Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Коннов, Кокасательное расслоение проективного пространства и многообразие невырожденных нуль-пар, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 5, 718–735

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm783>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 15:19:28

УДК 514.76

КОКАСАТЕЛЬНОЕ РАССЛОЕНИЕ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА И МНОГООБРАЗИЕ НЕВЫРОЖДЕННЫХ НУЛЬ-ПАР

В. В. Коннов

Невырожденная нуль-пара вещественного проективного пространства P^n состоит из точки и неинцидентной ей гиперплоскости. Многообразие всех невырожденных нуль-пар $\mathfrak{N}$ обладает естественной келеровой структурой гиперболического типа постоянной ненулевой голоморфной секционной кривизны. В частности, $\mathfrak{N}$ – симплектическое многообразие. Как доказано в работе, многообразие $\mathfrak{N}$ несет структуру локально тривиального расслоения над проективным пространством P^n , типовым слоем которого является аффинное пространство. При этом ассоциированное векторное пространство каждого слоя естественно изоморфно кокасательному пространству к P^n . В работе найдено глобальное сечение этого расслоения, что позволило построить диффеоморфизм σ между многообразием невырожденных нуль-пар и кокасательным расслоением проективного пространства. Основным результатом работы является доказательство теоремы о том, что построенный в явном виде диффеоморфизм $\sigma: \mathfrak{N} \rightarrow T^*P^n$ является симплектоморфизмом относительно естественной симплектической структуры на $\mathfrak{N}$ и канонической симплектической структуры на T^*P^n .

Библиография: 6 названий.

1. Проективное пространство, его касательное и кокасательное расслоения. Пусть $P^n = P(W)$ – вещественное проективное пространство размерности n , порожденное векторным пространством W . Будем считать, что в пространстве W фиксирован базис $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$, относительно которого $(x^0, x^1, \dots, x^n)$ – координаты на W , а $(x^0 : x^1 : \dots : x^n)$ – однородные координаты на $P(W)$. Структура n -мерного вещественно-аналитического многообразия определяется на $P(W)$ при помощи атласа $\mathcal{A} = \{(A_p, f_p) \mid p = 0, 1, \dots, n\}$, состоящего из аффинных карт. Здесь

$$A_p = \{(x^0 : x^1 : \dots : x^n) \in P(W) \mid x^p \neq 0\}$$

– область карты,

$$f_p: (x^0 : x^1 : \dots : x^n) \rightarrow (y^0, \dots, y^{p-1}, y^{p+1}, \dots, y^n) = \left(\frac{x^0}{x^p}, \dots, \frac{x^{p-1}}{x^p}, \frac{x^{p+1}}{x^p}, \dots, \frac{x^n}{x^p} \right)$$

– картирующее отображение.

Каноническая проекция $p: W \setminus 0 \rightarrow P(W)$ является аналитическим отображением и называется *отображением проективизации*. Если вектор $a \in W$ порождает точку

$A \in P(W)$, т.е. $p(a) = A$, то точку A будем отождествлять с одномерным векторным подпространством $\langle a \rangle$, натянутым на вектор a . Итак, $A = p(a) = \langle a \rangle$.

Рассмотрим короткую последовательность векторных пространств и их гомоморфизмов

$$\mathcal{O} \longrightarrow \langle a \rangle \xrightarrow{i} T_a W \equiv W \xrightarrow{(p_*)_a} T_A P(W) \longrightarrow \mathcal{O},$$

где i – гомоморфизм включения. Легко показать, что рассматриваемая последовательность является точной, т.е. $\text{Im } i = \ker(p_*)_a = \langle a \rangle$. Следовательно, каждый вектор a , лежащий над точкой $A = p(a)$, определяет естественный изоморфизм

$$\varphi_a : T_A P(W) \rightarrow W/\langle a \rangle,$$

для которого $\varphi_a \circ (p_*)_a = \pi$, где $\pi : W \rightarrow W/\langle a \rangle$ – каноническая проекция. В карте A_p имеют место формулы

$$\begin{aligned} (p_*)_a : b^u e_u &\equiv b^u \frac{\partial}{\partial x^u} \mapsto (p_*)_a \left(b^u \frac{\partial}{\partial x^u} \right) = \frac{1}{a^p} \left(b^{i_p} - \frac{a^{i_p}}{a^p} b^p \right) \frac{\partial}{\partial y^{i_p}}, \\ \pi : b^u e_u &\mapsto \langle a \rangle + b^u e_u \equiv \langle a \rangle + \left(b^{i_p} - b^p \frac{a^{i_p}}{a^p} \right) e_{i_p}, \\ \varphi_a : c^{i_p} \frac{\partial}{\partial y^{i_p}} &\mapsto \langle a \rangle + a^p c^{i_p} e_{i_p}, \quad (\varphi_a)^{-1} : \langle a \rangle + b^{i_p} e_{i_p} \mapsto \frac{1}{a^p} b^{i_p} \frac{\partial}{\partial y^{i_p}}. \end{aligned}$$

Здесь p – фиксированный индекс из множества $\{0, 1, \dots, n\}$, по которому суммирование не производится. Суммирование производится по индексу $u = 0, 1, \dots, n$, нумерующему глобальные координаты на W , и по индексу $i_p = 0, 1, \dots, p-1, p+1, \dots, n$, который нумерует локальные координаты в карте A_p .

Таким образом, имеем однопараметрический пучок изоморфизмов

$$\varphi_a : T_A P(W) \rightarrow W/\langle a \rangle,$$

связанных соотношениями

$$\varphi_{\lambda a} = \lambda \varphi_a, \quad (\varphi_{\lambda a})^{-1} = \frac{1}{\lambda} (\varphi_a)^{-1}.$$

Кокасательное пространство $T_A^* P(W)$ к проективному пространству $P(W)$ в точке $A = p(a)$ будем отождествлять с подпространством $\text{Ann} \langle a \rangle \subset W^*$, т.е. $T_A^* P(W)$ будем рассматривать как совокупность линейных форм на W , равных нулю на векторе a . Такой подход корректен, так как для любого вектора a , лежащего над точкой $p(a)$, отображение

$$p_a^* = \pi^* \circ (\varphi_a^{-1})^* : T_A^* P(W) \rightarrow \text{Ann} \langle a \rangle \subset W^* \equiv T_a^* W$$

является изоморфизмом на образ. Изоморфизм (на образ) $\pi^* = p_a^* \circ \varphi_a^*$ позволяет отождествить пространство $\text{Ann} \langle a \rangle$ с пространством $(W/\langle a \rangle)^*$, сопряженным для $W/\langle a \rangle$.

В карте A_p имеют место формулы

$$\begin{aligned} p_a^* : c_{i_p} dy^{i_p} &\mapsto p_a^*(c_{i_p} dy^{i_p}) = \frac{1}{a^p} c_{i_p} \left(dx^{i_p} - \frac{a^{i_p}}{a^p} dx^p \right) = \frac{1}{a^p} c_{i_p} \left(e^{i_p} - \frac{a^{i_p}}{a^p} e^p \right), \\ (p_a^*)^{-1} : b_{i_p} \left(e^{i_p} - \frac{a^{i_p}}{a^p} e^p \right) &\mapsto a^p b_{i_p} dy^{i_p}. \end{aligned}$$

Заметим, что если $a^p \neq 0$, то любая форма из $\text{Ann}\langle a \rangle$ может быть записана в виде $b_{i_p}(e^{i_p} - a^{i_p}e^p/a^p)$.

Однопараметрический пучок изоморфизмов r_a^* обладает следующим свойством:

$$r_{\lambda a}^* = \frac{1}{\lambda} r_a^*, \quad (r_{\lambda a}^*)^{-1} = \lambda (r_a^*)^{-1}.$$

Итак, проективное пространство $P(W)$, его касательное и кокасательное расслоения будем интерпретировать в терминах векторного пространства W :

$$P(W) = \bigcup_{a \in W \setminus 0} \langle a \rangle, \quad TP(W) = \bigcup_{a \in W \setminus 0} W/\langle a \rangle, \quad T^*P(W) = \bigcup_{a \in W \setminus 0} \text{Ann}\langle a \rangle.$$

Пусть теперь W^* – векторное пространство, сопряженное для W . Тогда $P(W^*)$ – проективное пространство, двойственное для $P(W)$, т.е. пространство гиперплоскостей в $P(W)$. Будем считать, что базис $\{e^0, e^1, \dots, e^n\}$ в W^* является сопряженным для $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$. Относительно этого базиса $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ – координаты на W^* , а $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ – однородные координаты на $P(W^*)$. Пусть $\mathcal{A}^* = \{(A^p, f^p) \mid p = 0, 1, \dots, n\}$ – атлас, состоящий из аффинных карт на $P(W^*)$. Здесь

$$A^p = \{(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in P(W^*) \mid x_p \neq 0\}$$

– область карты,

$$f^p : (x_0 : x_1 : \dots : x_n) \rightarrow (y_0, \dots, y_{p-1}, y_{p+1}, \dots, y_n) = \left(\frac{x_0}{x_p}, \dots, \frac{x_{p-1}}{x_p}, \frac{x_{p+1}}{x_p}, \dots, \frac{x_n}{x_p} \right)$$

– картирующее отображение.

