Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Щедрик, О взаимосвязи инвариантных множителей блочно-треугольной матрицы и ее диагональных блоков, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 4, 599–612

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm7826>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 17:52:38

УДК 512.64

О взаимосвязи инвариантных множителей блочно-треугольной матрицы и ее диагональных блоков

В. П. Щедрик

При некоторых ограничениях на каноническую диагональную форму блочно-треугольной матрицы указана взаимосвязь между инвариантными множителями ее диагональных блоков.

Библиография: 7 названий.

В 1952 г. Ротом была опубликована статья [1], выделявшаяся из ряда других не только тем, что в ней полностью решалась поставленная задача – поражала элегантность формулировки результата. А именно, было показано, что матричное уравнение

$$AX + YB = C \quad (1)$$

(соответственно $AX + XB = C$) над полем имеет решение тогда и только тогда, когда матрицы

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

эквивалентны (соответственно подобны) между собой. Понятно желание других исследователей обобщить этот результат – благо автор оставил широкое поле для маневра. Среди множества работ, посвященных этой тематике, выделим лишь некоторые. Так в [2] показано, что результат Рота, касающийся разрешимости уравнения (1) (далее *свойство Рота*) остается правильным в случае коммутативных областей главных идеалов. В [3] этот результат был обобщен на случай произвольных коммутативных колец. Отдавая дань уважения и признания результатов Рота, в работе [4] было введено понятие колец со свойством Рота, как таких колец, над которыми справедливо свойство Рота. Примером таких колец являются коммутативные области элементарных делителей [5]. Над такими кольцами эквивалентность матриц равносильна равенству (с точностью до ассоциированности) соответствующих инвариантных множителей этих матриц. Таким образом, в этом случае задача сводится к установлению взаимосвязи между инвариантными множителями блочно-треугольной матрицы и ее диагональных блоков. Первый результат в этом направлении был получен Ньюменом [6]. Он показал, что над коммутативными

областями главных идеалов в случае, когда $(\det A, \det B) = 1$, множество элементарных делителей матрицы

$$\left\| \begin{array}{cc} A & 0 \\ C & B \end{array} \right\|$$

является объединением элементарных делителей матриц A и B . Настоящая работа посвящена исследованию взаимосвязи между инвариантными множителями матриц

$$\left\| \begin{array}{cc} A & 0 \\ C & B \end{array} \right\|, \quad A, \quad B.$$

Пусть R – коммутативная область элементарных делителей и $A = \|a_{ij}\| - (m \times n)$ -матрица над R , $m > n$. Обозначим через $\delta_k(A)$ н.о.д. миноров максимального порядка матрицы A , которые содержат ее последние k строк, $k \leq n$.

ЛЕММА 1. Если $U = \|u_{ij}\| \in GL_{m-k}(R)$, то $\delta_k(A) = \delta_k((U \oplus E_k)A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим матрицу

$$B = (U \oplus E_k)A = \left\| \begin{array}{ccc} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m-k,1} & \dots & b_{m-k,n} \\ a_{m-k+1,1} & \dots & a_{m-k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\|.$$

Каждую подматрицу n -го порядка матрицы B , содержащую ее последние k строки можно записать так:

$$\underbrace{\left\| \begin{array}{ccc} b_{i_1 1} & \dots & b_{i_1 n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i_{n-k} 1} & \dots & b_{i_{n-k} n} \\ a_{m-k+1,1} & \dots & a_{m-k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\|}_{B_{i_1, \dots, i_{n-k}}} = \underbrace{\left\| \begin{array}{ccc} u_{i_1 1} & \dots & u_{i_1, m-k} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{i_{n-k} 1} & \dots & u_{i_{n-k}, m-k} \\ & & & 1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{array} \right\|}_{U_{i_1, \dots, i_{n-k}}} \left\| \begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m-k,1} & \dots & a_{m-k,n} \\ a_{m-k+1,1} & \dots & a_{m-k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\|,$$

