Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Илюшечкин, О соотношениях между слагаемыми дискриминанта симметрической матрицы, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 2, 310–312

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm7828>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 14:56:59

О соотношениях между слагаемыми дискриминанта симметрической матрицы

Н. В. Илюшечкин

Пусть $\text{Sym}(n)$ – пространство вещественных симметрических матриц порядка n , матрица $X \in \text{Sym}(n)$, а $\text{Dis}(X)$ – дискриминант ее характеристического многочлена, который для простоты называют *дискриминантом* матрицы X . Как показали Вигнер и фон Нейман, уравнение $\text{Dis}(X) = 0$ выделяет в пространстве $\text{Sym}(n)$ алгебраическое многообразие $\mathcal{M}$ коразмерности 2. Связь этого факта с квантовой механикой и его доказательство приводятся в [1]. Доказательство основано на нестандартной параметризации матриц из $\text{Sym}(n)$ посредством их собственных векторов и собственных значений. Там же дается другое обоснование коразмерности в случае $n = 3$. Именно, многообразие $\mathcal{M}$ рассматривается как множество решений системы десяти полиномиальных (однородных третьей степени) уравнений относительно элементов матрицы X . Кроме того, в [1] исследуется структура многообразия $\mathcal{M}$ при $n = 3$ и вопрос о его неприводимых составляющих.

Здесь также исследуется многообразие $\mathcal{M}$ симметрических матриц с кратными собственными значениями при $n = 3$. Цель работы – описать это многообразие как множество решений системы полиномиальных уравнений и, кроме того, дать некоторые алгебраические соотношения между этими уравнениями, чего нет в [1]. Найденные ниже соотношения позволят сократить число задающих $\mathcal{M}$ уравнений до четырех. Проводимое ниже исследование основано на представлении дискриминанта в виде суммы квадратов некоторых многочленов от элементов матрицы X , найденном в [2]. В [3] это представление было распространено на нормальные матрицы, в [4] дан геометрический вывод.

Опишем упомянутое представление. Пусть матрица $X = (x_{ij})$, причем $x_{ij} = x_{ji}$. Обозначим ее квадрат через $X^2 = (x_{ij}^{(2)})$ и рассмотрим матрицу

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{11}^{(2)} \\ 1 & x_{22} & x_{22}^{(2)} \\ 1 & x_{33} & x_{33}^{(2)} \\ 0 & \sqrt{2}x_{12} & \sqrt{2}x_{12}^{(2)} \\ 0 & \sqrt{2}x_{13} & \sqrt{2}x_{13}^{(2)} \\ 0 & \sqrt{2}x_{23} & \sqrt{2}x_{23}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Как показано в [3], дискриминант $\text{Dis}(X)$ равен сумме квадратов всех максимальных миноров матрицы X_1 . Займемся сначала подсчетом числа различных ее миноров. Прежде всего, каждой строке матрицы X_1 соответствует двойной индекс ij , где $i \leq j$. Эти двойные индексы расположим в порядке 11, 22, 33, 12, 13, 23. Минор, образованный строками с двойными индексами i_1j_1, i_2j_2, i_3j_3 , обозначим через $\langle i_1j_1, i_2j_2, i_3j_3 \rangle$. Очевидно, число всех таких миноров равно $C_6^3 = 20$. При этом $\langle 12, 13, 23 \rangle = 0$. Кроме того, если $i_2 < j_2$ и $i_3 < j_3$, то, очевидно, $\langle 11, i_2j_2, i_3j_3 \rangle = \langle 22, i_2j_2, i_3j_3 \rangle = \langle 33, i_2j_2, i_3j_3 \rangle$, т.е. имеется три тройки совпадающих миноров. Наконец, непосредственно видно, что

$$\begin{aligned} \langle ii, 12, 13 \rangle &= \sqrt{2} \langle 22, 33, 23 \rangle = 2x_{12}x_{13}(x_{33} - x_{22}) - 2x_{23}(x_{13}^2 - x_{12}^2), \\ \langle ii, 12, 23 \rangle &= \sqrt{2} \langle 11, 33, 13 \rangle = 2x_{12}x_{23}(x_{33} - x_{11}) - 2x_{13}(x_{23}^2 - x_{12}^2), \\ \langle ii, 13, 23 \rangle &= \sqrt{2} \langle 11, 22, 12 \rangle = 2x_{13}x_{23}(x_{22} - x_{11}) - 2x_{12}(x_{23}^2 - x_{13}^2). \end{aligned}$$