Отображение проективизации из $W^* \setminus 0$ на $P(W^*)$ будем снова обозначать через r . Если $\xi \in W^*$, то будем использовать отождествления $\Xi = r(\xi) = \langle \xi \rangle$, $T_\Xi P(W^*) \cong W^*/\langle \xi \rangle$ и $T_\Xi^* P(W^*) \cong \text{Ann}\langle \xi \rangle$. Таким образом,

$$P(W^*) = \bigcup_{\xi \in W^* \setminus 0} \langle \xi \rangle, \quad TP(W^*) = \bigcup_{\xi \in W^* \setminus 0} W^*/\langle \xi \rangle, \quad T^*P(W^*) = \bigcup_{\xi \in W^* \setminus 0} \text{Ann}\langle \xi \rangle.$$

2. Дифференциальная геометрия многообразия невырожденных нуль-пар.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Нуль-парой в $P(W)$ называется [1] пара (A, Ξ) , где $A \in P(W)$ и $\Xi \in P(W^*)$. Нуль-пара называется *вырожденной*, если точка $A = r(a)$ и гиперплоскость $\Xi = r(\xi)$ инцидентны, т.е. $A \in \Xi$ (или, что эквивалентно, $\xi(a) = 0$). В противном случае нуль-пара называется *невырожденной*.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество всех нуль-пар. Ясно, что $\mathfrak{M} = P(W) \times P(W^*)$ является $2n$ -мерным вещественно-аналитическим многообразием относительно структуры прямого произведения аналитических многообразий $P(W)$ и $P(W^*)$. Естественный атлас на $\mathfrak{M}$ имеет вид

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A}^* = \{(A_p \times A^q, f_p \times f^q) \mid p, q = 0, 1, \dots, n\}.$$

Многообразие $\mathfrak{M}$ связно и компактно.

Пусть $\mathfrak{M}_0$ – подмножество в $\mathfrak{M}$, состоящее из всех вырожденных нуль-пар. Если $a = a^u e_u$ – ненулевой вектор, то $(a^0 : a^1 : \dots : a^n)$ – однородные координаты точки $A = p(a) \in P(W)$. Если же $\xi = \xi_u e^u$ – ненулевой ковектор, то $(\xi_0 : \xi_1 : \dots : \xi_n)$ – однородные координаты гиперплоскости $\Xi = p(\xi) \in P(W^*)$ (или, что тоже самое, ее *тангенциальные координаты*). Упорядоченный набор из $2n + 2$ чисел $(a^0 : a^1 : \dots : a^n; \xi_0 : \xi_1 : \dots : \xi_n)$ называется *однородными координатами нуль-пары* (A, Ξ) . В однородных координатах условие вырожденности нуль-пары (A, Ξ) имеет вид

$$a^0 \xi_0 + a^1 \xi_1 + \dots + a^n \xi_n = 0.$$

Это уравнение определяет $\mathfrak{M}_0$ как гладкую гиперповерхность в $\mathfrak{M}$. Ясно, что $\mathfrak{M}_0$ замкнуто в $\mathfrak{M}$.

Пусть $\mathfrak{N} = \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}_0$ – совокупность всех невырожденных нуль-пар. Ясно, что $\mathfrak{N}$ – открытое подмногообразие в $\mathfrak{M}$. Естественный атлас на $\mathfrak{N}$ имеет вид

$$(\mathcal{A} \times \mathcal{A}^*)|_{\mathfrak{N}} = \{((A_p \times A^q) \cap \mathfrak{N}, (f_p \times f^q)|_{\mathfrak{N}}) \mid p, q = 0, 1, \dots, n\}.$$

Важно отметить, что любая невырожденная нуль-пара $(p(a), p(\xi))$ принадлежит одной из областей $(A_p \times A^q) \cap \mathfrak{N}$ атласа $(\mathcal{A} \times \mathcal{A}^*)|_{\mathfrak{N}}$ с одинаковыми номерами p и q . Действительно, условие невырожденности $\xi(a) \neq 0$ означает, что хотя бы одно из слагаемых в сумме $\xi_0 a^0 + \xi_1 a^1 + \dots + \xi_n a^n$ отлично от нуля. Пусть не равно нулю слагаемое $\xi_p a^p$. Тогда $(p(a), p(\xi)) \in (A_p \times A^p) \cap \mathfrak{N}$. Следовательно, $\{(A_p \times A^p) \cap \mathfrak{N}\}_{p=0,1,\dots,n}$ – открытое покрытие на $\mathfrak{N}$. Атлас

$$\text{diag}((\mathcal{A} \times \mathcal{A}^*)|_{\mathfrak{N}}) \equiv \{((A_p \times A^p) \cap \mathfrak{N}, f_p \times f^p) \mid p = 0, 1, \dots, n\}$$

назовем *каноническим аффинным атласом* на $\mathfrak{N}$.

Так как на многообразии $\mathfrak{N}$ определена структура почти произведения, то

$$T_{(\langle a \rangle, \langle \xi \rangle)} \mathfrak{N} = T_{\langle a \rangle} P(W) \oplus T_{\langle \xi \rangle} P(W^*) \cong (W/\langle a \rangle) \oplus (W^*/\langle \xi \rangle).$$

Канонический инволютивный автоморфизм $\mathbf{I}$, связанный со структурой прямого произведения, в области карты $(A_p \times A^p) \cap \mathfrak{N}$ задается так:

$$\mathbf{I}: c_{i_p} \frac{\partial}{\partial y^{i_p}} \oplus c^{i_p} \frac{\partial}{\partial y_{i_p}} \mapsto -c_{i_p} \frac{\partial}{\partial y^{i_p}} \oplus c^{i_p} \frac{\partial}{\partial y_{i_p}}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Многообразие невырожденных нуль-пар $\mathfrak{N}$ является симплектическим многообразием.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u, v = 0, 1, \dots, n$, а p – фиксированный индекс из множества $\{0, 1, \dots, n\}$, по которому суммирование не производится. Кроме того, положим

$$i_p, j_p, k_p = 0, 1, \dots, p-1, p+1, \dots, n.$$

Для каждого $p \in \{0, 1, \dots, n\}$ определим симплектическую 2-форму в области

$$(f_p \times f^p)((A_p \times A^p) \cap \mathfrak{N}) \subset \mathbb{R}^{2n}$$

канонического атласа на $\mathfrak{N}$ по формуле

$$\Omega = \frac{1}{(1 + y_{k_p} y^{k_p})^2} ((1 + y_{k_p} y^{k_p}) \delta_{j_p}^{i_p} - y^{i_p} y_{j_p}) dy_{i_p} \wedge dy^{j_p}, \quad (1)$$

где $y^{i_p} = x^{i_p}/x^p$ и $y_{i_p} = x_{i_p}/x_p$ – локальные координаты на $(A_p \times A^p) \cap \mathfrak{N}$.

1. Докажем, что 2-форма $(f_p \times f^p)^* \Omega$ не зависит от выбора карты, т.е.

$$(f_p \times f^p)^* \Omega_x = (f_q \times f^q)^* \Omega_x \quad \forall x \in (A_p \times A^p) \cap (A_q \times A^q) \cap \mathfrak{N}.$$

Введем обозначения $\Delta = \{(a, \xi) \in W \times W^* \mid \xi(a) = 0\}$, $\mathscr{W} = (W \times W^*) \setminus \Delta$ и рассмотрим регулярное сюръективное отображение $\Pi: \mathscr{W} \rightarrow \mathfrak{N}$, определяемое следующим образом

$$\Pi: (a, \xi) \mapsto (p(a), p(\xi)).$$

Тогда для любой пары $(a, \xi) \in \mathscr{W}$ отображение антиувлечения

$$\Pi_{(a, \xi)}^*: \Lambda_2 \mathfrak{N}_{\Pi(a, \xi)} \rightarrow \Lambda_2 \mathscr{W}_{(a, \xi)} \equiv (W^* \oplus W) \wedge (W^* \oplus W)$$

