Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. К. Захаров, А. Д. Яшин, Конечная аксиоматизируемость локальной теории множеств, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 1, 70–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm7832>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 14:05:08

Конечная аксиоматизируемость локальной теории множеств

В. К. Захаров, А. Д. Яшин

Потребность в изменении аксиоматических теорий множеств была обусловлена, в частности, появлением теории категорий. Аксиоматические теории ZF и NBG оказались непригодными для определения понятия *модели теории категорий*. Дело в том, что в наивной теории категорий есть конструкции типа “категория категорий”. Конструкции типа “множество множеств” были сильно ограничены в аксиоматических теориях ZF и NBG . Аналогичным образом требовалось, с одной стороны, ограничить конструкции типа “категория категорий”, а с другой стороны, приспособить аксиоматическую теорию множеств для такого определения понятия модели категории, которое выдерживает ограниченные конструкции типа “категория категорий”. Для решения этой задачи достаточно быстро была придумана *аксиома универсальности* AU , утверждающая, что каждое множество является элементом некоторого универсального множества, замкнутого относительно всех конструкций NBG . К сожалению, в теориях $ZF + AU$ и $NBG + AU$ имеется слишком много универсальных множеств; столько же, сколько всех ординалов, в то время как для решения поставленной выше задачи достаточно иметь только перечислимую совокупность всех универсальных множеств. Поэтому первым автором в 2005 г. была введена *локально-минимальная теория множеств*, которая сохраняет аксиому универсальности AU и имеет не более чем перечислимую совокупность всех универсальных множеств. Этого удалось достичь за счет отказа от глобальной аксиомы замещения и замены ее на *локальную аксиому замещения для каждого универсального класса*.

Локально-минимальная теория множеств имеет четырнадцать аксиом и одну *аксиомную схему (выделения)*. В данной статье показывается, что эта аксиомная схема может быть заменена конечным числом аксиом – частных случаев схемы выделения. Использовано доказательство по схеме Бернайса, однако со значительными изменениями, обусловленными наличием условия ограниченной предикативности формулы в аксиомной схеме выделения.

Библиография: 12 названий.

Введение. Потребность в изменении аксиоматических теорий множеств была обусловлена появлением теории категорий. Аксиоматические теории ZF [1] и NBG [2], [3] оказались непригодными для определения понятия *модели теории категорий*. Дело в том, что в наивной теории категорий [4] есть конструкции типа “категория категорий”. Конструкции типа “множество множеств” были сильно ограничены в аксиоматических теориях ZF и NBG . Аналогичным образом требовалось, с одной стороны, ограничить конструкции типа “категория категорий”, а с другой стороны,

приспособить аксиоматическую теорию множеств для такого определения понятия модели категории, которое выдерживает ограниченные конструкции типа “категория категорий” [5].

Для решения этой задачи достаточно быстро была придумана *аксиома универсальности* AU , утверждающая, что каждое множество является элементом некоторого универсального множества, замкнутого относительно всех конструкций NBG .

Поэтому модели категорий нужно определять не глобально во всем NBG -универсуме, а только внутри некоторого универсального множества U . При необходимости рассмотреть “категорию U -категорий” нужно взять некоторое универсальное множество V такое, что $U \in V$, и рассмотреть V -категорию U -категорий. Эта аксиома приписывается Эресманну [6], Дедекеру [7], Зоннеру [8] и Гротендику [9].

К сожалению, в теориях $ZF + AU$ и $NBG + AU$ имеется слишком много универсальных множеств; столько же, сколько всех ординалов, в то время как для решения поставленной выше задачи достаточно иметь только перечислимую совокупность всех универсальных множеств.

Поэтому в [10], [11] были введены *локальная теория множеств* (LTS) и более широкая *локально-минимальная теория множеств* (LMTS) с дополнительной *аксиомой отрицания ω -универсальности*:

$$\neg AU(\omega) \equiv \neg \exists X (X \neq \emptyset \wedge (\forall U \in X \ X \bowtie U) \wedge \forall V \in X \exists W \in X (V \in W)).$$

Первая теория сохраняет аксиому универсальности AU , а вторая имеет не более чем перечислимую совокупность всех универсальных множеств в силу аксиомы $\neg AU(\omega)$ (см. [11; теорема 5 из пункта 5.5 и предложение 3 из пункта 6.2]). Этого удалось достичь за счет отказа от глобальной аксиомы замещения и замены ее на *локальную аксиому замещения для каждого универсального класса*. В [11] доказана следующая цепочка непротиворечивостей:

$$\begin{aligned} \text{cons}(ZF + AU) &\Rightarrow \text{cons}(LTS + AU(\omega)) \Rightarrow \text{cons}(ZF + AU(\omega)) \\ &\Rightarrow \text{cons}(LMTS) \Leftrightarrow \text{cons}(LTS) \Rightarrow \text{cons}(ZF + AU(1)), \end{aligned}$$

где $AU(1)$ утверждает существование хотя бы одного универсального объекта.

Локально-минимальная теория множеств имеет четырнадцать аксиом и одну *аксиомную схему (выделения)*. В данной статье показывается, что эта аксиомная схема может быть заменена конечным числом аксиом – частных случаев схемы выделения. Это означает, что указанные теории, так же, как NBG , являются конечно аксиоматизируемыми.

Отметим, что в отличие от доказательства конечной аксиоматизируемости NBG , приведенного в книге Э. Мендельсона [3], условие X -предикативности формулы φ в аксиомной схеме $AS2$ из LTS не позволяет провести доказательство по схеме Мендельсона. Поэтому потребовалось ввести еще две аксиомы (A2.14 и A2.15), выглядящие достаточно непривычно для знакомых с доказательством из [3]. Это привело к значительному изменению всей схемы доказательства.

1. Аксиомы локальной теории множеств. Локальная теория множеств является теорией первого порядка без равенства с двумя предикатными символами:

бинарным символом принадлежности $\in$ (пишем $A \in B$) и унарным символом универсальности $\bowtie$ (пишем $A \bowtie$). Объекты теории LTS называются *классами*. Переменные теории LTS обозначаются любыми латинскими буквами безотносительно к тому, какая из них строчная, а какая прописная.