где $1 \leq i_1 < \dots < i_{n-k} \leq m-k$. Заметим, что необходимым условием неравенства нулю минора максимального (n -го) порядка матрицы $U_{i_1, \dots, i_{n-k}}$ является наличие в нем последних k строк этой матрицы. Запишем $\det U_{i_1, \dots, i_{n-k}}$ как сумму произведений соответствующих миноров n -го порядка матриц $U_{i_1, \dots, i_{n-k}}$ и A . На основании сделанного замечания делаем вывод, что каждое отличное от нуля слагаемое

является произведением минора матрицы A , содержащего ее последние k строки на соответствующий минор матрицы $U_{i_1, \dots, i_{n-k}}$. Поэтому $\delta_k(A) \mid \det B_{i_1, \dots, i_{n-k}}$. Следовательно, $\delta_k(A) \mid \delta_k((U \oplus E_k)A)$. Аналогичным образом

$$\delta_k(B) \mid \delta_k((U^{-1} \oplus E_k)B) = \delta_k((U^{-1} \oplus E_k)(U \oplus E_k)A) = \delta_k(A).$$

Поскольку н.о.д. определяется с точностью до ассоциированности, то $\delta_k(A) = \delta_k(B)$. Доказательство завершено.

Вычеркнем i -ю строку и j -й столбец матрицы A . Н.о.д. миноров максимального порядка полученной матрицы обозначим через b_{ij} . Матрицу $A^* = \|b_{ij}\|$ будем называть *дополняющей матрицей матрицы A* .

ЛЕММА 2. Пусть $A = \|a_{ij}\| - (n \times n)$ -матрица. Н.о.д. элементов каждой $t \times k$ -подматрицы, $t + k > n$, матрицы A^* является делителем $\det A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть β – н.о.д. элементов матрицы

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{t1} & \dots & b_{tk} \end{vmatrix},$$

где $t + k = n + 1$. Рассмотрим $(t \times (t - 1))$ -подматрицу матрицы A :

$$A_{tk} = \begin{vmatrix} a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{t,k+1} & \dots & a_{tn} \end{vmatrix}.$$

В группе $GL_t(R)$ существует такая матрица U , что

$$UA_{tk} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & 0 & \dots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{t1} & c_{t2} & \dots & c_{t,t-1} \end{vmatrix}.$$

Следовательно,

$$(U \oplus E_{n-t})A = \begin{vmatrix} f_{11} & \dots & f_{1k} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ f_{21} & \dots & f_{2k} & c_{21} & 0 & \dots & 0 \\ f_{31} & \dots & f_{3k} & c_{31} & c_{32} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{t1} & \dots & f_{tk} & c_{t1} & c_{t2} & \dots & c_{t,t-1} \\ a_{t+1,1} & \dots & a_{t+1,k} & a_{t+1,k+1} & a_{t+1,k+2} & \dots & a_{t+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & a_{n,k+1} & a_{n,k+2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = C.$$

Заметим, что миноры $b_{11}, b_{21}, \dots, b_{t1}$ можно интерпретировать, как все миноры максимального порядка матрицы

$$\begin{vmatrix} a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = F_1,$$

которые содержат ее последние $n - t$ строки. Поэтому

$$\delta_{n-t}(F_1) = (b_{11}, b_{21}, \dots, b_{t1}).$$

Обозначим через L_1 матрицу, получающуюся из матрицы C вычеркиванием ее 1-го столбца. Пусть $C^* = \|d_{ij}\|_1^n$. Поскольку $L_1 = (U \oplus E_{n-t})F_1$, то на основании леммы 1 $\delta_{n-t}(F_1) = \delta_{n-t}(L_1)$. Заметив, что $\delta_{n-t}(L_1) = (d_{11}, d_{21}, \dots, d_{t1})$, приходим к заключению, что

$$(b_{11}, b_{21}, \dots, b_{t1}) = (d_{11}, d_{21}, \dots, d_{t1}).$$

Аналогично показываем, что

$$(b_{1i}, b_{2i}, \dots, b_{ti}) = (d_{1i}, d_{2i}, \dots, d_{ti}), \quad i = 1, \dots, k.$$

Следовательно, β является делителем всех элементов матрицы

$$\begin{vmatrix} d_{11} & \dots & d_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{t1} & \dots & d_{tk} \end{vmatrix}.$$

В частности, $\beta \mid (d_{11}, d_{12}, \dots, d_{1k})$. Приняв во внимание, что

$$\det C = f_{11}d_{11} - f_{12}d_{12} + \dots + (-1)^{k+1}f_{1k}d_{1k},$$

получаем $\beta \mid \det C$. Поскольку $\det A$ отличается от $\det C$ лишь обратимым множителем, приходим к заключению, что $\beta \mid \det A$.