является линейным отображением, для которого $\ker \Pi_{(a, \xi)}^* = 0$. Найдем форму $\Pi_{(a, \xi)}^* \circ (f_p \times f^p)^* \Omega$, увлеченную из $(f_p \times f^p)((A_p \times A^p) \cap \mathfrak{N}) \subset \mathbb{R}^{2n}$ на $\mathscr{W}$. Имеем

$$\begin{aligned} \Pi_{(a, \xi)}^* \circ (f_p \times f^p)^* \Omega &= \Pi_{(a, \xi)}^* \left(\frac{1}{(1 + y_{k_p} y^{k_p})^2} ((1 + y_{k_p} y^{k_p}) \delta_{j_p}^{i_p} - y^{i_p} y_{j_p}) dy_{i_p} \wedge dy^{j_p} \right) \\ &= \frac{a^p \xi_p}{\xi(a)^2} (\delta_{j_p}^{i_p} \xi(a) - a^{i_p} \xi_{j_p}) d\left(\frac{x_{i_p}}{x_p}\right)_\xi \wedge d\left(\frac{x^{j_p}}{x^p}\right)_a \\ &= \frac{a^p \xi_p}{a^p a^p \xi_p \xi_p \xi(a)^2} (\delta_{j_p}^{i_p} \xi(a) - a^{i_p} \xi_{j_p}) (\xi_p dx_{i_p} - \xi_{i_p} dx_p) \wedge (a^p dx^{j_p} - a^{j_p} dx^p) \\ &= \frac{1}{\xi(a)^2} (\delta_{j_p}^{i_p} \xi(a) - a^{i_p} \xi_{j_p}) dx_{i_p} \wedge dx^{j_p} - \frac{1}{a^p \xi(a)^2} (\xi(a) a^{i_p} - a^{i_p} \xi_{j_p} a^{j_p}) dx_{i_p} \wedge dx^p \\ &\quad - \frac{1}{\xi_p \xi(a)^2} (\xi(a) \xi_{j_p} - a^{i_p} \xi_{i_p} \xi_{j_p}) dx_p \wedge dx^{j_p} \\ &\quad + \frac{1}{a^p \xi_p \xi(a)^2} (\xi(a) \xi_{j_p} a^{j_p} - a^{i_p} \xi_{i_p} \xi_{j_p} a^{j_p}) dx_p \wedge dx^p \\ &= \frac{1}{\xi(a)^2} (\delta_{j_p}^{i_p} \xi(a) - a^{i_p} \xi_{j_p}) dx_{i_p} \wedge dx^{j_p} - \frac{1}{a^p \xi(a)^2} (\xi_p a^p a^{i_p}) dx_{i_p} \wedge dx^p \\ &\quad - \frac{1}{\xi_p \xi(a)^2} (\xi_p a^p \xi_{j_p}) dx_p \wedge dx^{j_p} + \frac{1}{a^p \xi_p \xi(a)^2} (\xi_p a^p \xi_{j_p} a^{j_p}) dx_p \wedge dx^p \\ &= \frac{1}{\xi(a)^2} (\delta_{j_p}^{i_p} \xi(a) - a^{i_p} \xi_{j_p}) dx_{i_p} \wedge dx^{j_p} - \frac{1}{\xi(a)^2} (\xi_p a^{i_p}) dx_{i_p} \wedge dx^p \\ &\quad - \frac{1}{\xi(a)^2} (a^p \xi_{j_p}) dx_p \wedge dx^{j_p} + \frac{1}{\xi(a)^2} (\xi_{j_p} a^{j_p}) dx_p \wedge dx^p \\ &= \frac{1}{\xi(a)^2} (\delta_{j_p}^{i_p} \xi(a) - a^{i_p} \xi_{j_p}) dx_{i_p} \wedge dx^{j_p} + \frac{1}{\xi(a)^2} (\delta_p^{i_p} \xi(a) - \xi_p a^{i_p}) dx_{i_p} \wedge dx^p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\xi(a)^2} (\delta_{j_p}^p \xi(a) - a^p \xi_{j_p}) dx_p \wedge dx^{j_p} + \frac{1}{\xi(a)^2} (\delta_p^p \xi(a) - \xi_p a^p) dx_p \wedge dx^p \\
& = \frac{1}{\xi(a)^2} dx_{i_p} \wedge ((\delta_{j_p}^{i_p} \xi(a) - a^{i_p} \xi_{j_p}) dx^{j_p} - (\delta_p^{i_p} \xi(a) - a^{i_p} \xi_p a^p) dx^p) \\
& \quad + \frac{1}{\xi(a)^2} dx_p \wedge ((\delta_{j_p}^p \xi(a) - \xi_{j_p} a^p) dx^{j_p} - (\xi(a) \delta_p^p - a^p \xi_p) dx^p) \\
& = \frac{1}{\xi(a)^2} (dx_{i_p} \wedge (\delta_u^{i_p} \xi(a) - a^{i_p} \xi_u) dx^u + dx_p \wedge (\delta_u^p \xi(a) - a^p \xi_u) dx^u) \\
& = \frac{1}{\xi(a)^2} dx_v \wedge (\delta_u^v \xi(a) - a^v \xi_u) dx^u = \frac{1}{\xi(a)^2} (\delta_u^v \xi(a) - a^v \xi_u) dx_v \wedge dx^u.
\end{aligned}$$

Итак,

$$\Pi_{(a, \xi)}^* \circ (f_p \times f^p)^* \Omega_p = \frac{1}{\xi(a)^2} (\delta_u^v \xi(a) - a^v \xi_u) dx_v \wedge dx^u. \quad (2)$$

Если q – другой индекс из множества $\{0, 1, \dots, n\}$, то

$$\Pi_{(a, \xi)}^* \circ (f_p \times f^p)^* \Omega_p = \Pi_{(a, \xi)}^* \circ (f_q \times f^q)^* \Omega_q,$$

т.е.

$$\Pi_{(a, \xi)}^* \left((f_p \times f^p)^* \Omega_p - (f_q \times f^q)^* \Omega_q \right) = 0 \quad \forall (a, \xi) \in \Pi^{-1}((A_p \times A^p) \cap (A_q \times A^q) \cap \mathfrak{N}).$$

В силу того, что $\ker \Pi_{(a, \xi)}^* = 0 \quad \forall (a, \xi) \in \mathscr{W}$, приходим к выводу, что

$$(f_p \times f^p)^* \Omega_p = (f_q \times f^q)^* \Omega_q \quad \forall x \in (A_p \times A^p) \cap (A_q \times A^q) \cap \mathfrak{N}.$$

Следовательно, существует единственная 2-форма Ω , глобально определенная на $\mathfrak{N}$ при помощи условия $\Omega|_{(A_p \times A^p) \cap \mathfrak{N}} = (f_p \times f^p)^* \Omega_p$. При этом

$$\Pi^* \Omega = \frac{1}{(x_w x^w)^2} ((x_w x^w) \delta_u^v - x^v x_u) dx_v \wedge dx^u. \quad (3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Последней формуле удобно придать векторную интерпретацию, отождествив форму $\Omega_{(\langle a \rangle, \langle \xi \rangle)}$ с формой $\xi(a) \cdot \Pi_{(a, \xi)}^* \Omega$. Тогда из (3) находим, что для любых векторов $b, c \in W$ и ковекторов $\eta, \zeta \in W^*$ справедлива формула

$$\Omega_{(\langle a \rangle, \langle \xi \rangle)}(b \oplus \eta; c \oplus \zeta) = \frac{1}{\xi(a)} \left(\begin{vmatrix} \xi(a) & \xi(c) \\ \eta(a) & \eta(c) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \xi(a) & \xi(b) \\ \zeta(a) & \zeta(b) \end{vmatrix} \right). \quad (4)$$

Заметим, что эта формула инвариантна относительно преобразований вида

$$b \mapsto b + \langle a \rangle, \quad \eta \mapsto \eta + \langle \xi \rangle, \quad c \mapsto c + \langle a \rangle, \quad \zeta \mapsto \zeta + \langle \xi \rangle.$$

Кроме того, формула (3) инвариантна относительно преобразований

$$a \mapsto \lambda a, \quad \xi \mapsto \mu \xi.$$

Именно для этого был использован нормирующий множитель $\xi(a)$.

2. Теперь докажем, что форма Ω невырождена. Достаточно проверить, что n -матрица $B = (\delta_{j_p}^{i_p}(y_{k_p}y^{k_p} + 1) - y_{j_p}y^{i_p})$ невырождена. Отметим, что в области карты $(A_p \times A^p) \cap \mathfrak{N}$ справедливо неравенство $y_{k_p}y^{k_p} + 1 \neq 0$.