Равенство классов $A = B$ вводится формулой

$$\forall X(X \in A \Leftrightarrow X \in B).$$

Перечислим аксиомы и аксиомные схемы LTS

A1 (*аксиома объемности*).

$$\forall y \forall x ((y = x) \Rightarrow \forall X (y \in X \Leftrightarrow x \in X)).$$

Если φ – формула теории LTS, то запись $\varphi[x]$ означает, что переменная x может быть, а может и не быть свободной переменной формулы φ .

Согласно [3] и [11] формулу φ назовем *X-предикативной*, если для любых переменных x все знакосочетания $\forall x$ и $\exists x$, входящие в формулу φ , располагаются только в позициях следующих видов: $\forall x(x \in X \Rightarrow \dots)$ и $\exists x(x \in X \wedge \dots)$. В ПΣ иерархии Клини это соответствует понятию Δ_0 -формулы.

AS2 (*аксиомная схема выделения*). Пусть $\varphi[x]$ – X-предикативная формула такая, что подстановка $\varphi[x||y]$ допустима и φ не содержит свободную переменную Y . Тогда

$$\forall X \exists Y \forall y (y \in Y \Leftrightarrow (y \in X \wedge \varphi[y])).$$

Эта аксиомная схема постулирует существование для каждого класса X и для каждой X-предикативной формулы $\varphi[x]$ единственного класса, который будем обозначать через $\{x \in X \mid \varphi[x]\}$.

A3 (*аксиома пустого класса*).

$$\exists X \forall Y (Y \notin X).$$

Этот класс единственен и обозначается через $\emptyset$. Легко проверяется выводимость формулы $\forall X(\emptyset \subset X)$.

Класс U назовем *универсальным*, если $U \bowtie$.

A4 (*аксиома равной универсальности*).

$$\forall U \forall V (U = V \Rightarrow (U \bowtie \Leftrightarrow V \bowtie)).$$

A5 (*аксиома инфра-универсальности*).

$$\exists X (X \bowtie \wedge \forall U (U \bowtie \Rightarrow X \subset U)).$$

Этот наименьший универсальный класс единственен. Обозначим его через $\mathbf{a}$.

A6 (*аксиома универсальности*).

$$\forall X \exists U (U \bowtie \wedge X \in U).$$

Эта аксиома постулирует, что каждый класс X является элементом некоторого универсального класса U .

Последующие аксиомы разъясняют значение понятия универсальности и превращают универсальный класс U в NBG -универсум.

Пусть U – некоторый класс. Класс A назовем U -классом, если $A \subset U$. Класс A назовем U -множеством, если $A \in U$.

Нам нужно ввести аксиомы, показывающие, что универсальный класс U замкнут относительно операций над U -множествами.

A7 (*аксиома транзитивности*).

$$\forall U(U \bowtie \Rightarrow \forall X \forall Y (X \in U \wedge Y \in X \Rightarrow Y \in U)).$$

Эта аксиома постулирует, что если U – универсальный класс, то U -множество является U -классом.

A8 (*аксиома квазитранзитивности*).

$$\forall U(U \bowtie \Rightarrow \forall X \forall Y (X \in U \wedge Y \subset X \Rightarrow Y \in U)).$$

Эта аксиома постулирует, что, если U – универсальный класс, то подкласс U -множества является U -множеством.

В рамках ($\equiv$ *локально*) каждого класса U определим все основные теоретико-множественные конструкции:

- $\{X, Y\}_U \equiv \{u \in U \mid u = X \vee u = Y\}$ для $X, Y \in U$ (U -предикативная формула), а также
- $\mathcal{P}_U(X) \equiv \{u \in U \mid u \subset X\}$,
- $X \cup_U Y \equiv \{u \in U \mid u \in X \vee u \in Y\}$,
- $X \cap_U Y \equiv \{u \in U \mid u \in X \wedge u \in Y\}$, для любых X и Y .

A9 (*аксиома локального множества подмножеств*).

$$\forall U(U \bowtie \Rightarrow \forall X (X \in U \Rightarrow \mathcal{P}_U(X) \in U)).$$

A10 (*аксиома локального бинарного объединения*).

$$\forall U(U \bowtie \Rightarrow \forall X \forall Y (X \in U \wedge Y \in U \Rightarrow X \cup_U Y \in U)).$$

Еще есть аксиомы общего объединения A11, локальной регулярности A12, бесконечности A13 и выбора A14.

A11 (*аксиома общего объединения*).

$$\forall X \exists Y \forall y (y \in Y \Leftrightarrow \exists z (z \in X \wedge y \in z)).$$

A12 (*аксиома локальной регулярности*).

$$\forall U(U \bowtie \Rightarrow \forall X (X \subset U \wedge X \neq \emptyset \Rightarrow \exists x (x \in X \wedge x \cap_U X = \emptyset))).$$

A13 (*аксиома бесконечности*).

$$\exists X (X \in \mathfrak{a} \wedge \emptyset \in X \wedge \forall x (x \in X \Rightarrow x \cup_{\mathfrak{a}} \{x\}_{\mathfrak{a}} \in X)).$$

A14 (аксиома выбора).

$$\forall U(U \bowtie \Rightarrow \forall X(X \in U \wedge X \neq \emptyset \Rightarrow \exists z(z \Leftarrow \mathcal{P}_U(X) \setminus \{\emptyset\}_U \rightarrow U \wedge \forall Y(Y \in \mathcal{P}_U(X) \setminus \{\emptyset\}_U \Rightarrow z(Y) \in Y))).$$

ЛЕММА 1. Пусть U – универсальный класс и $X, Y \in U$. Тогда

$$\{X\}_U, \{X, Y\}_U, \langle X, Y \rangle_U \in U.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выводится из аксиом A9 и A10.

ЛЕММА 2. Пусть $U \bowtie$, $X, Y, X', Y' \subset U$ и $\langle X, Y \rangle_U = \langle X', Y' \rangle_U$. Тогда $X = X'$ и $Y = Y'$.

ТЕОРЕМА 1. Метасовокупность всех универсальных классов в LTS является вполне упорядоченной относительно вложения $U \subset V$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО приведено в [11; п. 5.5, теорема 4].