Если же $(t \times k)$ -подматрица матрицы A^* находится не в левом верхнем углу, то перестановкой строк и столбцов матрицы A мы получим матрицу B , в которой выделенная подматрица будет находиться в нужном нам месте. Поэтому, $\beta \mid \det B$. Заметив, что $\det A = \pm \det B$, получаем $\beta \mid \det A$. Доказательство завершено.

СЛЕДСТВИЕ. *Н.о.д. элементов каждой $(t \times k)$ -подматрицы, $t + k > n$, взаимной матрицы A_* является делителем $\det A$.*

Обозначим через $\langle A \rangle_i$ н.о.д. миноров i -го порядка матрицы A , а н.о.д. миноров максимального порядка матрицы A — через $\langle A \rangle$.

ЛЕММА 3. *Пусть $A = \|a_{ij}\|$ — $(m \times n)$ -матрица. Тогда н.о.д. элементов каждой $(t \times k)$ -подматрицы, $t + k > \min(m, n)$, взаимной матрицы $A^* = \|b_{ij}\|$ является делителем $\langle A \rangle$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для определенности положим $m \geq n$. Случай $m = n$ рассмотрен в лемме 2. Поэтому пусть $m > n$. Обозначим через β н.о.д. элементов матрицы

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{t1} & \dots & b_{tk} \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим $(n \times n)$ -подматрицу матрицы A вида

$$C = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{t1} & \dots & a_{tn} \\ * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots \\ * & \dots & * \end{vmatrix}.$$

И пусть $C^* = \|d_{ij}\|_1^n$ – ее дополняющая матрица. Поскольку $b_{ij} \mid d_{ij}$, $i = 1, \dots, t$, $j = 1, \dots, k$, то

$$\beta \mid \begin{vmatrix} d_{11} & \dots & d_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{t1} & \dots & d_{tk} \end{vmatrix} = F.$$

Тогда если γ – н.о.д. элементов матрицы F , то $\beta \mid \gamma$. На основании леммы 2 $\gamma \mid \det C$, а значит, и $\beta \mid \det C$.

Теперь рассмотрим подматрицу матрицы A

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{i_1 1} & \dots & a_{i_1 n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_n 1} & \dots & a_{i_n n} \end{vmatrix}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m,$$

которая не содержит ее j -й строки, $1 \leq j \leq t$. Согласно определению b_{j1} равно н.о.д. миноров $(n-1)$ -го порядка матрицы

$$A_{j1} = \begin{vmatrix} a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{j-1,2} & \dots & a_{j-1,n} \\ a_{j+1,2} & \dots & a_{j+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

Матрица

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 2} & \dots & a_{i_1 n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_n 2} & \dots & a_{i_n n} \end{vmatrix}$$

является подматрицей матрицы A_{j1} . Поэтому

$$b_{j1} \mid \left\langle \begin{vmatrix} a_{i_1 2} & \dots & a_{i_1 n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_n 2} & \dots & a_{i_n n} \end{vmatrix} \right\rangle,$$

где угловые скобки означают определитель заключенной в них матрицы. Отсюда вытекает, что $b_{j1} \mid \det D_j$. Поскольку $\beta \mid b_{j1}$, то $\beta \mid \det D_j$. Следовательно, β является делителем миноров максимального порядка матрицы A .