Если $y_{k_p} = 0$ или $y^{k_p} = 0$ для всех k_p , то утверждение очевидно. Поэтому предположим, что матрица $C = (y_{j_p}y^{i_p})$ имеет ранг 1. Найдем характеристический многочлен матрицы C :

$$\det(\lambda E - C) = \lambda^n - c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \dots + (-1)^n c_n,$$

где c_k — сумма определителей k -го порядка матрицы C , стоящих на ее главной диагонали. В частности, $c_1 = \text{tr } C$, а $c_n = \det C$. Так как $\text{rank } C = 1$, то $c_2 = c_3 = \dots = c_n = 0$. Следовательно,

$$\det(\lambda \cdot E - C) = \lambda^n - \text{tr } C \cdot \lambda^{n-1}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \det B &= \det(\delta_{j_p}^{i_p}(y_{k_p}y^{k_p} + 1) - y_{j_p}y^{i_p}) = \det((1 + y_{k_p}y^{k_p})E - C) \\ &= (1 + y_{k_p}y^{k_p})^n - \text{tr } C(1 + y_{k_p}y^{k_p})^{n-1} \\ &= (1 + y_{k_p}y^{k_p})^n - (y_{j_p}y^{j_p})(1 + y_{k_p}y^{k_p})^{n-1} \\ &= (1 + y_{k_p}y^{k_p})^{n-1}(1 + y_{k_p}y^{k_p} - y_{j_p}y^{j_p}) = (1 + y_{k_p}y^{k_p})^{n-1} \neq 0. \end{aligned}$$

3. Докажем, что почти симплектическая структура, определяемая формой Ω , интегрируема. Для этого докажем, что форма Ω точна на $\mathfrak{N}$. Для каждого индекса $p \in \{0, 1, \dots, n\}$ в области $(f_p \times f^p)((A_p \times A^p) \cap \mathfrak{N}) \subset \mathbb{R}^{2n}$ канонического атласа на $\mathfrak{N}$ определим 1-форму ω по формуле

$$\omega_p = \sum_{i_p} \left(\frac{y_{i_p}}{1 + y_{k_p}y^{k_p}} - \frac{y^{i_p}}{1 + \sum y^{k_p}y^{k_p}} \right) dy^{i_p}.$$

Легко проверяется, что

$$\Pi_{(a, \xi)}^* \circ (f_p \times f^p)^* \omega_p = \sum_u \left(\frac{\xi_u}{\xi(a)} - \frac{a^u}{\sum a^v a^v} \right) dx^u,$$

т.е. форма $\Pi_{(a, \xi)}^* \circ (f_p \times f^p)^* \omega_p$ не зависит от выбора карты:

$$\Pi_{(a, \xi)}^* \circ (f_p \times f^p)^* \omega_p = \Pi_{(a, \xi)}^* \circ (f_q \times f^q)^* \omega_q \quad \forall p, q \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

И так как $\ker \Pi_{(a, \xi)}^* = 0$, то

$$(f_p \times f^p)^* \omega_p = (f_q \times f^q)^* \omega_q \quad \forall x \in (A_p \times A^p) \cap (A_q \times A^q) \cap \mathfrak{N}.$$

Следовательно, на $\mathfrak{N}$ существует единственная 1-форма ω , удовлетворяющая условию

$$\omega|_{(A_p \times A^p) \cap \mathfrak{N}} = (f_p \times f^p)^* \omega_p.$$

При этом

$$\Pi^* \omega = \sum_u \left(\frac{x_u}{x^w x^w} - \frac{x^u}{\sum x^w x^w} \right) dx^u.$$

Осталось заметить, что формы ω и Ω удовлетворяют тождеству $d\omega = \Omega$, которое непосредственно проверяется в каждой области $(A_p \times A^p) \cap \mathfrak{N}$.

Итак, многообразие невырожденных нуль-пар $\mathfrak{N}$ является симплектическим многообразием.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Многообразие невырожденных нуль-пар $\mathfrak{N}$ является почти эрмитовым многообразием гиперболического типа, при этом фундаментальная форма структуры совпадает с симплектической формой Ω .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого индекса $p \in \{0, 1, \dots, n\}$ определим гиперболическую метрику в области $(f_p \times f^p)((A_p \times A^p) \cap \mathfrak{N}) \subset \mathbb{R}^{2n}$ канонического атласа на $\mathfrak{N}$ по формуле

$$\Psi_p = \frac{1}{(1 + y_{k_p} y^{k_p})^2} (y^{i_p} y_{j_p} - (1 + y_{k_p} y^{k_p}) \delta_{j_p}^{i_p}) dy_{i_p} \odot dy^{j_p}. \quad (5)$$

Символ ' $\odot$ ' в формуле (5) и ниже обозначает симметрическое тензорное произведение; например,

$$(\theta_1 \odot \theta_2)(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (\theta_1(\xi) \theta_2(\eta) + \theta_2(\xi) \theta_1(\eta)).$$

Форма Ψ_p невырождена (доказательство аналогично п. 2 из предложения 1) и имеет сигнатуру (n, n) . Производя вычисления, аналогичные п. 1 из доказательства предложения 1, найдем

$$\Pi_{(a, \xi)}^* \circ (f_p \times f^p)^* \Psi_p = \frac{1}{\xi(a)^2} (a^u \xi_v - \xi(a) \delta_v^u) dx_u \odot dx^v,$$

т.е.

$$\Pi_{(a, \xi)}^* \circ (f_p \times f^p)^* \Psi_p = \Pi_{(a, \xi)}^* \circ (f_q \times f^q)^* \Psi_q \quad \forall p, q \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

И так как $\ker \Pi_{(a, \xi)}^* = 0$, то

$$(f_p \times f^p)^* \Psi_p = (f_q \times f^q)^* \Psi_q \quad \forall x \in (A_p \times A^p) \cap (A_q \times A^q) \cap \mathfrak{N}.$$

Следовательно, на $\mathfrak{N}$ существует единственная псевдориманова метрика Ψ , удовлетворяющая условию

$$\Psi|_{(A_p \times A^p) \cap \mathfrak{N}} = (f_p \times f^p)^* \Psi_p.$$

При этом

$$\Pi^* \Psi = \frac{1}{(x_w x^w)^2} (x_u x^v - (x_w x^w) \delta_v^u) dx_u \odot dx^v. \quad (6)$$

Осталось заметить, что формы Ψ , Ω и оператор почти произведения $\mathbf{I}$ связаны соотношениями

$$\mathbf{I}^2 = \text{id}, \quad \Psi(\mathbf{I}X, \mathbf{I}Y) = -\Psi(X, Y), \quad \Omega(X, Y) = \Psi(X, \mathbf{I}Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathfrak{N}).$$

Таким образом, пара $\{\Psi, \mathbf{I}\}$ является внутренним образом определенной почти-эрмитовой структурой гиперболического типа на многообразии $\mathfrak{N}$. При этом симплектическая форма Ω является фундаментальной 2-формой этой структуры.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В векторной интерпретации (ср. с замечанием 1) эрмитову метрику $\Psi_{(\langle a \rangle, \langle \xi \rangle)}$ будем отождествлять с формой $\xi(a) \cdot \Pi_{(a, \xi)}^* \Psi$. Тогда из (6) находим, что для любых векторов $b, c \in W$ и ковекторов $\eta, \zeta \in W^*$ справедлива формула

$$\Psi_{(\langle a \rangle, \langle \xi \rangle)}(b \oplus \eta; c \oplus \zeta) = -\frac{1}{\xi(a)} \left(\left| \begin{array}{cc} \xi(a) & \xi(c) \\ \eta(a) & \eta(c) \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} \xi(a) & \xi(b) \\ \zeta(a) & \zeta(b) \end{array} \right| \right). \quad (7)$$

Так же, как и (4), формула (7) инвариантна относительно преобразований вида

$$\begin{aligned} b &\mapsto b + \langle a \rangle, & \eta &\mapsto \eta + \langle \xi \rangle, & c &\mapsto c + \langle a \rangle, & \zeta &\mapsto \zeta + \langle \xi \rangle, \\ a &\mapsto \lambda a, & \xi &\mapsto \mu \xi. \end{aligned}$$

Стандартные вычисления приводят к формулам $\nabla \Psi = \nabla \Omega = \nabla \mathbf{I} = 0$, где ∇ – связность Леви–Чивита метрики Ψ . Секционная кривизна в двумерном направлении $X \wedge Y$ вычисляется так:

$$k(X \wedge Y) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{\Omega(X, Y)^2}{\Psi(X, Y)^2 - \Psi(X, X)\Psi(Y, Y)}. \quad (8)$$

Из последней формулы следует, в частности, что $k(X \wedge \mathbf{I}X) = 1$. Таким образом, *многообразие невырожденных нуль-пар $\mathfrak{N}$ является келеровым многообразием гиперболического типа постоянной ненулевой голоморфной секционной кривизны*. Более того, любое келерово многообразие гиперболического типа постоянной ненулевой голоморфной секционной кривизны локально голоморфно изометрично многообразию невырожденных нуль-пар $\mathfrak{N}$ (см. [2]). Кроме того, несложно показать, что многообразии невырожденных нуль-пар несет структуру однородного пространства:

$$\mathfrak{N} = \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R}) / \mathrm{GL}(1, \mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}).$$

Таким образом, многообразие невырожденных нуль-пар $\mathfrak{N}$ является аналогом (неплоских) комплексных пространственных форм в гиперболической геометрии. При этом аналогом вполне вещественных подмногообразий на многообразии $\mathfrak{N}$ являются лагранжевы подмногообразия симплектической структуры Ω . Прямым следствием формулы (8) является тот факт, что на лагранжевых подмногообразиях секционная кривизна метрики Ψ постоянна и равна $1/4$.

Далее нас будет интересовать лишь *естественная симплектическая структура на $\mathfrak{N}$, порожденная фундаментальной формой Ω* .