Пусть X, Y – произвольные классы. Определим ассамблею

$$\{X, Y\} \equiv \{A \mid A = X \vee A = Y\}.$$

По аксиоме универсальности A6 $X \in U \bowtie$ и $Y \in V \bowtie$. По теореме 1 $V \subset U$. Тогда $Y \in U \bowtie$. По аксиоме транзитивности A7 $X, Y \in U$. Следовательно,

$$\{X, Y\} = \{A \in U \mid A = X \vee A = Y\} = \{X, Y\}_U.$$

Значит, ассамблея $\{X, Y\}$ является классом. Таким образом в LTS для любых классов X и Y существует класс $\{X, Y\}$, называемый *неупорядоченной парой классов X и Y* .

2. Замена аксиомной схемы выделения конечным числом аксиом. Свяжем с аксиомной схемой AS2 следующие явные аксиомы A2.1–A2.13.

Обозначим теорию, задаваемую аксиомами A1, A2.1–A2.13, A3, A6, A7, A12, через LTS^* .

A2.1 (аксиома пары).

$$\forall A, B \exists Y \forall y (y \in Y \Leftrightarrow (y = A \vee y = B)).$$

Из этой аксиомы следует, что в LTS^* для любых классов A и B существует *неупорядоченная пара* $\{A, B\}$.

Определим в LTS^* *упорядоченную пару* $\langle A, B \rangle \equiv \{\{A\}, \{A, B\}\}$, где $\{A\} \equiv \{A, A\}$.

Положим $\langle A \rangle \equiv A$. Для $n \geq 1$ по индукции определим *упорядоченные наборы* $\langle A_0, \dots, A_{n+1} \rangle \equiv \langle \langle A_0, \dots, A_n \rangle, A_{n+1} \rangle$.

ЛЕММА 3. Если $\langle A, B \rangle = \langle A', B' \rangle$, то $A = A'$ и $B = B'$.

ЛЕММА 4. Имеем $U \bowtie \wedge \langle A, B \rangle \in U \Rightarrow A, B \in U$.

A2.2 (аксиома локальности пары).

$$\forall U(U \bowtie \Rightarrow \forall A, B \in U(\{A, B\} \in U)).$$

Из аксиомы локальности пары [A2.2](#) следует, что $A, B \in U$ влечет $\langle A, B \rangle \in U$. По индукции выводится, что $A_1, \dots, A_n \in U$ влечет $\langle A_1, \dots, A_n \rangle \in U$.

A2.3 (аксиома выделения локальных универсальных элементов).

$$\forall U(U \bowtie \Rightarrow \exists Y \forall y(y \in Y \Leftrightarrow y \in U \wedge y \bowtie)).$$

A2.4 (аксиома выделения локального ограничения).

$$\forall A \forall U(U \bowtie \Rightarrow \exists Y \forall y(y \in Y \Leftrightarrow y \in U \wedge y \in A)).$$

A2.5 (аксиома выделения локального обрамления).

$$\forall A \forall U(U \bowtie \Rightarrow \exists Y \forall y(y \in Y \Leftrightarrow y \in U \wedge A \in y)).$$

A2.6 (аксиома выделения локального произведения).

$$\forall U(U \bowtie \Rightarrow \forall A \exists Y \forall y(y \in Y \Leftrightarrow y \in U \wedge \exists a, v(a, v \in U \wedge a \in A \wedge y = \langle a, v \rangle))).$$

Проверим, что в аксиоме [A2.6](#) подформула $y = \langle a, v \rangle$ является U -предикативной. Эта подформула имеет вид $\eta \equiv \forall z(z \in y \Leftrightarrow z \in \langle a, v \rangle)$. Рассмотрим формулу $\zeta \equiv \forall z \in U(z \in y \Leftrightarrow z \in \langle a, v \rangle)$. Ясно, что $\eta \Rightarrow \zeta$. Пусть ζ . Возьмем произвольное z . Если $z \in y$, то $y \in U$ влечет $z \in U$. Поэтому из ζ и $z \in y$ следует $z \in \langle a, v \rangle$. По теореме дедукции в LTS^* из ζ выводится формула $z \in y \Rightarrow z \in \langle a, v \rangle$. Обратно, если $z \in \langle a, v \rangle$, то согласно аксиоме [A2.5](#) $\langle a, v \rangle \in U$ влечет $z \in U$. Поэтому из ζ следует $z \in y$.

По теореме дедукции из ζ выводится формула $z \in \langle a, v \rangle \Rightarrow z \in y$. Значит, по правилу обобщения из ζ выводятся формулы $y \subset \langle a, v \rangle \equiv \forall z(z \in y \Rightarrow z \in \langle a, v \rangle)$ и $\langle a, v \rangle \subset y \equiv \forall z(z \in \langle a, v \rangle \Rightarrow z \in y)$. Поэтому $\zeta \vdash y = \langle a, v \rangle$ (см. [12; III, 2, п. 4]). По теореме дедукции $\zeta \Rightarrow \eta$. Таким образом, $\eta \Leftrightarrow \zeta$ в аксиоме [A2.5](#).

A2.7 (первая аксиома выделения локальной перестановки).

$$\forall U(U \bowtie \Rightarrow \forall A \exists Y \forall y(y \in Y \Leftrightarrow y \in U \wedge \exists u, v(u, v \in U \wedge y = \langle u, v \rangle \wedge \langle v, u \rangle \in A))).$$

A2.8 (вторая аксиома выделения локальной перестановки).

$$\forall U(U \bowtie \Rightarrow \forall A \exists Y \forall y(y \in Y \Leftrightarrow y \in U \wedge \exists u, v, w(u, v, w \in U \wedge y = \langle u, v, w \rangle \wedge \langle v, w, u \rangle \in A))).$$

A2.9 (третья аксиома выделения локальной перестановки).

$$\forall U(U \bowtie \Rightarrow \forall A \exists Y \forall y(y \in Y \Leftrightarrow y \in U \wedge \exists u, v, w(u, v, w \in U \wedge y = \langle u, v, w \rangle \wedge \langle u, w, v \rangle \in A))).$$

A2.10 (аксиома выделения локальной принадлежности).