Таким образом, имеется всего 10 различных миноров, причем можно условиться выбирать их так, чтобы по крайней мере двум строкам любого из них соответствовали диагональные индексы вида ii . Дискриминант можно представить в виде суммы десяти квадратов:

$$\begin{aligned} \text{Dis}(X) = & \langle 11, 22, 33 \rangle^2 + 7\langle 11, 22, 12 \rangle^2 + 7\langle 11, 33, 13 \rangle^2 + 7\langle 22, 33, 23 \rangle^2 \\ & + \langle 11, 22, 13 \rangle^2 + \langle 11, 33, 23 \rangle^2 + \langle 22, 33, 12 \rangle^2 \\ & + \langle 11, 22, 23 \rangle^2 + \langle 11, 33, 12 \rangle^2 + \langle 22, 33, 13 \rangle^2. \end{aligned}$$

Оказывается, десять приведенных только что кубических многочленов связаны между собой восемью уравнениями первой и второй степени. Переходим к выводу этих уравнений. Прежде всего, если в матрице X_1 продублировать первый столбец и рассмотреть равные нулю миноры четвертого порядка, то легко найти три линейных соотношения, которые позволяют выразить все миноры вида $\langle ii, jj, ij \rangle$ через шесть миноров вида $\langle ii, jj, kl \rangle$, где $k < l$ и один из индексов k или l отличен от i и j :

$$\begin{aligned} \langle 11, 22, 12 \rangle &= \langle 11, 33, 12 \rangle - \langle 22, 33, 12 \rangle, \\ \langle 11, 33, 13 \rangle &= \langle 11, 22, 13 \rangle + \langle 22, 33, 13 \rangle, \\ \langle 22, 33, 23 \rangle &= \langle 11, 33, 23 \rangle - \langle 11, 22, 23 \rangle. \end{aligned} \tag{1}$$

Как мы скоро увидим, в силу соотношений (1) миноры $\langle ii, jj, ij \rangle$ можно не привлекать к исследованию многообразия $\mathcal{M}$. Для оставшихся миноров пора упростить обозначения. Именно, положим $f_0 = \langle 11, 22, 33 \rangle$,

$$\begin{aligned} f_1 &= 2^{-1/2} \langle 11, 22, 13 \rangle, & f_2 &= 2^{-1/2} \langle 22, 33, 12 \rangle, & f_3 &= -2^{-1/2} \langle 11, 33, 23 \rangle, \\ f_4 &= -2^{-1/2} \langle 22, 33, 13 \rangle, & f_5 &= 2^{-1/2} \langle 11, 33, 12 \rangle, & f_6 &= -2^{-1/2} \langle 11, 22, 23 \rangle. \end{aligned}$$

Это кубические формы с целыми коэффициентами. В частности,

$$\begin{aligned} f_0 &= (x_{22} - x_{11})(x_{33} - x_{11})(x_{33} - x_{22}) - (x_{22} - x_{11})x_{12}^2 + (x_{33} - x_{11})x_{13}^2 - (x_{33} - x_{22})x_{23}^2, \\ f_1 &= x_{13}(x_{22} - x_{11})(x_{33} - x_{22}) + x_{12}x_{23}(x_{22} - x_{11}) - x_{13}(x_{23}^2 - x_{13}^2). \end{aligned}$$

Остальные пять многочленов могут быть получены из f_1 перестановками индексов у переменных (о перестановках индексов см. [2] и [3]).

Что же касается дискриминанта, то

$$\text{Dis}(X) = f_0^2 + \sum_{i=1}^3 (16f_i^2 - 28f_i f_{i+3} + 16f_{i+3}^2).$$

Квадратичная форма $16a^2 - 28ab + 16b^2$ положительно определена, и ее можно бесконечным числом способов представить как сумму двух квадратов. Таким образом, дискриминант представим в виде суммы семи квадратов, причем многообразие $\mathcal{M}$ задается как пересечение множеств нулей семи кубических форм $f_0 = f_1 = \dots = f_6 = 0$.

В частности, из тождества $16a^2 - 28ab + 16b^2 = (a+b)^2 + 15(a-b)^2$ следует представление дискриминанта как суммы семи квадратов, данное в [5].