Заметив, что расположение выбранной нами $(t \times k)$ -подматрицы матрицы A^* , как и при доказательстве леммы 2, не влияет на окончательный результат, заканчиваем доказательство.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $(k \times k)$ -матрицы D_1 и D_3 имеют канонические диагональные формы $\Delta_1 = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ и $\Delta_3 = \text{diag}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$ соответственно. Причем

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ D_2 & D_3 \end{pmatrix} \sim \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_k, \underbrace{\varphi, \dots, \varphi}_k), \quad \varphi \neq 0.$$

Тогда инвариантные множители α_i и β_j можно выбрать таким образом, что

$$\alpha_t \beta_{k-t+1} = \varphi, \quad i = 1, \dots, k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для матриц D_1 и D_3 существуют такие обратимые матрицы P_1, Q_1, P_3, Q_3 , что

$$P_1 D_1 Q_1 = \Delta_1, \quad P_3 D_3 Q_3 = \Delta_3.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_3 \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 D_1 Q_1 & 0 \\ P_3 D_2 Q_1 & P_3 D_3 Q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 \\ D'_2 & \Delta_3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, без ограничения общности можно считать, что матрица D имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & 0 & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & \alpha_{s-1} & & & & & & & \\ & & & \alpha_s & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ 0 & & & & & \alpha_k & & & & \\ a_{11} & \dots & a_{1.s-1} & a_{1s} & \dots & a_{1k} & \beta_1 & & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \ddots & & \\ a_{t-1.1} & \dots & a_{t-1.s-1} & a_{t-1.s} & \dots & a_{t-1.k} & & \beta_{t-1} & & \\ a_{t1} & \dots & a_{t.s-1} & a_{ts} & \dots & a_{tk} & & \beta_t & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & \ddots & \\ a_{k1} & \dots & a_{k.s-1} & a_{ks} & \dots & a_{kk} & 0 & & & \beta_k \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 \\ A & \Delta_3 \end{pmatrix}.$$

Пусть $t + s = k + 1$. Сперва покажем, что $\varphi \mid \alpha_s \beta_t$. Пусть $(\alpha_s \beta_t, \varphi) = \tau_s$. Следовательно, $\varphi = \tau_s \sigma_s$, причем

$$\left(\frac{\alpha_s \beta_t}{\tau_s}, \sigma_s \right) = 1. \tag{2}$$

Покажем, что σ_s является делителем всех миноров k -го порядка матрицы D . Рассмотрим подматрицу $(2k-1)$ -го порядка матрицы D

$$D_{st} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & & & & & 0 & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & \alpha_{s-1} & & & & & & & \\ & & & \alpha_{s+1} & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ 0 & & & & & \alpha_k & & & & \\ a_{11} & \dots & a_{1,s-1} & a_{1,s+1} & \dots & a_{1k} & \beta_1 & & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \ddots & & \\ a_{t-1,1} & \dots & a_{t-1,s-1} & a_{t-1,s+1} & \dots & a_{t-1,k} & & \beta_{t-1} & & \\ a_{t+1,1} & \dots & a_{t+1,s-1} & a_{t+1,s+1} & \dots & a_{t+1,k} & & & \beta_{t+1} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & \ddots \\ a_{k1} & \dots & a_{k,s-1} & a_{k,s+1} & \dots & a_{kk} & 0 & & & \beta_k \end{vmatrix}.$$

Пусть $d_{st}^{(k-1)}$ – произвольный минор $(k-1)$ -го порядка матрицы D_{st} . Поскольку

$$D \sim \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_k, \varphi, \dots, \varphi),$$

то каждый минор $(k+1)$ -го порядка матрицы D делится на φ . В частности, и минор $\alpha_s \beta_t d_{st}^{(k-1)}$. Следовательно,

$$\sigma_s \mid \frac{\alpha_s \beta_t}{\tau_s} d_{st}^{(k-1)}.$$

Из равенства (2) вытекает, что $\sigma_s \mid d_{st}^{(k-1)}$. Таким образом, σ_s является делителем всех миноров $(k-1)$ -го порядка матрицы D_{st} , в частности, и

$$\begin{aligned} \sigma_s \mid \alpha_1 \beta_1 \beta_2 \dots \beta_{t-1} \beta_{t+1} \dots \beta_{k-1} &\implies \sigma_s \mid \alpha_1 \beta_1 \beta_2 \dots \beta_{k-1}, \\ \sigma_s \mid \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \dots \beta_{t-1} \beta_{t+1} \dots \beta_{k-2} &\implies \sigma_s \mid \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \dots \beta_{k-2}, \\ \dots & \\ \sigma_s \mid \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{s-1} \beta_1 \beta_2 \dots \beta_{t-1} &\implies \sigma_s \mid \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{s-1} \beta_1 \beta_2 \dots \beta_t. \end{aligned}$$