$$\forall U(U \bowtie \Rightarrow \forall A \exists Y \forall y(y \in Y \Leftrightarrow y \in U \wedge \exists u, v(u, v \in U \wedge y = \langle u, v \rangle \wedge u \in v))).$$

Подформулу $y = \langle u, v \rangle_U$ в аксиомах A2.5, A2.7 и A2.10 можно сделать U -предикативной, поскольку она равносильна формуле $\zeta \equiv \forall z \in U (z \in y \Leftrightarrow z = u \vee z = v)$. Действительно, эта подформула имеет вид $\eta \equiv \forall z (z \in y \Leftrightarrow z = u \vee z = v)$. Ясно, что $\eta \Rightarrow \zeta$. Пусть ζ . Если $z \in y$, то $y \in U$ в силу транзитивности U по аксиоме A7 влечет $z \in U$. Поэтому из ζ следует $z = u \vee z = v$. Обратно, если $z = u \vee z = v$, то $z \in U$. Поэтому из ζ следует $z \in y$. По теореме дедукции в LTS^* выводится $\zeta \Rightarrow \eta$.

Таким же образом в аксиомах A2.8 и A2.9 подформулу $y = \langle u, v, w \rangle_U$ можно сделать U -предикативной.

В аксиомах A2.7–A2.10 подформулы $y = \langle u, v \rangle$ и $y = \langle u, v, w \rangle$ являются U -предикативными.

A2.11 (аксиома выделения локального дополнения).

$$\forall U (U \bowtie \Rightarrow \forall A \exists Y \forall y (y \in Y \Leftrightarrow y \in U \wedge y \notin A)).$$

A2.12 (аксиома выделения локального бинарного объединения).

$$\forall A \forall B \forall U (U \bowtie \Rightarrow \exists Y \forall y (y \in Y \Leftrightarrow y \in U \wedge (y \in A \vee y \in B))).$$

Из этой аксиомы следует, что в LTS^* для любых A , B и $U \bowtie$ существует U -класс $A \cup_U B$.

A2.13 (аксиома выделения локальной области определения).

$$\forall A \forall U (U \bowtie \Rightarrow \exists Y \forall y (y \in Y \Leftrightarrow y \in U \wedge \exists z (z \in U \wedge \langle y, z \rangle \in A))).$$

К сожалению, в отличие от доказательства теоремы о конечной аксиоматизируемости для теории множеств NBG , приведенного в [3], условие X -предикативности формулы φ в аксиомной схеме AS2 не позволяет сводить в доказательстве приводимой далее теоремы 1 элементарные подформулы вида $p_k \in p_l$ и $p_k \bowtie$ для $k, l \in \{1, \dots, n\}$ формулы $\varphi | x_1, \dots, x_m; p_1, \dots, p_n |$ к эквивалентным формулам

$$\exists x_j (\forall x_i (x_i \in x_j \Leftrightarrow x_i \in p_k) \wedge x_j \in p_l), \quad \exists x_j (\forall x_i (x_i \in x_j \Leftrightarrow x_i \in p_k) \wedge x_j \bowtie),$$

поскольку эти эквивалентные формулы не являются X -предикативными. Поэтому мы вынуждены ввести еще две аксиомы, выглядящие достаточно непривычно для читателя, знакомого с теорией множеств NBG .

A2.14 (аксиома выделения внешних универсальных элементов).

$$\forall A \forall U (U \bowtie \Rightarrow \exists Y \forall y (y \in Y \Leftrightarrow y \in U \wedge A \bowtie)).$$

A2.15 (аксиома выделения внешней принадлежности).

$$\forall A \forall B \forall U (U \bowtie \Rightarrow \exists Y \forall y (y \in Y \Leftrightarrow y \in U \wedge A \in B)).$$

ЛЕММА 5. В LTS^* выводится формула

$$\forall A \forall B \forall U (U \bowtie \Rightarrow \exists Y \forall y (y \in Y \Leftrightarrow y \in U \wedge y \in A \wedge y \in B)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По A2.10 существуют Y' и Y'' такие, что

$$\forall y(y \in Y' \Leftrightarrow y \in U \wedge y \notin A), \quad \forall y(y \in Y'' \Leftrightarrow y \in U \wedge y \notin B).$$

По A2.1 существует Y''' такое, что $\forall y(y \in Y''' \Leftrightarrow y \in U \wedge (y \in Y' \vee y \in Y''))$. Снова по A2.10 существует Y такой, что $\forall y(y \in Y \Leftrightarrow y \in U \wedge y \notin Y''')$.

Пусть $y \in Y$. Тогда $y \in U \wedge y \notin Y'''$. Следовательно, $y \notin Y' \wedge y \notin Y''$. Поэтому $y \in A \wedge y \in B$. По теореме дедукции в LTS^* выводится формула $y \in Y \Rightarrow y \in U \wedge y \in A \wedge y \in B$.

Обратно, пусть $y \in U \wedge y \in A \wedge y \in B$. Тогда $y \notin Y'$ и $y \notin Y''$. Следовательно, $y \notin Y'''$. Поэтому $y \in Y$. По теореме дедукции выводится формула $y \in U \wedge y \in A \wedge y \in B \Rightarrow y \in Y$. Далее логическими средствами выводится искомая формула.

Эта лемма означает, что в LTS^* для любых A, B и $U \bowtie$ существует класс $A \cap_U B$.

Докажем, что в теории LTS^* для $U \bowtie$ существует U -класс, задаваемый элементарной формулой $y \in y$.

ЛЕММА 6. В LTS^* выводится формула $\forall X(X \notin X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По аксиоме универсальности A6 $X \in U$ для некоторого универсального класса U . По аксиоме A2.4 существует класс $\{X\} \equiv \{X, X\} \subset U$ такой, что $X \in \{X\}_U$. По A3 $\{X\} \neq \emptyset$. Поэтому по аксиоме регулярности A12 существует $x \in \{X\}$ такой, что $x \cap_U \{X\} = \emptyset$. По A2.4 $x \in U \wedge x = X$. Предположим, что $X \in X$. Так как $X \in U$, по лемме 1 $X \in X \cap_U \{X\} = \emptyset$. Но это противоречит аксиоме A3. Значит, $X \notin X$.

