U \stackrel{s}{=} V$.

Таким образом, для доказательства вложимости полугруппы S в группу G достаточно показать, что для любых позитивных слов U, V из $U \stackrel{s}{=} V$ вытекает существование позитивно ориентированной диаграммы M над заданием (2) группы G с меткой граничного цикла UV^{-1} , не содержащей внутренних источников и стоков.

Пусть $S \in (K_2^2)^\Xi$, и пусть U и V – позитивные слова такие, что $U \stackrel{s}{=} V$. Пусть M – приведенная позитивно ориентированная диаграмма над (2) с граничным циклом $\nu\tau^{-1}$, где $\varphi(\nu) \equiv U$ и $\varphi(\tau) \equiv V$. Индукцией по числу $d(M)$ областей диаграммы M докажем, что M не содержит внутренних источников и стоков.

Если $d(M) \leq 1$, то утверждение очевидно. Пусть $d(M) > 1$. Допустим, что вершина v диаграммы M является внутренним источником или внутренним стоком. Предположим для определенности, что v – внутренний источник (для случая, когда v – внутренний сток, рассуждения симметричны). Пусть $T_1, T_2, \dots, T_m$ – метки всех ребер, выходящих из v и пронумерованных в положительном направлении обхода вокруг вершины v . Так как T_i – позитивные слова, то для некоторых позитивных слов U_i, V_i ($i = 1, 2, \dots, m$) слова

$$T_1 U_1 V_1^{-1} T_2^{-1}, T_2 U_2 V_2^{-1} T_3^{-1}, \dots, T_{m-1} U_{m-1} V_{m-1}^{-1} T_m^{-1}, T_m U_m V_m^{-1} T_1^{-1}$$

являются метками областей, границе которых принадлежит вершина v . Тогда соотношения

$$T_1 U_1 = T_2 V_1, \quad T_2 U_2 = T_3 V_2, \quad \dots, \quad T_{m-1} U_{m-1} = T_m V_{m-1}, \quad T_m U_m = T_1 V_m \quad (10)$$

с точностью до перестановки левых и правых частей являются определяющими соотношениями полугруппы S .

Из неприводимости диаграммы M следует, что метки внутренних ребер являются кусками. Следовательно, $T_1, T_2, \dots, T_m$ – куски и по лемме 1 – S -куски. Каждое из слов U_i непусто, в противном случае T_i является одновременно определяющим словом и куском, что невозможно по условию $C_s(2)$. По той же причине непусты слова V_i .

По условию Ξ либо среди левых, либо среди правых частей соотношений (10) найдутся по меньшей мере два слова, содержащие изолированные буквы. Рассмотрим случай, когда такими словами являются левые части $A_j \equiv (T_j U_j)^*$ и $A_k \equiv (T_k U_k)^*$ ($j < k$). Пусть α и β – пути с метками $\varphi(\alpha) \equiv A_j$, $\varphi(\beta) \equiv A_k$. Так как изолированные буквы не могут входить в куски, то каждый из путей α и β содержит граничное ребро. Пусть $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ и $\beta = \beta_1 \beta_2 \beta_3$, где α_2 и β_2 – некоторые максимальные подпути путей α и β , состоящие только из граничных ребер диаграммы M , причем, можно считать, что метка пути α_2 содержит изолированную букву, а путь β_1 не содержит граничных ребер. Учитывая, что граничные циклы областей и всей диаграммы M обходятся в одном направлении, получаем, что α_2 и β_2 входят в ν . Пусть γ – подпуть пути ν , начало которого совпадает с концом α_2 , а конец – с начальной вершиной β_2 (рис. 2).

Рис. 2

Пусть M_1 – поддиаграмма диаграммы M с граничным контуром $\alpha_1 \alpha_2 \gamma \beta_1^{-1}$. Пусть $\varphi(\alpha_i) = X_i$ ($i = 1, 2$), $\varphi(\beta_1) = Y_1$ и $\varphi(\gamma) = Z$. Тогда $X_1 X_2 Z \stackrel{g}{=} Y_1$. Поскольку $d(M_1) < d(M)$, то по индуктивному предположению $X_1 X_2 Z \stackrel{s}{=} Y_1$. Поскольку Y_1 – собственное начало A_k , то в силу условия $C_s(2)$ к нему неприменимо никакое соотношение полугруппы S . Следовательно, $X_1 X_2 Z \equiv Y_1$. Но это невозможно, так как слово Y_1 как метка внутреннего пути β_1 разложимо в произведение кусков, а $X_2 Z$ – нет, поскольку метка пути $\alpha_2 \gamma$ содержит изолированную букву.

Случай, когда слова, содержащие изолированные буквы, находятся среди правых частей соотношений (10), симметричен рассмотренному. Таким образом, мы получили противоречие из предположения о существовании в M внутреннего источника. В случае, когда M обладает внутренним стоком, рассуждения совершенно аналогичны. Теорема 3 доказана.

ПРИМЕРЫ. Полугруппы

$$\begin{aligned} &\langle\langle a, b, c, d, x, y, z; ab = bxc, ba = cys, ca = azb \rangle\rangle, \\ &\langle\langle a, b, c, x, y, z; c^2 = ax, ab = cy, b^2 = az \rangle\rangle \end{aligned}$$

лежат в классе $(K_2^2)^\Xi$ и по теореме 3 вложимы в группу. Первая принадлежит классу $K_{2,\infty}^3$, а вторая не принадлежит.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Адян С. И. О вложимости полугрупп в группы // Докл. АН СССР. 1960. Т. 133. № 2. С. 255–257.
- [2] Адян С. И. Определяющие соотношения и алгоритмические проблемы для групп и полугрупп. Тр. МИАН. Т. 85. М.: Наука, 1966.
- [3] Kashintsev E. V. Small cancellation conditions and embeddability of semigroups in groups // Intern. J. Algebra Comput. 1992. V. 2. № 4. P. 433–441.
- [4] Maltsev A. I. On the immersion of an algebraic ring into a field // Math. Ann. 1937. V. 133. P. 689–691.
- [5] Губа В. С. Об условиях вложимости полугрупп в группы // Матем. заметки. 1994. Т. 56. № 2. С. 3–14.
- [6] Kilgour C. W. Embedding Monoids in Groups. Preprint: Univ. of Glasgow, 1997.
- [7] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
- [8] Cho J. R., Pride S. J. Embedding semigroups into groups and the asphericity of semigroups // Intern. J. Algebra Comput. 1993. V. 3. № 1. P. 1–13.
- [9] Remmers J. H. On the geometry of semigroup presentations // Adv. Math. 1980. V. 36. P. 283–296.

Поступило
20.12.1998