А также

$$\begin{aligned} \sigma_s \mid \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{s-1} \beta_1 \beta_2 \dots \beta_{t-1} &\implies \sigma_s \mid \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s \beta_1 \beta_2 \dots \beta_{t-1}; \\ \sigma_s \mid \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{s-1} \alpha_{s+1} \beta_1 \beta_2 \dots \beta_{t-2} &\implies \sigma_s \mid \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{s+1} \beta_1 \beta_2 \dots \beta_{t-2}; \\ \dots & \\ \sigma_s \mid \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{s-1} \alpha_{s+1} \dots \alpha_{k-1} \beta_1 &\implies \sigma_s \mid \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} \beta_1. \end{aligned}$$

Каждый минор k -го порядка, главная диагональ которого содержит только диагональные элементы матрицы D , имеет вид $\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_p} \beta_{j_1} \dots \beta_{j_q}$, где индексы $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \in \{1, \dots, k\}$, $p+q=k$. Поскольку $\alpha_1 \dots \alpha_p \mid \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_p}$ и $\beta_1 \dots \beta_q \mid \beta_{j_1} \dots \beta_{j_q}$,

Тогда тем более

$$\sigma_s \mid \alpha_1 \cdots \alpha_\mu \left\langle \begin{array}{ccc} a_{\nu+1,\mu+1} & \cdots & a_{\nu+1,k} \\ a_{\nu+2,\mu+1} & \cdots & a_{\nu+2,k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k,\mu+1} & \cdots & a_{kk} \end{array} \right\rangle \beta_1 \cdots \beta_\nu.$$

Следовательно, $\sigma_s \mid \alpha_1 \cdots \alpha_\mu \beta_1 \cdots \beta_\nu \det K$. Если же $\nu > \mu$, то искомый результат получается из того, что

$$\sigma_s \mid \beta_1 \cdots \beta_\nu \left\langle \begin{array}{ccc} a_{\nu+1,1} & \cdots & a_{\nu+1,k} \\ a_{\nu+2,1} & \cdots & a_{\nu+2,k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{array} \right\rangle.$$

Аналогичным образом показываем, что $\sigma_s \mid \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_p} \beta_{j_1} \cdots \beta_{j_q}$, где $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \in \{1, \dots, k\}$, $p + q = k$. Таким образом, мы показали, что σ_s является делителем всех миноров k -го порядка матрицы D . Приняв во внимание, что

$$D \sim \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_k, \varphi, \dots, \varphi), \quad (3)$$

получаем $\sigma_s \in U(R)$. Вспомнив, что $\varphi = \tau_s \sigma_s$, приходим к заключению, что φ и τ_s ассоциированы между собой. А так как н.о.д. элементов определяется с точностью до ассоциированности, то $(\alpha_s \beta_t, \varphi) = \varphi$. Отсюда вытекает, что $\varphi \mid \alpha_s \beta_t$, $t + s = k + 1$. Следовательно, $\alpha_s \beta_t = \varphi u_s$. Тогда

$$\det D = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_k = (\alpha_1 \beta_k)(\alpha_2 \beta_{k-1}) \cdots (\alpha_k \beta_1) = \varphi^k u_1 u_2 \cdots u_k.$$

С другой стороны, согласно (3) имеем $\det D = \varphi^k e$, где $e \in U(R)$. Таким образом, $u_1 u_2 \cdots u_k = e \in U(R)$. Заметив, что инвариантные множители матрицы выбираются с точностью до делителей единицы, приходим к заключению, что мы можем выбрать α_i и β_j так, чтобы

$$\alpha_1 \beta_k = \alpha_2 \beta_{k-1} = \cdots = \alpha_k \beta_1 = \varphi.$$

Теорема доказана.