СЛЕДСТВИЕ 1. В LTS^* выводится формула

$$\forall U \forall y(y \in \emptyset \Leftrightarrow y \in U \wedge y \in y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y \in \emptyset$. По аксиоме пустого класса A3 $y \in \emptyset \wedge y \notin \emptyset$. По закону противоречия $\neg(y \in \emptyset \wedge y \notin \emptyset)$. По закону удаления лжи $y \in U \wedge y \in y$. По теореме дедукции в LTS^* выводится формула $y \in \emptyset \Rightarrow y \in U \wedge y \in y$. Обратно, пусть $y \in U \wedge y \in y$. По лемме 6 $y \in y \wedge y \notin y$. Отсюда как и выше, следует формула $y \in U \wedge y \in y \Rightarrow y \in \emptyset$. По правилу обобщения выводится необходимая формула.

СЛЕДСТВИЕ 2. В LTS^* выводится формула

$$\forall U(U \bowtie \Rightarrow \exists Y \forall y(y \in Y \Leftrightarrow y \in U \wedge y \in y)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что в качестве искомого Y можно взять $\emptyset$. Пусть $y \in \emptyset$. В силу аксиомы пустого класса имеем $y \notin \emptyset$; противоречие. Из противоречия выводится все, что угодно; в нашем случае $y \in U \wedge y \in y$.

Обратно, пусть $y \in U \wedge y \in y$. По следствию 1 получаем $y \in \emptyset$.

СЛЕДСТВИЕ 3. В LTS^* выводится формула

$$\forall z \forall U \forall y(y \in \emptyset \Leftrightarrow y \in U \wedge z \in z)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказывается аналогично доказательству следствия 1.

СЛЕДСТВИЕ 4. В LTS^* выводится формула

$$\forall z \forall U (U \bowtie \Rightarrow \exists Y \forall y (y \in Y \Leftrightarrow y \in U \wedge z \in z)).$$

Это следствие используется при доказательстве следующего предложения. Оно доказывается методом, использованным в монографии Э. Мендельсона при доказательстве предложения 4.4, с рядом существенных изменений, связанных с U -предикативностью формулы φ .

ЛЕММА 7. В LTS^* выводится формула

$$\forall U (U \bowtie \Rightarrow \forall A \forall B \exists Y \forall y (y \in Y \Leftrightarrow y \in U \wedge \exists a, b (a, b \in U \wedge a \in A \wedge b \in B \wedge y = \langle a, b \rangle))).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По аксиоме A2.6 существуют классы Y' и Z такие, что

$$\begin{aligned} \xi &\equiv \forall y (y \in Y' \Leftrightarrow y \in U \wedge \exists a, w (a, w \in U \wedge a \in A \wedge y = \langle a, w \rangle)), \\ \zeta &\equiv \forall y (y \in Z \Leftrightarrow y \in U \wedge \exists b, w (b, w \in U \wedge a \in A \wedge y = \langle b, w \rangle)). \end{aligned}$$

По аксиоме A2.7 существует класс Y'' такой, что

$$\eta \equiv \forall y (y \in Y'' \Leftrightarrow y \in U \wedge \exists u, v (u, v \in U \wedge y = \langle u, v \rangle \wedge \langle v, u \rangle \in Z)).$$

Пусть $y \in Y''$. Тогда из формулы η следует

$$y \in U \wedge \exists u, v (u, v \in U \wedge y = \langle u, v \rangle \wedge \langle v, u \rangle \in Z).$$

Согласно формуле ζ

$$\exists b, w (b, w \in U \wedge b \in D \wedge \langle v, u \rangle = \langle b, w \rangle).$$

По лемме 3 $v = b$ и $u = w$. Значит, $y = \langle u, v \rangle = \langle u, b \rangle$. Поэтому получается формула

$$\theta \equiv y \in U \wedge \exists u, b (u, b \in U \wedge b \in B \wedge y = \langle u, b \rangle).$$

По теореме дедукции в LTS^* выводится формула $y \in Y'' \Rightarrow \theta$.

Обратно, пусть $\theta \in \bar{U}$. Тогда $y \in U \wedge y = \langle u, b \rangle_U$ для некоторых $u, b \in U$ таких, что $b \in B$. Рассмотрим $z = \langle b, u \rangle$. Так как $u, b \in U$, из A2.5 следует, что $z \in U$. Согласно формуле ζ $z \in Z$. Итак

$$y \in U \wedge \exists u, b (u, b \in U \wedge y = \langle u, b \rangle \wedge \langle b, u \rangle \in Z).$$

Применяя формулу η , заключаем, что $y \in Y''$. По теореме дедукции в LTS^* выводится формула $\theta \Rightarrow y \in Y''$. Значит, выводится формула $\xi \equiv \forall y (y \in Y'' \Leftrightarrow \theta)$.

Согласно лемме 1 существует класс $Y \equiv Y' \cap_U Y''$, т.е. такой, что

$$\forall y (y \in Y \Leftrightarrow y \in U \wedge y \in Y' \wedge y \in Y'').$$

По ξ $\exists a, w (a, w \in U \wedge a \in A \wedge y = \langle a, w \rangle)$. По χ $\exists u, b (u, b \in U \wedge b \in B \wedge y = \langle u, b \rangle)$. По лемме 3, $u = a$ и $w = b$. Значит,

$$\exists a, b (a, b \in U \wedge a \in A \wedge b \in B \wedge y = \langle a, b \rangle_U).$$

Отсюда следует утверждение леммы.