3. Алгебраическая интерпретация естественной симплектической структуры на $\mathfrak{N}$. Кратко опишем конструкцию, позволяющую дать альтернативное определение симплектической формы Ω на многообразии невырожденных нуль-пар. Пусть $G = \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R})$ – полная линейная группа порядка $n+1$; $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n+1, \mathbb{R})$ – ее алгебра Ли; $\mathrm{Ad}: G \rightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ – присоединенное представление, $\mathrm{Ad}_g \xi = g\xi g^{-1} \quad \forall g \in G, \forall \xi \in \mathfrak{g}$; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – метрика Киллинга (эта метрика отличается от стандартной метрики Киллинга (см., например, [3, лекция 18, пример 1]) на постоянный множитель) на $\mathfrak{g}$:

$$\langle \xi, \eta \rangle = -\mathrm{tr}(\xi \cdot \eta) + \frac{1}{n+1} \mathrm{tr} \xi \cdot \mathrm{tr} \eta \quad \forall \xi, \eta \in \mathfrak{g}.$$

Рассмотрим группу $H = \mathrm{GL}(1, \mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, стандартно вложенную в G . Пусть $f = \mathrm{Ad}(Z_0) : g \mapsto \mathrm{Ad}_g(Z_0) = gZ_0g^{-1}$ – отображение орбиты элемента

$$Z_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g},$$

а $M = f(G)$ – соответствующая орбита в $\mathfrak{g}$. Непосредственная проверка показывает, что группа изотропии элемента Z_0 совпадает с H , и так как $f(gH) = f(g) \forall g \in G$, то существует диффеоморфизм $f : G/H \mapsto M$ однородных пространств $G/H = \mathfrak{N}$ и M . Действительно, пусть $Z = f(g) \in \mathfrak{g}$ – текущая точка орбиты M , а $x = (a; \xi) = (a^0 : a^1 : \dots : a^n; \xi_0 : \xi_1 : \dots : \xi_n) \in \mathfrak{N}$ – текущая точка многообразия невырожденных нуль-пар. Тогда, как легко видеть, диффеоморфизм $\hat{f}$ задается формулой

$$\hat{f} : (a^0 : a^1 : \dots : a^n; \xi_0 : \xi_1 : \dots : \xi_n) \mapsto \frac{1}{\xi(a)} \begin{pmatrix} a^0 \xi_0 & a^0 \xi_1 & \dots & a^0 \xi_n \\ a^1 \xi_0 & a^1 \xi_1 & \dots & a^1 \xi_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n \xi_0 & a^n \xi_1 & \dots & a^n \xi_n \end{pmatrix}.$$

Интерпретируя a как столбец высоты $n + 1$, а ξ как строку длины $n + 1$, последнюю формулу запишем в виде

$$\hat{f} : (p(a); p(\xi)) \mapsto \frac{1}{\xi \cdot a} a \cdot \xi = \frac{1}{\xi(a)} a \cdot \xi,$$

где $\cdot$ – матричное умножение.

Каноническая симплектическая форма F на M (форма *Кириллова–Костана–Сурьо на орбите присоединенного представления*) определяется так (см., например, [4, формула (8.65)]):

$$F_Z(X, Y) = \langle Z, [\mathrm{ad}_Z X, \mathrm{ad}_Z Y] \rangle \quad \forall X, Y \in \mathrm{Im} \mathrm{ad}_Z \cong T_Z M.$$

Найдем форму $\hat{f}^* F$, увлеченную с M на $\mathfrak{N}$. Прежде всего найдем касательные векторы $\mathrm{ad}_Z X$ и $\mathrm{ad}_Z Y$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_Z X &= [Z, X] = \frac{1}{\xi \cdot a} (a \cdot \xi \cdot X - X \cdot a \cdot \xi) = \frac{1}{\xi(a)} (a \cdot \eta - b \cdot \xi), \\ \mathrm{ad}_Z Y &= [Z, Y] = \frac{1}{\xi \cdot a} (a \cdot \xi \cdot Y - Y \cdot a \cdot \xi) = \frac{1}{\xi(a)} (a \cdot \zeta - c \cdot \xi), \end{aligned}$$

где $\eta = \xi \cdot X$, $b = X \cdot a$, $\zeta = \xi \cdot Y$, $c = Y \cdot a$.

Далее находим

$$\begin{aligned} [\mathrm{ad}_Z X, \mathrm{ad}_Z Y] &= \frac{1}{\xi(a)\xi(a)} [(a \cdot \eta - b \cdot \xi), (a \cdot \zeta - c \cdot \xi)] \\ &= \frac{1}{\xi(a)\xi(a)} (a \cdot \eta \cdot a \cdot \zeta - a \cdot \eta \cdot c \cdot \xi - b \cdot \xi \cdot a \cdot \zeta + b \cdot \xi \cdot c \cdot \xi \\ &\quad - a \cdot \zeta \cdot a \cdot \eta + a \cdot \zeta \cdot b \cdot \xi + c \cdot \xi \cdot a \cdot \eta - c \cdot \xi \cdot b \cdot \xi) \\ &= \frac{1}{\xi(a)\xi(a)} (\eta(a)a \cdot \zeta - \eta(c)a \cdot \xi - \xi(a)b \cdot \zeta + \xi(c)b \cdot \xi \\ &\quad - \zeta(a)a \cdot \eta + \zeta(b)a \cdot \xi + \xi(a)c \cdot \eta - \xi(b)c \cdot \xi). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \langle Z, [\text{ad}_Z X, \text{ad}_Z Y] \rangle &= -\text{tr}(Z \cdot [\text{ad}_Z X, \text{ad}_Z Y]) + \frac{1}{n+1} \text{tr} Z \text{tr}([\text{ad}_Z X, \text{ad}_Z Y]) \\
 &= -\frac{1}{\xi(a)\xi(a)\xi(a)} \text{tr}(a \cdot \xi \cdot (\eta(a)a \cdot \zeta - \eta(c)a \cdot \xi - \xi(a)b \cdot \zeta + \xi(c)b \cdot \xi - \\
 &\quad - \zeta(a)a \cdot \eta + \zeta(b)a \cdot \xi + \xi(a)c \cdot \eta - \xi(b)c \cdot \xi)) \\
 &\quad + \frac{1}{(n+1)\xi(a)\xi(a)\xi(a)} \text{tr}(a \cdot \xi) \text{tr}(\eta(a)a \cdot \zeta - \eta(c)a \cdot \xi - \xi(a)b \cdot \zeta \\
 &\quad + \xi(c)b \cdot \xi - \zeta(a)a \cdot \eta + \zeta(b)a \cdot \xi + \xi(a)c \cdot \eta - \xi(b)c \cdot \xi) \\
 &= \frac{1}{\xi(a)\xi(a)} (\xi(a)\eta(c) - \xi(c)\eta(a) - \xi(a)\zeta(b) + \xi(b)\zeta(a)) \\
 &= \frac{1}{\xi(a)\xi(a)} \left(\begin{vmatrix} \xi(a) & \xi(c) \\ \eta(a) & \eta(c) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \xi(a) & \xi(b) \\ \zeta(a) & \zeta(b) \end{vmatrix} \right).
 \end{aligned}$$

Итак,

$$\hat{f}^* F_Z(X, Y) = \frac{1}{\xi(a)\xi(a)} \left(\begin{vmatrix} \xi(a) & \xi(c) \\ \eta(a) & \eta(c) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \xi(a) & \xi(b) \\ \zeta(a) & \zeta(b) \end{vmatrix} \right),$$

где

$$Z = \frac{1}{\xi(a)} a \cdot \xi, \quad \eta = \xi \cdot X, \quad b = X \cdot a, \quad \zeta = \xi \cdot Y, \quad c = Y \cdot a.$$

Преобразуем последнюю формулу:

$$\begin{aligned}
 \hat{f}^* F_Z(X, Y) &= \frac{1}{(\xi_w a^w)^2} \left(\begin{vmatrix} \xi_w a^w & \xi_u dx^u(c) \\ dx_u(\eta) a^u & dx_u(\eta) dx^u(c) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \xi_w a^w & \xi_u dx^u(b) \\ dx_u(\zeta) a^u & dx_u(\zeta) dx^u(b) \end{vmatrix} \right) \\
 &= \frac{1}{(\xi_w a^w)^2} (\xi_w a^w dx_u(\eta) dx^u(c) - \xi_u dx^u(c) dx_v(\eta) a^v \\
 &\quad - \xi_u a^w dx_u(\zeta) dx^u(b) + \xi_u dx^u(b) dx_v(\zeta) a^v) \\
 &= \frac{1}{(\xi_w a^w)^2} (\xi_w a^w \delta_u^v dx_v(\eta) dx^u(c) - \xi_u dx^u(c) dx_v(\eta) a^v \\
 &\quad - \xi_w a^w \delta_u^v dx_v(\zeta) dx^u(b) + \xi_u dx^u(b) dx_v(\zeta) a^v) \\
 &= \frac{1}{(\xi_w a^w)^2} (\xi_w a^w \delta_u^v - \xi_u a^v) (dx_u(\eta) dx^v(c) - dx_u(\zeta) dx^u(b)).
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\hat{f}^* F = \frac{1}{(x_w x^w)^2} ((x_w x^w) \delta_u^v - x_u x^v) dx_u \wedge dx^v$$

и мы приходим к формуле (3). Производя далее в обратном порядке вычисления из п. 1 в доказательстве предложения 1, найдем, что ограничения формы $\hat{f}^* F$ на области канонического атласа имеют вид (1). Тем самым доказано, что *симплектическая форма Ω , описанная ранее в терминах канонического атласа, является образом формы Кириллова–Костана–Сурьо при диффеоморфизме отождествления многообразия невырожденных нуль-пар $\mathfrak{N}$ с орбитой M присоединенного представления группы $\text{GL}(n+1, \mathbb{R})$* . Такой подход дает альтернативное доказательство предложения 1 и мотивирует появление явных формул (1) для симплектической структуры Ω .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Вышесказанное объясняет использование термина “естественная” для симплектической структуры Ω . Можно показать, что именно эта структура, но иначе определенная (в терминах форм Маурера–Картана), рассматривалась в работе [2]. Для наших целей наиболее оптимальным является определение формы Ω формулой (1) в терминах канонического атласа на $\mathfrak{N}$. Поэтому, а также для единообразия и полноты изложения, в разделе 2 было дано подробное доказательство предложения 1 в терминах канонического атласа.