Для рассмотрения общего случая установим несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 4. Пусть A – матрица порядка $q + p$ вида

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix} \sim \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{q+p-s}, \underbrace{\varphi, \dots, \varphi}_s),$$

где $A_1 = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q)$, $\alpha_i \mid \alpha_{i+1}$. Тогда, если $q > s$, то

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{q-s} = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем матрицу A в блочном виде:

$$A = \left\| \begin{array}{cccccc} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & \alpha_{q-s-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \alpha_{q-s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{q-s+1} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \alpha_q & 0 \\ \hline * & * & * & & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & * & * & & * & * \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{array} \right\|.$$

Элемент α_{q-s} делит все элементы матрицы B_2 , имеющей размеры $(s+1) \times (q+p)$. Заметив, что каждый минор порядка $1 + (q-s-1) + p = q+p-s$ содержит, по крайней мере, одну строку, составленную из элементов матрицы B_2 , приходим к заключению, что α_{q-s} является делителем н.о.д. всех миноров $(q+p-s)$ -го порядка матрицы A , который по условию равен единице. Следовательно, $\alpha_{q-s} = 1$. Отсюда вытекает, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{q-s} = 1$.

ЛЕММА 5. Если

$$A = \left\| \begin{array}{cccccc} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & \dots & a_{s,k-1} & a_{sk} & a_{s,k+1} & \dots & a_{sn} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{s+2,1} & \dots & a_{s+2,k-1} & a_{s+2,k} & a_{s+2,k+1} & \dots & a_{s+2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{m,k-1} & a_{mk} & a_{m,k+1} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\| \sim \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k),$$

где $k = \min(m, n)$, $\alpha_i \mid \alpha_{i+1}$, $i = 1, \dots, k-1$, то

$$\left\| \begin{array}{cccccc} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & \dots & a_{s,k-1} & a_{s,k+1} & \dots & a_{sn} \\ a_{s+2,1} & \dots & a_{s+2,k-1} & a_{s+2,k+1} & \dots & a_{s+2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{m,k-1} & a_{m,k+1} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\| \sim \text{diag}(\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко убедиться в правильности следующих эквивалентностей:

$$A \sim \left\| \begin{array}{cccccc} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & 0 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & \dots & a_{s,k-1} & 0 & a_{s,k+1} & \dots & a_{sn} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{s+2,1} & \dots & a_{s+2,k-1} & 0 & a_{s+2,k+1} & \dots & a_{s+2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{m,k-1} & 0 & a_{m,k+1} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\|$$

$$\sim \left\| \begin{array}{c|cccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{s1} & \dots & a_{s,k-1} & a_{s,k+1} & \dots & a_{sn} \\ 0 & a_{s+2,1} & \dots & a_{s+2,k-1} & a_{s+2,k+1} & \dots & a_{s+2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{m1} & \dots & a_{m,k-1} & a_{m,k+1} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\|$$

$$= \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & \text{diag}(\beta_2, \dots, \beta_k) \end{array} \right\|,$$

где $A_1 \sim \text{diag}(\beta_2, \dots, \beta_k)$, $\beta_i \mid \beta_{i+1}$, $i = 2, \dots, k-1$. Отсюда вытекает, что α_i и β_i , $i = 2, \dots, k$, ассоциированы между собой.

ЛЕММА 6. Пусть

$$A = \left\| \begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{array} \right\| \sim \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \Delta,$$

где $\alpha_i \mid \alpha_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$. Тогда

$$B = \left\| \begin{array}{ccc} A_{11} & 0 & A_{12} \\ 0 & 1 & 0 \\ A_{21} & 0 & A_{22} \end{array} \right\| \sim \text{diag}(1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для матрицы B найдутся такие обратимые матрицы P, Q , что

$$PBQ = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & A \end{array} \right\| = B_1.$$

Для матрицы A также существуют обратимые матрицы U, V такие, что $UAV = \Delta$. Тогда

$$B \sim B_1 \sim \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & U \end{array} \right\| B_1 \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & V \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & UAV \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & \Delta \end{array} \right\| = \text{diag}(1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

что и нужно было доказать.