СЛЕДСТВИЕ 5. В LTS^* выводится формула

$$\forall U(U \bowtie \Rightarrow \forall A \forall B \exists Y \forall u, v (\langle u, v \rangle \in Y \Leftrightarrow \langle u, v \rangle \in U \wedge u \in A \wedge v \in B)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим класс Y из леммы 5. Пусть u и v – произвольные классы. Пусть $y \equiv \langle u, v \rangle \in Y$. Тогда по лемме 5 $y \in U \wedge \exists a, b \in U (a \in A \wedge b \in B \wedge y = \langle a, b \rangle)$. Следовательно, $u = a \in A$ и $v = b \in B$. Поэтому $u, v \in U$. По теореме дедукции в LTS^* выводится формула

$$\langle u, v \rangle \in Y \Rightarrow u, v \in U \wedge \langle u, v \rangle \in U \wedge u \in A \wedge v \in B.$$

Обратно, пусть $y \equiv \langle u, v \rangle \in Y \wedge u \in A \wedge v \in B \Rightarrow \langle u, v \rangle \in Y$. По лемме 5 $y \in Y$. По теореме дедукции выводится формула

$$u, v \in U \wedge \langle u, v \rangle \in U \wedge u \in A \wedge v \in B \Rightarrow \langle u, v \rangle \in Y.$$

Далее логическими средствами выводится необходимая формула.

СЛЕДСТВИЕ 6. В LTS^* для любого $n \geq 2$ выводится формула

$$\begin{aligned} \forall A_1 \dots \forall A_n \forall U (U \bowtie \Rightarrow \exists Y \forall u_1 \dots \forall u_n (\langle u_1, \dots, u_n \rangle \in Y \\ \Leftrightarrow \langle u_1, \dots, u_n \rangle \in U \wedge u_1 \in A_1 \wedge \dots \wedge u_n \in A_n)). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проводится по индукции. Пусть утверждение верно для n . Фиксируем $A_1, \dots, A_{n+1}$ и $U \bowtie$. По предположению для n существует класс Z такой, что

$$\zeta \equiv \forall z_1 \dots \forall z_n (\langle z_1, \dots, z_n \rangle \in Z \Leftrightarrow \langle z_1, \dots, z_n \rangle \in U \wedge z_1 \in A_1 \wedge \dots \wedge z_n \in A_n).$$

Для классов Z и A_{n+1} рассмотрим класс Y из следствия 5.

Пусть $\langle u_1, \dots, u_{n+1} \rangle \equiv \langle z, v \rangle \in Y$, где $z \equiv \langle u_1, \dots, u_n \rangle$ и $v \equiv u$. По следствию 5

$$z, v \in U \wedge \langle z, v \rangle \in U \wedge z \in Z \wedge v \in A_{n+1}.$$

По формуле ζ

$$u_1, \dots, u_n \in U \wedge z \in U \wedge u_1 \in A_1 \wedge \dots \wedge u_n \in A_n.$$

Значит, по теореме дедукции в LTS^* выводится формула

$$\begin{aligned} \langle u_1, \dots, u_{n+1} \rangle \in Y \Rightarrow u_1, \dots, u_{n+1} \in U \wedge \langle u_1, \dots, u_{n+1} \rangle \\ \in U \wedge u_1 \in A_1 \wedge \dots \wedge u_{n+1} \in A_{n+1}. \end{aligned}$$

Обозначим левую и правую части этой формулы, связанные знаком $\Rightarrow$, через η и θ соответственно. Итак, мы вывели формулу $\eta \Rightarrow \theta$.

Обратно, пусть $\theta \in U$. Из аксиомы A2.12 следует, что $z \equiv \langle u_1, \dots, u_{n+1} \rangle_U \in U$. Поэтому, используя формулу ζ , получаем $z \in Z$. Так как

$$z, u_{n+1} \in U \wedge \langle z, u_{n+1} \rangle_U \in U \wedge z \in Z \wedge u_{n+1} \in A_{n+1},$$

по следствию 5 $\langle z, u_{n+1} \rangle_U \in Y$, т.е. выведена формула η . По теореме дедукции выводится формула $\theta \Rightarrow \eta$. Далее чисто логическими средствами выводится необходимая формула для $n + 1$.

Доказательства следующих трех лемм проводятся аналогично доказательству следствия 5 к лемме 7.

ЛЕММА 8. В LTS^* аксиома A2.8 равносильна формуле

$$\forall A \forall U (U \bowtie \Rightarrow \exists Y \forall u, v, w (\langle u, v, w \rangle \in Y \Leftrightarrow \langle u, v, w \rangle \in U \wedge \langle v, w, u \rangle \in A)).$$

ЛЕММА 9. В LTS^* аксиома A2.9 равносильна формуле

$$\forall A \forall U (U \bowtie \Rightarrow \exists Y \forall u, v, w (\langle u, v, w \rangle \in Y \Leftrightarrow \langle u, v, w \rangle \in U \wedge \langle v, w, v \rangle \in A)).$$

ЛЕММА 10. В LTS^* аксиома A2.10 равносильна формуле

$$\forall U (U \bowtie \Rightarrow \exists Y \forall u, v (\langle u, v \rangle \in Y \Leftrightarrow \langle u, v \rangle \in U \wedge u \in V)).$$

Условимся, что в знаковом сочетании $x_1, \dots, x_m; p_1, \dots, p_n$ для $m \geq 1$ и $n \geq 0$ случай $n = 0$ соответствует знаковому сочетанию $x_1, \dots, x_m$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\varphi[\vec{x}, \vec{p}]$ – U -предикативная формула такая, что ее свободные переменные берутся лишь из совокупности $\vec{x}, \vec{p} \Leftarrow x_1, \dots, x_m; p_1, \dots, p_n$, подстановка $\varphi[\vec{x}||\vec{y}, \vec{p}]$ допустима и φ не содержит свободную переменную Y . Тогда в LTS^* выводима формула

$$\forall U (U \bowtie \Rightarrow \exists Y \forall \vec{y} (\langle \vec{y} \rangle \in Y \Leftrightarrow \langle \vec{y} \rangle \in U \wedge \varphi[\vec{y}, \vec{p}])).$$

Будем использовать индукцию по числу s логических связок и кванторов, входящих в формулу φ .