4. Симплектоморфность многообразия невырожденных нуль-пар кокасательному расслоению проективного пространства. Пусть $P(W^*)_A$ – множество всех гиперплоскостей в $P(W)$, не проходящих через точку $A \in P(W)$. Зафиксируем вектор $a \in p^{-1}(A)$ и рассмотрим отображение

$$\rho_a: P(W^*)_A \times P(W^*)_A \rightarrow T_A^*P(W),$$

определяемое соотношением

$$\rho_a(p(\xi), p(\eta)) = (p_a^*)^{-1} \left(\frac{1}{\eta(a)} \eta - \frac{1}{\xi(a)} \xi \right). \quad (9)$$

Напомним, что $(p_a^*)^{-1}: \text{Ann}\langle a \rangle \rightarrow T_A^*P(W)$ – изоморфизм, описанный в разделе 1. Так как

$$\begin{aligned} \rho_{\lambda a}(p(\xi), p(\eta)) &= (p_{\lambda a}^*)^{-1} \left(\frac{1}{\eta(\lambda a)} \eta - \frac{1}{\xi(\lambda a)} \xi \right) = \lambda (p_a^*)^{-1} \left(\frac{1}{\lambda \eta(a)} \eta - \frac{1}{\lambda \xi(a)} \xi \right) \\ &= \rho_a(p(\xi), p(\eta)), \end{aligned}$$

то $\rho_{\lambda a} = \rho_a$. Следовательно, отображение ρ_a не зависит от выбора вектора a , порождающего точку A . Это отображение будем обозначать через ρ_A .

ЛЕММА 1. *Отображение ρ_A определяет на $P(W^*)_A$ структуру аффинного пространства, ассоциированным векторным пространством которого является пространство $T_A^*P(W)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим аксиомы Вейля аффинного пространства.

1. Пусть θ – произвольный элемент из $T_A^*P(W)$, а $p(\xi)$ – произвольная гиперплоскость из $P(W^*)_A$. Тогда существует единственная гиперплоскость $p(\eta)$ из $P(W^*)_A$, удовлетворяющая условию $\rho_A(p(\xi), p(\eta)) = \theta$. Действительно, пусть

$$\eta = p_a^*(\theta) + \frac{1}{\xi(a)} \xi.$$

Тогда из формулы (9) и свойства $p_a^*(\theta) \in \text{Ann}\langle a \rangle$ получим

$$\begin{aligned} \rho_A(p(\xi), p(\eta)) &= (p_a^*)^{-1} \left(\frac{\eta}{\eta(a)} - \frac{\xi}{\xi(a)} \right) = (p_a^*)^{-1} \left(\frac{p_a^*(\theta) + \frac{1}{\xi(a)} \xi}{p_a^*(\theta)(a) + \frac{1}{\xi(a)} \xi(a)} - \frac{1}{\xi(a)} \xi \right) \\ &= (p_a^*)^{-1} (p_a^*)(\theta) = \theta. \end{aligned}$$

Кроме того, в силу свойства $p_a^*(\theta) \in \text{Ann}\langle a \rangle$ найдем, что $\eta(a) = 1 \neq 0$. Следовательно, $p(\eta) \in P(W^*)_A$. Пусть теперь $p(\eta')$ – другая точка из $P(W^*)_A$, удовлетворяющая условию $\rho_A(p(\xi), p(\eta')) = \theta$. Тогда

$$\frac{\eta(x)}{\eta(a)} - \frac{\xi(x)}{\xi(a)} = \frac{\eta'(x)}{\eta'(a)} - \frac{\xi(x)}{\xi(a)} \quad \forall x \in W.$$

Следовательно,

$$\eta' = \frac{\eta'(a)}{\eta(a)}\eta \quad \text{и} \quad p(\eta') = p(\eta).$$

2. Проверим аксиому треугольника. Так как

$$\left(\frac{\eta}{\eta(a)} - \frac{\xi}{\xi(a)} \right) + \left(\frac{\zeta}{\zeta(a)} - \frac{\eta}{\eta(a)} \right) = \frac{\zeta}{\zeta(a)} - \frac{\xi}{\xi(a)},$$

в силу линейности отображения $(p_a^*)^{-1}$ получим

$$\rho_A(p(\xi), p(\eta)) + \rho_A(p(\eta), p(\zeta)) = \rho_A(p(\xi), p(\zeta)).$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\mathfrak{N}$ – многообразие невырожденных нуль-пар проективного пространства $P(W)$, а $\mathfrak{N}_A$ – подмногообразие нуль-пар (A, Ξ) с фиксированной точкой A . Тогда подмногообразие $\mathfrak{N}_A$ несет структуру аффинного пространства, ассоциированное векторное пространство которого канонически изоморфно кокасательному пространству $T_A^*P(W)$ к проективному пространству в точке A .

Обозначим через $\pi_1: \mathfrak{N} \equiv (P(W) \times P(W^*)) \setminus \mathfrak{M}_0 \rightarrow P(W)$ проекцию на первый сомножитель. Ясно, что π_1 – гладкая регулярная сюръекция. Пусть $\mathbb{A}^n$ – арифметическое аффинное пространство и $\text{Aff}(n, \mathbb{R})$ – группа аффинных преобразований пространства $\mathbb{A}^n$, рассматриваемая как полупрямое произведение групп $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ и $\mathbb{R}^n$. Напомним, что умножение в $\text{Aff}(n, \mathbb{R})$ определяется как

$$(A; x) \cdot (B; y) = (AB; Ay + x) \quad \forall A, B \in \text{GL}(n, \mathbb{R}), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

ЛЕММА 2. Проекция $\pi_1: \mathfrak{N} \rightarrow P(W)$ определяет локально тривиальное расслоение (в смысле [5, гл. II, п. 1, определение 1]) с тотальным пространством $\mathfrak{N}$, базой $P(W)$, проекцией π_1 , типичным слоем $\mathbb{A}^n$ и структурной группой $\text{Aff}(n, \mathbb{R})$. Атлас этого расслоения однозначно определяется аффинным атласом кокасательного расслоения $T^*P(W)$ и аффинными отображениями ρ_A для всех $A \in P(W)$. При этом слой $\mathfrak{N}_A = \pi_1^{-1}(A)$ над точкой A несет каноническую структуру аффинного пространства $\mathbb{A}^n$, ассоциированным векторным пространством которого является кокасательное пространство $T_A^*P(W)$ к проективному пространству в точке A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{A} = \{(A_p, f_p) \mid p = 0, 1, \dots, n\}$ – аффинный атлас на $P(W)$. Каноническая структура векторного расслоения определяется на $T^*P(W)$ при помощи атласа $\widehat{\mathcal{U}} = \{(\widehat{U}_p, \widehat{F}_p) \mid p = 0, 1, \dots, n\}$, где $\widehat{U}_p = \pi^{-1}(A_p)$, $\pi: T^*P(W) \rightarrow P(W)$ – каноническая проекция, а $\widehat{F}_p: \widehat{U}_p \rightarrow A_p \times \mathbb{R}^n$ – тривиализирующие диффеоморфизмы, определяемые соотношениями

$$\widehat{F}_p: (A, \omega_A) \mapsto (A, (f_p^{-1})^* \omega_A).$$

Рассмотрим теперь семейство открытых множеств $\{U_p\}_{p=0,1,\dots,n}$ на $\mathfrak{N}$, где $U_p = \pi_1^{-1}(A_p)$, а $\pi_1: \mathfrak{N} \equiv P(W) \times P(W^*) \setminus \mathfrak{M}_0 \rightarrow P(W)$ – проекция на первый сомножитель. Ясно, что $\{U_p\}_{p=0,1,\dots,n}$ – открытое покрытие многообразия $\mathfrak{N}$. Для каждого U_p рассмотрим отображение $F_p: U_p \rightarrow A_p \times \mathbb{A}^n$, определяемое соотношениями

$$F_p: (A, \Xi) \mapsto (A, (f_p^{-1})^* \circ \rho_A(E^p, \Xi)),$$

где $E^p = p(e^p)$, а e^p – базисный ковектор с номером p . Обратим внимание на то, что

$$F_p(u) = \widehat{F}_p \circ \rho_{\pi_1(u)}(\pi_1(u), E^p) \quad \forall u \in U_p = \pi_1^{-1}(A_p),$$

т.е. отображение F_p определяется при помощи диффеоморфизма $\widehat{F}_p$ и аффинных отображений ρ_A , где $A \in A_p \subset P(W)$. Несложно проверить, что F_p – диффеоморфизм для каждого p . Следовательно, $\mathcal{U} = \{(U_p, F_p) \mid p = 0, 1, \dots, n\}$ – допустимый атлас на $\mathfrak{N}$.