ТЕОРЕМА 2. Пусть квадратные матрицы D_1 и D_3 имеют канонические диагональные формы $\Delta_1 = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q)$ и $\Delta_3 = \text{diag}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$ соответственно. Причем

$$D = \left\| \begin{array}{cc} D_1 & 0 \\ D_2 & D_3 \end{array} \right\| \sim \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{p+q}, \underbrace{\varphi, \dots, \varphi}_s).$$

Тогда выполнены следующие утверждения:

- 1) если $p \leq s \leq q$, то инвариантные множители α_i и β_j можно выбрать таким образом, что

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_2 = \dots = \alpha_{q-s} = 1, \\ \alpha_{q-s+1}\beta_p &= \alpha_{q-s+2}\beta_{p-1} = \dots = \alpha_{q-s+p}\beta_1 = \varphi, \\ \alpha_{q-s+p+1} &= \alpha_{q-s+p+2} = \dots = \alpha_q = \varphi; \end{aligned}$$

II) если $p, q \geq s$, то инвариантные множители α_i и β_j можно выбрать таким образом, что

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \alpha_2 = \dots = \alpha_{q-s} = 1, \\ \beta_1 &= \beta_2 = \dots = \beta_{p-s} = 1, \\ \alpha_{q-s+1}\beta_p &= \alpha_{q-s+2}\beta_{p-1} = \dots = \alpha_q\beta_{p-s+1} = \varphi;\end{aligned}$$

III) если $p, q \leq s$, то инвариантные множители α_i и β_j можно выбрать таким образом, что

$$\begin{aligned}\alpha_1\beta_{q+p-s} &= \alpha_2\beta_{q+p-s-1} = \dots = \alpha_{q+p-s}\beta_1 = \varphi, \\ \alpha_{q+p-s+1} &= \alpha_{q+p-s+2} = \dots = \alpha_q = \beta_{q+p-s+1} = \beta_{q+p-s+2} \dots = \beta_p = \varphi.\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p \leq s \leq q$. На основании леммы 4

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{q-s} = 1.$$

Вычеркнув в матрице D первые $q - s$ строк и столбцов, получим матрицу

$$\left\| \begin{array}{cc} C_1 & 0 \\ C_2 & D_3 \end{array} \right\|,$$

имеющую согласно лемме 5 каноническую диагональную форму

$$\text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_p, \underbrace{\varphi, \dots, \varphi}_s).$$

Воспользовавшись леммой 6, получим

$$\left\| \begin{array}{cc|cc} C_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & E_{s-p} & 0 \\ C_2 & 0 & D_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} C'_1 & 0 \\ C'_2 & D'_3 \end{array} \right\| \sim \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_s, \underbrace{\varphi, \dots, \varphi}_s),$$

где

$$C'_1 \sim \text{diag}(\underbrace{\alpha_{q-s+1}, \alpha_{q-s+2}, \dots, \alpha_q}_s), \quad D'_3 \sim \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{s-p}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p).$$

Тогда согласно теореме 1

$$\begin{aligned}\alpha_{q-s}\beta_p &= \alpha_{q-s+1}\beta_{p-1} = \dots = \alpha_{q-s+p}\beta_1 = \varphi, \\ \alpha_{q-s+p+1} &= \alpha_{q-s+p+2} = \dots = \alpha_q = \varphi.\end{aligned}$$

Пусть $p, q \geq s$. Опять же, на основании леммы 4

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{q-s} = 1, \quad \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_{p-s} = 1.$$

Вычеркнув строки и столбцы, в которых находятся эти единицы и воспользовавшись леммой 5, получим

$$\left\| \begin{array}{cc} F_1 & 0 \\ F_2 & F_3 \end{array} \right\| \sim \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_s, \underbrace{\varphi, \dots, \varphi}_s),$$

где

$$F_1 \sim \text{diag}(\underbrace{\alpha_{q-s+1}, \alpha_{q-s+2}, \dots, \alpha_q}_s), \quad F_3 \sim \text{diag}(\underbrace{\beta_{p-s+1}, \beta_{p-s+2}, \dots, \beta_p}_s).$$

Тогда согласно теореме 1 получаем

$$\alpha_{q-s+1}\beta_p = \alpha_{q-s+2}\beta_{p-1} = \dots = \alpha_q\beta_{p-s+1} = \varphi.$$