Обозначим через $A(s)$ для $s \in \omega$ следующее утверждение: для любых $m \geq 1$ и $n \geq 0$, для любой формулы теории LTS^* вида $\varphi[x_1, \dots, x_m; p_1, \dots, p_n]$, составленной из переменных, предикатных символов $\in, \bowtie$ и логических символов $\exists, \neg$ и $\vee$ и имеющей ровно s логических символов $\exists, \neg$ и $\vee$, для любых переменных $y_1, \dots, y_m$ таких, что подстановка $\varphi[\vec{x}||\vec{y}, \vec{p}]$ допустима и для любой переменной Y , не являющейся свободной переменной формулы φ , в теории LTS^* выводится формула

$$\forall U (U \bowtie \Rightarrow \exists Y \forall \vec{y} (\langle \vec{y} \rangle \in Y \Leftrightarrow \langle \vec{y} \rangle \in U \wedge \varphi[\vec{y}, \vec{p}])).$$

Будем доказывать по принципу возвратной индукции:

$$A(0) \wedge \forall s (\forall r < s (A(r)) \Rightarrow A(s)) \Rightarrow \forall s (A(s)).$$

Пусть $s = 0$. Тогда формула φ имеет один из видов: $y_i \bowtie$, или $p_k \bowtie$, или $y_i \in p_k$, или $p_k \in y_i$, или $p_k \in p_l$, или $y_i \in y_j$ для $i, j \in \{1, \dots, m\}$ и $k, l \in \{1, \dots, n\}$.

В случае $y_i \bowtie$ по аксиоме A2.1 существует класс Y такой, что

$$\forall y_i (y_i \in Y \Leftrightarrow y_i \in U \wedge y_i \bowtie).$$

В случае $y_i \in p_k$ по аксиоме A2.2 существует класс Y такой, что

$$\forall y_i (y_i \in Y \Leftrightarrow y_i \in U \wedge y_i \in p_k).$$

В случае $p_k \in y_i$ по аксиоме A2.3 существует класс Y такой, что

$$\forall y_i (y_i \in Y \Leftrightarrow y_i \in U \wedge p_k \in y_i).$$

В случае $y_i \in y_i$ по следствию 2 к лемме 6 существует класс Y такой, что

$$\forall y_i (y_i \in Y \Leftrightarrow y_i \in U \wedge y_i \in y_i).$$

В случае $p_k \bowtie$ по аксиоме A2.14 существует класс Y такой, что

$$\forall y_i (y_i \in Y \Leftrightarrow y_i \in U \wedge p_k \bowtie).$$

В случае $p_k \in p_l$ при $k \neq l$ по аксиоме A2.15 существует класс Y такой, что

$$\forall y_i (y_i \in Y \Leftrightarrow y_i \in U \wedge p_k \in p_l).$$

Наконец, в случае $p_k \in p_k$ по следствию 4 к лемме 2 существует класс Y такой, что

$$\forall y_i (y_i \in Y \Leftrightarrow y_i \in U \wedge p_k \in p_k).$$

По следствию 6 к лемме 7 для $A_1 = U, \dots, A_{i-1} = U, A_i = Y, A_{i+1} = U, \dots, A_m = U$ существует Z такое, что $\forall \vec{y} (\langle \vec{y} \rangle \in Z \Leftrightarrow \langle \vec{y} \rangle \in U \wedge y_i \in Y)$. Это означает, что в рассмотренных случаях предложение доказано.

Осталось рассмотреть случай $y_i \in y_j$ при $i \neq j$. Можно считать, что $i < j$. По аксиоме A2.10 существует класс Y такой, что

$$\zeta \equiv \forall u (u \in Y \Leftrightarrow u \in U \wedge \exists y_i, y_j (y_i, y_j \in U \wedge u = \langle y_i, y_j \rangle_U \wedge y_i \in y_j)).$$

Если $i = 1$, то положим $Y_i = Y$.

Пусть $i > 1$. По следствию 1 к лемме 3 для $A = V$ и $B = U$ существует класс X_1 такой, что

$$\eta \equiv \forall u, y_1 (\langle u, y_1 \rangle_U \in X_1 \Leftrightarrow u, y_1 \in U \wedge \langle u, y_1 \rangle_U \in U \wedge u \in Y).$$

Пусть $\langle y_i, y_j, y_1 \rangle_U \in X_1$. Тогда из η и ζ следует

$$\langle y_i, y_j \rangle_U, y_1 \in U \wedge \langle y_i, y_j, y_1 \rangle_U \in U \wedge y_i, y_j \in U \wedge y_i \in y_j.$$

Следовательно, формула

$$\theta \equiv y_j, y_j, y_1 \in U \wedge \langle y_i, y_j, y_1 \rangle_U \in U \wedge y_i \in y_j.$$

Обратно, пусть θ . По аксиоме A2.5 $u \equiv \langle y_i, y_j \rangle_U \in U$. Поэтому из ζ следует $u \in Y$. В свою очередь, из η следует $\langle y_i, y_j, y_1 \rangle_U \in X_1$. По теореме дедукции в LTS* выводится формула $\langle y_i, y_j, y_1 \rangle_U \in X_1 \Leftrightarrow \theta$. По правилу обобщения выводится формула

$$\xi \equiv \forall y_i, y_j, y_1 (\langle y_i, y_j, y_1 \rangle_U \in X_1 \Leftrightarrow \theta).$$

По лемме 4 для $A \equiv X_1$ существует класс X_2 такой, что

$$\chi \equiv \forall y_1, y_i, y_j (\langle y_i, y_i, y_j \rangle_U \in X_2 \Leftrightarrow y_1, y_i, y_j \in U \wedge \langle y_i, y_i, y_j \rangle_U \in U \wedge \langle y_i, y_i, y_j \rangle_U \in X_1).$$

Из формул ξ и η и аксиомы A2.5 выводится формула

$$\forall y_1, y_i, y_j (\langle y_1, y_i, y_j \rangle_U \in X_2 \Leftrightarrow y_1, y_i, y_j \in U \wedge \langle y_1, y_j, y_j \rangle_U \in U \wedge y_i \in y_j).$$

Если $i = 2$, то полагаем $X_i \equiv X_2$. Если $i < 2$, то аналогичным образом по индукции доказываем, что в LTS^* существует класс X_i такой, что

$$\begin{aligned} \gamma &\equiv \forall y_1, \dots, y_i, y_j (\langle y_1, \dots, y_i, y_j \rangle_U \in X_i \\ &\Leftrightarrow y_1, \dots, y_i, y_j \in U \wedge \langle y_1, \dots, y_i, y_j \rangle_U \in U \wedge y_i \in y_j). \end{aligned}$$