ТЕОРЕМА 1. *Семь кубических форм $f_0, \dots, f_6$, задающих многообразие $\mathcal{M}$, удовлетворяют пяти однородным квадратичным соотношениям. Из этих соотношений следует, что $\mathcal{M}$ можно задать любой из систем четырех уравнений*

$$f_0 = f_1 = f_2 = f_3 = 0 \quad \text{или} \quad f_0 = f_4 = f_5 = f_6 = 0. \tag{2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формы $f_0, \dots, f_6$ являются максимальными минорами матрицы X_1 , вследствие чего удовлетворяют соотношениям Плюккера [6]. Напомним, что каждой строке матрицы X_1 соответствует двойной индекс и эти индексы расположены в порядке 11, 22, 33, 12, 13, 23 (от меньших к большему). Применительно к рассматриваемому случаю соотношения Плюккера строятся следующим образом. Если $A, B, C, \dots$ – двойные индексы, причем $A < B < C < D, E < F$, то

$$\langle A, B, C \rangle \langle D, E, F \rangle - \langle A, B, D \rangle \langle C, E, F \rangle + \langle A, C, D \rangle \langle B, E, F \rangle - \langle B, C, D \rangle \langle A, E, F \rangle = 0. \quad (3)$$

Возьмем в (3) $A = 11, B = 22, C = 12, D = 13, E = 33, F = 23$. Тогда

$$\begin{aligned} & \langle 11, 22, 12 \rangle \langle 13, 33, 23 \rangle - \langle 11, 22, 13 \rangle \langle 12, 33, 23 \rangle \\ & + \langle 11, 12, 13 \rangle \langle 22, 33, 23 \rangle - \langle 22, 12, 13 \rangle \langle 11, 33, 23 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Выражая все через многочлены f_i и используя перестановки индексов, а именно циклы, отсюда можно получить три соотношения второй степени. Из этих соотношений независимы лишь любые два, так как сумма левых частей всех их тождественно равна нулю. Приводим два из них:

$$\begin{cases} f_1^2 + f_6^2 - f_2^2 - f_5^2 - f_1 f_4 + 2f_2 f_5 - f_3 f_6 = 0, \\ f_3^2 + f_5^2 - f_1^2 - f_4^2 + 2f_1 f_4 - f_2 f_5 - f_3 f_6 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Возьмем в (3) $A = 11, B = 22, C = 33, D = 12, E = 11, F = 13$. Тогда

$$\langle 11, 22, 33 \rangle \langle 12, 11, 13 \rangle - \langle 11, 22, 12 \rangle \langle 33, 11, 13 \rangle + \langle 11, 33, 12 \rangle \langle 22, 11, 13 \rangle = 0.$$

Отсюда можно получить еще три различных соотношения на формы f_i :

$$\begin{cases} f_0(f_1 - f_4) - f_2 f_3 + f_3 f_5 - f_5 f_6 = 0, \\ f_0(f_2 - f_5) - f_1 f_3 + f_1 f_6 - f_4 f_6 = 0, \\ f_0(f_3 - f_6) - f_1 f_2 + f_2 f_4 - f_4 f_5 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Из соотношений (4) и (5) легко следует, что многообразие $\mathcal{M}$ можно задать любой из систем (2).

Автор благодарен В. И. Арнольду за постановку задачи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. Дана, Х. Д. Икрамов, *Численные методы и вопросы организации вычислений. XVIII*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **323**, ПОМИ, СПб., 2005, 34–46. [2] Н. В. Илюшечкин, *УМН*, **40:1**(241) (1985), 201–202. [3] Н. В. Илюшечкин, *Матем. заметки*, **51:3** (1992), 16–23. [4] Н. В. Илюшечкин *inbook* Исследования по линейным операторам и теории функций. 31, Зап. научн. сем. ПОМИ, **303**, ПОМИ, СПб., 2003, 119–144. [5] Р. А. Parrilo, *Math. Program*, **96:2**, Ser. B (2003), 293–320. [6] М. М. Постников, *Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра*, Наука, М., 1986.

Н. В. Илюшечкин

ОАО Концерн “Моринформсистема – Агат”,
г. Москва
E-mail: ilyush55@mail.ru

Поступило

06.04.2009