Пусть $p, q \leq s$. На основании леммы 6

$$\left\| \begin{array}{cc|cc} D_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{s-q} & 0 & 0 \\ \hline D_2 & 0 & D_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{s-p} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} H_1 & 0 \\ H_2 & H_3 \end{array} \right\| \sim \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_s, \underbrace{\varphi, \dots, \varphi}_s),$$

причем

$$H_1 \sim \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{s-q}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q), \quad H_3 \sim \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{s-p}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \alpha_1\beta_{q+p-s} &= \alpha_2\beta_{q+p-s-1} = \dots = \alpha_{q+p-s}\beta_1 = \varphi; \\ \alpha_{q+p-s+1} &= \alpha_{q+p-s+2} = \dots = \alpha_q = \beta_{q+p-s+1} = \beta_{q+p-s+2} = \dots = \beta_p = \varphi. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Случай $q \leq s \leq p$ не рассматривается ввиду его симметричности случаю $p \leq s \leq q$.

Если R является коммутативной областью главных идеалов, то полученными результатами можно воспользоваться для нахождения инвариантных множителей диагональных блоков неособенной матрицы

$$D = \left\| \begin{array}{cc} D_1 & 0 \\ D_2 & D_3 \end{array} \right\| \sim \Phi = \text{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

в случае, когда

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \quad \frac{\varphi_3}{\varphi_2}, \quad \dots, \quad \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}$$

попарно взаимно просты. Для этого применим локально-глобальный метод, предложенный Герстейном в [7].

Пусть p – неразложимый элемент кольца R . Через $R_{(p)}$ обозначим локализацию кольца R по простому идеалу (p) . То есть $R_{(p)}$ – кольцо, состоящее из элементов вида $x = p^\nu a/b$, где a, b – элементы кольца R , взаимно простые с p , $\nu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Поскольку

$$\Phi = E\varphi_1 \text{diag}\left(1, \frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \dots, \frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right) \text{diag}\left(1, 1, \frac{\varphi_3}{\varphi_2}, \dots, \frac{\varphi_3}{\varphi_2}\right) \dots \text{diag}\left(1, \dots, 1, \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}\right),$$

то матрицу Φ можно записать как произведение матриц вида $\text{diag}(1, \dots, 1, p^\mu, \dots, p^\mu)$. На основании теоремы 1 из [7] матрица D в кольце $R_{(p)}$ будет иметь каноническую диагональную форму $\text{diag}(1, \dots, 1, p^\mu, \dots, p^\mu)$. Следовательно, инвариантные множители матриц D_1 и D_3 в кольце $R_{(p)}$ связаны между собой равенствами, которые были выписаны в теореме 2. Тогда для того, чтобы найти канонические диагональные формы матриц D_1 и D_3 в кольце R нужно найти канонические диагональные формы матриц D_1 и D_3 во всех локализациях кольца R по неразложимым элементам, являющихся делителями элемента φ_n и умножить соответствующие инвариантные множители этих матриц.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] W. E. Roth, "The equation $AX - YB = C$ and $AX - XB = C$ in matrices", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3**:3 (1952), 392–396.
- [2] R. B. Feinberg, "Equivalence of partitioned matrices", *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B*, **80** (1976), 89–97.
- [3] W. H. Gustafson, "Roth's theorem over commutative rings", *Linear Algebra Appl.*, **23** (1979), 245–251.
- [4] R. E. Hartwig, P. Patricio, "On Roth's pseudo equivalence over rings", *Electron. J. Linear Algebra*, **16** (2007), 111–124.
- [5] I. Kaplansky, "Elementary divisor ring and modules", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **66** (1949), 464–491.
- [6] M. Newman, "The Smith normal form of a partitioned matrix", *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B*, **78** (1974), 3–6.
- [7] L. J. Gerstein, "A local approach to matrix equivalence", *Linear Algebra and Appl.*, **16**:3 (1977), 221–232.

В. П. Щедрик

Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я. С. Пидстригача НАН Украины, г. Львов
E-mail: shchedrykv@ukr.net

Поступило
02.04.2009