Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Б. Сихов, Н. Т. Темиргалиев, Об алгоритме построения равномерно распределенных сеток Коробова, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 6, 948–950

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm7827>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 05:29:12

Об алгоритме построения равномерно распределенных сеток Коробова

М. Б. Сихов, Н. Т. Темиргалиев

Задача эффективного построения равномерно распределенных сеток на многомерном единичном кубе представляет собой активно развивающееся и перспективное направление с многочисленными приложениями и связями с другими разделами математики (см., например, [1] и имеющуюся в ней библиографию).

В данной статье под *равномерной распределенностью* последовательности сеток (конечных множеств) $\{\xi_k^{(p)}\}_{k=1}^p$ из s -мерного единичного куба $[0, 1]^s$, индексированных достаточно плотной возрастающей последовательностью целых положительных p , понимается существование положительных $c(s) > 0$ и $\beta(s) > 0$ таких, что для всех p выполнено неравенство

$$D_s(\{\xi_k^{(p)}\}_{k=1}^p) = \sup \left\{ \left| \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \chi_I(\xi_k^{(p)}) - \prod_{j=1}^s (d_j - b_j) \right| : I = \prod_{j=1}^s [b_j, d_j] \subset [0, 1]^s \right\} \leq c(s)p^{-1}(\ln p)^{\beta(s)}, \quad (1)$$

где χ_A – характеристическая функция множества A (подробности см., например, в [2]).

В 1958 г. Коробов [3] установил существование для всякого целого положительного p взаимно простых с p целых чисел

$$a_1 = a_1(p), \quad a_2 = a_2(p), \quad \dots, \quad a_s = a_s(p)$$

таких, что сетка $(\{x\} - \text{дробная часть числа } x)$

$$\xi_k(p, a_1, \dots, a_s) = \left(\left\{ \frac{k}{p} a_1 \right\}, \dots, \left\{ \frac{k}{p} a_s \right\} \right), \quad k = 1, \dots, p, \quad (2)$$

равномерно распределена на $[0, 1]^s$.

Этот результат является весьма ценным с вычислительной точки зрения в том смысле, что сетка (2) полностью определяется заданием $(s+1)$ -мерного целочисленного вектора $(p, a_1(p), a_2(p), \dots, a_s(p))$, по которому она выписывается за $\asymp p$ элементарных арифметических операций, в то время s -мерная сетка объема p составляется из sp действительных чисел.

Сетки вида (2) назовем *сетками Коробова*.

Таким образом, задача заключается в нахождении достаточно плотной последовательности целых положительных p и соответствующих им взаимно простых с p целых чисел $a_1(p), a_2(p), \dots, a_s(p)$ таких, что для дисбаланса D_s сетки Коробова (2) выполнено неравенство (1).

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема, в которой дан определенный ответ на поставленную задачу. Формулировке этой теоремы предположим еще одно определение. Положим

$$b_r(x) = \sum_{(m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s} (\bar{m}_1 \cdots \bar{m}_s)^{-r} e^{2\pi i(m_1 x_1 + \dots + m_s x_s)},$$

где $r > 1$ и $\bar{m}_j = \max(1, |m_j|)$, $j = 1, \dots, s$.

ТЕОРЕМА. При данных $r > 1$ и $s, s = 1, 2, \dots$, существуют положительные величины c_1, c_2, c_3, β_1 и β_2 такие, что для всякого целого положительного p и для всякого целочисленного вектора $(a_1, \dots, a_s)$ неравенство

$$c_3(s) \frac{(\ln p)^{(s-1)/2}}{p} \leq D_s \left[\left(\left\{ \frac{k}{p} a_1 \right\}, \dots, \left\{ \frac{k}{p} a_s \right\} \right)_{k=1}^p \right] \leq c_1(s) \frac{(\ln p)^{\beta_1(s)}}{p} \quad (3)$$

выполнено тогда и только тогда, когда

$$\left| \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p b_r \left(\left\{ \frac{k}{p} a_1 \right\}, \dots, \left\{ \frac{k}{p} a_s \right\} \right) - 1 \right| \leq c_2(r, s) \frac{(\ln p)^{\beta_2(r, s)}}{p^r}. \quad (4)$$

Оценка снизу в (3) следует из результатов Рота [1].

В этой теореме в дополнение к известным (см. в [3] теорему 22 (стр. 141–146) и теорему 19 (стр. 126–130)) дан еще один критерий равномерной распределенности сеток Коробова.

Задаче построения оптимальных квадратурных формул, эквивалентной выполнению неравенства (3) (подробности см. в [3]), посвящена обширная литература (см., например, [2]–[4] и имеющуюся в них библиографию); результаты этих работ носят в основном характер теорем существования.

В [5]–[7] даны эффективные алгоритмы построения равномерно распределенных сеток [7; теорема 2] и оптимальных в степенной шкале квадратурных формул с равными весами и сеткой вида (2) [7; теорема 4], сводящиеся к делению целых рациональных чисел.

Все эти алгоритмы, даже при своей оптимальности относительно числа элементарных арифметических операций $\asymp N \ln^\tau N$, $\tau \geq 0$, при достаточном числе узлов N для реализации требуют большой вычислительной работы.

Поэтому для построения конкретных равномерно распределенных сеток приходится привлекать другие методы. К таковым относятся вычислительные эксперименты, основанные на приведенной выше теореме.

Именно, в случае целых $r > 1$ функция $b_r(x)$ из условия (4) есть 1-периодический алгебраический многочлен Бернулли, например, при $r = 10$

$$b_r(x) = \prod_{j=1}^s \left[1 + \frac{(2\pi)^{10}}{10!} \left(\frac{5}{66} - \frac{3}{2} x_j^2 + 5x_j^4 - 7x_j^6 + \frac{15}{2} x_j^8 - 5x_j^9 + x_j^{10} \right) \right].$$

Более того, поскольку в (3) параметр $r > 1$ участвует только в константах, то тем самым, для доказательства неравенства (4) для всех $r > 1$ достаточно это неравенство доказать для некоторого $r = r_0 > 1$ (с точностью до констант).

Таким образом, задача построения равномерно распределенной сетки Коробова сведена к проверке выполнения неравенства (4) при каком-либо целом $r > 1$ для алгебраического многочлена Бернулли $b_r(x)$ (одно из реализаций которого дано в [8]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] К. Ф. Roth, *Математика: границы и перспективы*, ФАЗИС, М., 2005, 375–394.
 [2] Л. Кейперс, Г. Нидеррейтер, *Равномерное распределение последовательностей*, Наука, М., 1985. [3] Н. М. Коробов, *Теоретико-числовые методы в приближенном анализе*, Физматгиз, М., 1963. [4] L. K. Hua, Y. Wang, *Applications of Number Theory to Numerical Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1981. [5] С. М. Воронин, Н. Темиргалиев, *Матем. заметки*, **46:2** (1989), 34–41. [6] С. М. Воронин, *Избранные труды. Математика*, Изд-во

МГТУ им. Н.Э. Баумана, М., 2006. [7] Н. Темиргалиев, Е. А. Баилов, А. Ж. Жубанышева, *Докл. РАН*, **416**:2 (2007), 169–173. [8] А. Ж. Жубанышева, Н. Темиргалиев, Ж. Н. Темиргалиева, *ЖВМ и МФ*, **49**:1 (2009), 14–25.

М. Б. Сихов

Казахский национальный университет им. аль-Фараби,
Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилёва
E-mail: mirbulats@mail.ru

Поступило
01.06.2009

Н. Т. Темиргалиев

Казахский национальный университет им. аль-Фараби,
Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилёва
E-mail: ntmath29@mail.ru