Докажем, что атлас $\mathcal{U}$ определяет на $\mathfrak{N}$ структуру искомого расслоения. Если $A \in A_p \cap A_q$, то

$$F_q: (A, \Xi) \mapsto (A, (f_q^{-1})^* \circ \rho_A(E^q, \Xi)).$$

Функция перехода

$$F_{qp} \equiv F_q \circ F_p^{-1}: (A_p \cap A_q) \times \mathbb{A}^n \rightarrow (A_p \cap A_q) \times \mathbb{A}^n$$

определяется так:

$$F_{qp}: (A, (f_p^{-1})^* \circ \rho_A(E^p, \Xi)) \mapsto (A, (f_q^{-1})^* \circ \rho_A(E^q, \Xi)).$$

С другой стороны, пусть $x = (f_p^{-1})^* \circ \rho_A(E^p, \Xi) \in \mathbb{A}^n$. Тогда

$$\begin{aligned} (f_q^{-1})^* \circ \rho_A(E^q, \Xi) &= (f_q^{-1})^* (\rho_A(E^q, E^p) + \rho_A(E^p, \Xi)) \\ &= (f_q^{-1})^* \circ \rho_A(E^q, E^p) + (f_q^{-1})^* \circ \rho_A(E^p, \Xi) \\ &= C_{qp} + (f_q^{-1})^* \circ (f_p)^* \circ (f_p^{-1})^* \circ \rho_A(E^p, \Xi) \\ &= C_{qp} + (f_p \circ f_q^{-1})^* \circ (f_p^{-1})^* \circ \rho_A(E^p, \Xi) \\ &= C_{qp} + (f_p \circ f_q^{-1})^* ((f_p^{-1})^* \circ \rho_A(E^p, \Xi)) = C_{qp} + (f_p \circ f_q^{-1})^*(x), \end{aligned}$$

где $C_{qp} = (f_q^{-1})^* \circ \rho_A(E^q, E^p)$ – постоянный вектор в $\mathbb{R}^n$, а $(f_p \circ f_q^{-1})^*$ – элемент группы $GL(n, \mathbb{R})$ для каждой точки $A \in A_p \cap A_q$. Итак,

$$F_{qp}: (A, x) \mapsto (A, C_{qp} + (f_p \circ f_q^{-1})^*(x)),$$

т.е. имеем отображение $h_{qp}: A_p \cap A_q \rightarrow \text{Aff}(n, \mathbb{R})$ из $A_p \cap A_q$ в группу Ли $\text{Aff}(n, \mathbb{R})$ аффинных преобразований пространства $\mathbb{A}^n$, определяемое по закону

$$h_{qp}(A) = ((f_p \circ f_q^{-1})_A^*, (f_q^{-1})^* \circ \rho_A(E^q, E^p)) \in \text{Aff}(n, \mathbb{R}).$$

Аффинное преобразование $h_{qp}(A)$ соответствует переходу от карты (A_p, f_p) к карте (A_q, f_q) атласа $\mathcal{A}$. Пусть теперь $A \in A_p \cap A_q \cap A_r$. Тогда

$$h_{rq}(A) = ((f_q \circ f_r^{-1})_A^*, (f_r^{-1})^* \circ \rho_A(E^r, E^q)) \in \text{Aff}(n, \mathbb{R}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} h_{rq}(A) \cdot h_{qp}(A) &= ((f_q f_r^{-1})_A^*, (f_r^{-1})_A^* \rho_A(E^r, E^q)) \cdot ((f_p f_q^{-1})_A^*, (f_q^{-1})_A^* \rho_A(E^q, E^p)) \\ &= ((f_q f_r^{-1})_A^* (f_p f_q^{-1})_A^*; (f_q f_r^{-1})_A^* (f_q^{-1})_A^* \rho_A(E^q, E^p) + (f_r^{-1})_A^* \rho_A(E^r, E^q)) \\ &= ((f_p f_r^{-1})_A^*; (f_r^{-1})_A^* (\rho_A(E^q, E^p) + \rho_A(E^r, E^q))) \\ &= ((f_p f_r^{-1})_A^*; (f_r^{-1})_A^* (-\rho_A(E^p, E^q) - \rho_A(E^q, E^r))) \\ &= ((f_p f_r^{-1})_A^*; (f_r^{-1})_A^* (-\rho_A(E^p, E^r))) \\ &= ((f_p f_r^{-1})_A^*; (f_r^{-1})_A^* \rho_A(E^r, E^p)) = h_{rp}(A). \end{aligned}$$

Таким образом, $h_{rp}(A) = h_{rq}(A) \cdot h_{qp}(A) \quad \forall A \in A_p \cap A_q \cap A_r$.

Итак, имеем локально тривиальное расслоение с тотальным пространством $\mathfrak{N}$, базой $P(W)$, проекцией π_1 , типичным слоем $\mathbb{A}^n$, структурной группой $\text{Aff}(n, \mathbb{R})$ и тривиализирующим атласом $\mathcal{U}$. Слой $\mathfrak{N}_A = \pi_1^{-1}(A)$ над точкой A несет каноническую структуру аффинного пространства $\mathbb{A}^n$, ассоциированным векторным пространством которого является кокасательное пространство $T_A^*P(W)$ к проективному пространству в точке A .

ЛЕММА 3. *Расслоение $\pi_1: \mathfrak{N} \rightarrow P(W)$ допускает сечение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $g = (\cdot, \cdot)$ стандартное скалярное произведение в $W = \mathbb{R}^{n+1}$. Операция опускания индекса при помощи метрики g определяет изоморфизм i_g векторных пространств W и W^* . Ковектор $i_g(a): x \mapsto (a, x) \quad \forall x \in W$, соответствующий вектору a при этом изоморфизме, будем обозначать через $\hat{a}$. Изоморфизм i_g индуцирует отображение s из $P(W)$ в $P(W^*)$ по закону $s: p(a) \mapsto p(\hat{a})$. Так как $\hat{a}(a) = (a, a) \neq 0$ для любого $a \neq 0$, то $s(A) \in \mathfrak{N}_A \quad \forall A \in P(W)$. Кроме того, очевидно, что $\pi_1 \circ s = \text{id}_{P(W)}$. Следовательно, s – сечение.

ЛЕММА 4. *Многообразие невырожденных нуль-пар $\mathfrak{N}$ диффеоморфно кокасательному расслоению $T^*P(W)$. Диффеоморфизм устанавливается при помощи отображения*

$$\sigma: \mathfrak{N} \ni (A, \Xi) \mapsto (A, \rho_A(s(A), \Xi)) \in T_A^*P(W).$$

Более подробно, невырожденной нуль-паре $x = (A, \Xi) = (p(a), p(\xi))$ соответствует линейная форма $\sigma(x) = \omega \in T_A^*P(W)$, определяемая соотношением

$$\omega_A = (p_a^*)^{-1} \left(\frac{\xi}{\xi(a)} - \frac{\hat{a}}{\hat{a}(a)} \right) \quad \forall a \in p^{-1}(A). \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Очевидно, что отображение σ биективно, так как оно обратимо. Отображение σ^{-1} определяется как

$$\sigma^{-1}: T_A^*P(W) \ni (A, \omega_A) \mapsto (A, p(\xi)) \in \mathfrak{N},$$

где

$$\xi = p_a^* \omega + \frac{\hat{a}}{\hat{a}(a)} \quad \forall a \in p^{-1}(A).$$

2. Докажем, что σ и σ^{-1} — гладкие отображения.

Пусть y^{i_p} и y_{j_p} — локальные координаты на $\mathfrak{N}$ в области $(A_p \times A^p) \cap \mathfrak{N}$, а z^{i_p} и z^{j_p} — локальные координаты на $T^*P(W)$ в области $\hat{U}_p$. Тогда из (10) находим, что локальная запись отображения σ имеет вид

$$\hat{F}_p \circ \sigma \circ (f_p \times f^p)^{-1}: \begin{cases} z^{i_p} = y^{i_p}, \\ z_{i_p} = \frac{y_{i_p}}{1 + y_{j_p} y^{j_p}} - \frac{y^{i_p}}{1 + \sum y^{j_p} y^{j_p}}. \end{cases} \quad (11)$$

Ясно, что σ — гладкое отображение. Дифференцируя, найдем

$$(\hat{F}_p \circ \sigma \circ (f_p \times f^p)^{-1})^* dz^{i_p} = dy^{i_p}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} (\hat{F}_p \circ \sigma \circ (f_p \times f^p)^{-1})^* dz_{i_p} &= \frac{(1 + y_{j_p} y^{j_p}) dy_{i_p} - y_{i_p} (dy_{j_p} y^{j_p} + y_{j_p} dy^{j_p})}{(1 + y_{j_p} y^{j_p})^2} \\ &\quad - \frac{(1 + \sum y^{j_p} y^{j_p}) dy^{i_p} - 2y^{i_p} \sum y^{j_p} dy^{j_p}}{(1 + \sum y^{j_p} y^{j_p})^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Из (12), (13) следует, что матрица Якоби отображения σ имеет вид

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} (\delta_{i_p}^{j_p}) & 0 \\ \left(\frac{2y^{i_p} y^{j_p} - \mu \delta_{i_p}^{j_p}}{\mu^2} - \frac{y_{i_p} y_{j_p}}{\lambda^2} \right) & \left(\frac{\lambda \delta_{i_p}^{j_p} - y_{i_p} y^{j_p}}{\lambda^2} \right) \end{pmatrix},$$

где $\lambda = 1 + y_{j_p} y^{j_p}$ и $\mu = 1 + \sum y^{j_p} y^{j_p}$. Так как

$$\det \mathbf{J} = \det \left(\frac{\lambda \delta_{i_p}^{j_p} - y_{i_p} y^{j_p}}{\lambda^2} \right) = \frac{1}{\lambda^{2n}} (\lambda^n - \lambda^{n-1} y_{j_p} y^{j_p}) = \frac{1}{\lambda^{n+1}} \neq 0,$$

то отображение σ является регулярным в области $(A_p \times A^p) \cap \mathfrak{N}$. Отображение σ^{-1} определяется в области $\sigma((A_p \times A^p) \cap \mathfrak{N}) \subset \hat{U}_p$ формулой

$$(f_p \times f^p) \circ \sigma^{-1} \circ \hat{F}_p^{-1}: \begin{cases} y^{i_p} = z^{i_p}, \\ y_{i_p} = \frac{(1 + \sum z^{k_p} z^{k_p}) z_{i_p} + z^{i_p}}{1 - z_{j_p} z^{j_p} (1 + \sum z^{k_p} z^{k_p})}. \end{cases}$$

Так как для любой точки из $\sigma((A_p \times A^p) \cap \mathfrak{N})$ имеет место формула

$$1 - z_{j_p} z^{j_p} \left(1 + \sum z^{k_p} z^{k_p} \right) = \frac{1 + \sum y^{k_p} y^{k_p}}{1 + y_{j_p} y^{j_p}} \neq 0,$$

то σ^{-1} — гладкое отображение.

Итак, σ и σ^{-1} — гладкие биекции. Следовательно, σ — диффеоморфизм.

Теперь мы можем сформулировать основной результат.

ТЕОРЕМА. Многообразие невырожденных нуль-пар $\mathfrak{N}$ проективного пространства $P(W)$ симплектоморфно кокасательному расслоению $T^*P(W)$ к проективному пространству $P(W)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что диффеоморфизм $\sigma: \mathfrak{N} \rightarrow T^*P(W)$ является симплектоморфизмом относительно естественной симплектической структуры на $\mathfrak{N}$ и канонической симплектической структуры на $T^*P(W)$.

Пусть ω – стандартная форма Лиувилля [6] на $T^*P(W)$, определяемая равенством

$$\omega(X)\theta = \theta(\pi_*(X))_{\pi(\theta)} \quad \forall \theta \in T^*P(W), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(T^*P(W)).$$

Тогда $\Theta = d\omega$ – каноническая симплектическая форма на $T^*P(W)$. В локальных координатах $\{z^{i_p}, z_{j_p}\}$ на $\widehat{U}_p \subset T^*P(W)$ форма Θ имеет вид

$$\Theta|_{\widehat{U}_p} = F_p^* \Theta, \quad \text{где } \Theta = dz_{i_p} \wedge dz^{i_p}.$$

Ясно, что $\sigma^* \Theta$ – некоторая симплектическая форма на $\mathfrak{N}$, так как σ – диффеоморфизм. Используя формулы (12), (13), находим

$$\begin{aligned} \sigma^* \Theta|_{\widehat{U}_p} &= \sigma^* \circ F_p^* \Theta = \sigma^* \circ F_p^* dz_{i_p} \wedge dz^{i_p} = \sigma^* \circ F_p^* dz_{i_p} \wedge \sigma^* \circ F_p^* dz^{i_p} \\ &= (f_p \times f^p)^* (((f_p \times f^p)^{-1})^* \circ \sigma^* \circ F_p^* dz_{i_p} \wedge ((f_p \times f^p)^{-1})^* \circ \sigma^* \circ F_p^* dz^{i_p}) \\ &= (f_p \times f^p)^* \left(\frac{1}{(1 + y_{k_p} y^{k_p})^2} ((1 + y_{k_p} y^{k_p}) \delta_{j_p}^{i_p} - y^{i_p} y_{j_p}) dy_{i_p} \wedge dy^{j_p} \right) \\ &= (f_p \times f^p)^* \Omega = \Omega|_{(A_p \times A^p) \cap \mathfrak{N}}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\sigma^* \Theta|_{\widehat{U}_p} = \Omega|_{(A_p \times A^p) \cap \mathfrak{N}} \quad \forall p \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Следовательно, $\sigma^* \Theta = \Omega$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Простейший пример механической системы, фазовым пространством которой является многообразие невырожденных нуль-пар, строится следующим образом. Пусть внутри сферы помещен стержень, длина которого равна диаметру сферы. Тогда пространство конфигураций стержня параметризуется точками проективной плоскости P^2 , а фазовое пространство отождествляется с кокасательным расслоением T^*P^2 , которое в силу доказанной теоремы симплектоморфно четырехмерному многообразию невырожденных нуль-пар на проективной плоскости.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Пусть теперь

$$\mathfrak{M}_0 = \{(\langle a \rangle, \langle \xi \rangle) \in P(W) \times P(W^*) \mid \xi(a) = 0\} = \bigcup_{a \in W \setminus \{0\}} \langle a \rangle \times P(\text{Ann} \langle a \rangle)$$

– многообразие вырожденных нуль-пар в проективном пространстве $P(W)$, а

$$PT^*P(W) = \bigcup_{A \in P(W)} P(T_A^*P(W))$$

– *проективизация кокасательного расслоения* пространства $P(W)$, т.е. $PT^*P(W)$ – многообразие всех проективных пространств $P(T_A^*P(W))$, порожденных кокасательными пространствами $T_A^*P(W)$ к проективному пространству $P(W)$ во всех его точках $A \in P(W)$. Ясно, что

$$\dim \mathfrak{M}_0 = \dim PT^*P(W) = 2 \cdot \dim P(W) - 1 = 2n - 1.$$

Рассмотрим отображение

$$\varrho = \text{id} \times p \circ (p_a^*)^{-1}: \mathfrak{M}_0 \rightarrow PT^*P(W),$$

определяемое соотношением

$$\varrho: (A, \Xi) \mapsto (A, p \circ (p_a^*)^{-1}(\xi)) \quad \forall a \in p^{-1}(A), \quad \forall \xi \in p^{-1}(\Xi).$$

Так как

$$p \circ (p_{\lambda a}^*)^{-1}(\mu\xi) = p((p_{\lambda a}^*)^{-1}(\mu\xi)) = p(\lambda\mu(p_a^*)^{-1}(\xi)) = p((p_a^*)^{-1}(\xi)) = p \circ (p_a^*)^{-1}(\xi),$$

то отображение ϱ не зависит от выбора вектора a и ковектора ξ , порождающих нуль-пару (A, Ξ) . Ясно, что ϱ – биекция. Обратное отображение имеет вид

$$\varrho^{-1}: (A, p(\theta)) \mapsto (A, p \circ p_a^*(\theta)) \quad \forall a \in p^{-1}(A), \quad \forall \theta \in T_A^*P(W).$$

Несложно проверить, что ϱ – диффеоморфизм. Таким образом, *многообразие невырожденных нуль-пар* $\mathfrak{N}$ *в* $P(W)$ *симплектоморфно кокасательному расслоению* $T^*P(W)$ *проективного пространства* $P(W)$, *а многообразие вырожденных нуль-пар* $\mathfrak{M}_0$ *диффеоморфно проективизации* $PT^*P(W)$ *кокасательного расслоения пространства* $P(W)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М.: Наука, 1966.
- [2] Kirichenko V. F. Generalized quasi-Kaehlerian manifolds and axioms of CR -submanifolds in generalized Hermitian geometry, II // Geometriae Dedicata. 1994. V. 52. P. 53–85.
- [3] Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр V. Группы и алгебры Ли. М.: Наука, 1982.
- [4] Бессе А. Многообразия Эйнштейна. Т. 1. М.: Мир, 1990.
- [5] Зуланке Р., Винтген П. Дифференциальная геометрия и расслоения. М.: Мир, 1975.
- [6] Годбийон К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, 1973.

Самарский государственный педагогический университет
E-mail: vkonnov@fa.ru

Поступило
22.03.2000
Исправленный вариант
26.09.2000