Если $j = i + 1$, то положим $Z_{ij} \equiv X_i$. Пусть $i + 1 < j$. По следствию 1 к лемме 3 для $A = X_i$ и $B = U$ существует класс X_{i1} такой, что

$$\delta \equiv \forall w, y_{i+1} (\langle w, y_{i+1} \rangle_U \in X_{i1} \Leftrightarrow w, y_{i+1} \in U \wedge \langle w, y_{i+1} \rangle_U \in U \wedge w \in X_i).$$

Обозначим $\langle y_1, \dots, y_i \rangle_U$ через u . Пусть $\langle u, y_i, y_{i+1} \rangle_U \in X_{i1}$. Тогда из η и ζ следует

$$\langle u, y_i, y_{i+1} \rangle_U, y_{i+1} \in U \wedge \langle u, y_i, y_{i+1} \rangle_U \in U \wedge \vec{y}_i, y_j \in U \wedge y_i \in y_j.$$

Следовательно,

$$\varkappa \equiv u, y_j, y_{i+1} \in U \wedge \langle u, y_i, y_{i+1} \rangle_U \in U \wedge y_i \in y_j.$$

Обратно, пусть $\varkappa$. По аксиоме A2.5 $w \equiv \langle u, y_j \rangle_U \in U$. Поэтому из γ следует $w \in X_i$. В свою очередь из δ следует $\langle u, y_i, y_{i+1} \rangle_U \in X_{i1}$. По теореме дедукции в LTS^* выводится формула $\langle u, y_i, y_{i+1} \rangle_U \in X_{i1} \Leftrightarrow \varkappa$. По правилу обобщения выводится формула

$$\varepsilon \equiv \forall u, y_j, y_{i+1} (\langle u, y_i, y_{i+1} \rangle_U \in X_{i1} \Leftrightarrow \theta).$$

По лемме 5 для $A \equiv X_{i1}$ существует класс X_{i2} такой, что

$$\begin{aligned} \pi &\equiv \forall u, y_{i+1}, y_j (\langle u, y_i, y_{i+1} \rangle_U \in X_{i2} \\ &\Leftrightarrow u, y_{i+1}, y_j \in U \wedge \langle u, y_i, y_{i+1} \rangle_U \in U \wedge \langle u, y_i, y_{i+1} \rangle_U \in X_{i1}). \end{aligned}$$

Из формул ε и π и из аксиомы A2.5 выводится формула

$$\forall u, y_{i+1}, y_j (\langle u, y_{i+1}, y_i \rangle_U \in X_{i2} \Leftrightarrow u, y_{i+1}, y_j \in U \wedge \langle u, y_{i+1}, y_j \rangle_U \in U \wedge y_i \in y_j).$$

Отсюда следует формула

$$\begin{aligned} \forall y_1, \dots, y_{i+1}, y_j (\langle y_1, \dots, y_{i+1}, y_j \rangle_U \in X_{i2} \\ \Leftrightarrow y_1, \dots, y_{i+1}, y_j \in U \wedge \langle y_1, \dots, y_{i+1}, y_j \rangle_U \wedge y_i \in y_j). \end{aligned}$$

Если $j = i + 2$, то полагаем $X_{ij} \equiv X_{i2}$. Если $j < i + 2$, то аналогичным образом по индукции доказываем, что в LTS^* существует класс Y_{ij} такой, что

$$\forall y_1, \dots, y_j (y_1, \dots, y_j \in Y_{ij} \Leftrightarrow y_1, \dots, y_j \in U \wedge \langle y_1, \dots, y_j \rangle \in U \wedge y_i \in y_j).$$

Далее по индукции, отправляясь от Y_{ij} и применяя лемму 3, доказываем, что существует класс Z такой, что

$$\forall y_1, \dots, y_m (\langle y_1, \dots, y_m \rangle_U \in Z \Leftrightarrow y_1, \dots, y_m \in U \wedge \langle y_1, \dots, y_m \rangle_U \in U \wedge y_i \in y_j).$$

Предположим, что предположение доказано для любого $r < s$ и что $\varphi(\vec{y}, \vec{p})$ содержит r логических связок и кванторов.

Пусть $\varphi(\vec{y})$ есть $\neg\psi(\vec{y})$. По индукционному предположению существует класс Z такой, что

$$\zeta \equiv \forall \vec{y}(\langle \vec{y} \rangle_U \in Z \Leftrightarrow \vec{y} \in U \wedge \psi(\vec{y})).$$

Для классов Z и U рассмотрим класс Y из аксиомы A2.11. Пусть $\langle \vec{y} \rangle_U \in Y$. Тогда из χ следует $\langle \vec{y} \rangle \in U \wedge \langle \vec{y} \rangle_U \notin Z$. Но из ζ выводится формула $\langle \vec{y} \rangle \notin Z \Rightarrow (\langle \vec{y} \rangle \notin U \vee \neg\psi(\vec{y}))$. Следовательно, выводится формула $\langle \vec{y} \rangle \in U \wedge (\langle \vec{y} \rangle_U \notin U \vee \neg\psi(\vec{y}))$. Она равносильна формуле

$$(\langle \vec{y} \rangle \in U \wedge \langle \vec{y} \rangle \notin U) \vee (\langle \vec{y} \rangle \in U \wedge \neg\psi(\vec{y})).$$

Удаление ложного члена дает $\langle \vec{y} \rangle \in U \wedge \neg\psi(\vec{y})$. По теореме дедукции в исчислении высказываний выводится формула $\langle \vec{y} \rangle_U \in Y \Rightarrow \langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge \varphi(\vec{y}, \vec{p})$.

Пусть $\langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge \varphi(\vec{y}, \vec{p})$. Тогда

$$(\langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge \neg\psi(\vec{y})) \vee (\langle \vec{y} \rangle \in U \wedge \langle \vec{y} \rangle_U \notin U).$$

Это равносильно формуле $\langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge (\neg\psi(\vec{y}) \vee \langle \vec{y} \rangle_U \notin U)$. С учетом ζ это влечет формулу $\langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge \langle \vec{y} \rangle_U \notin Z$. С учетом χ это влечет формулу $\langle \vec{y} \rangle_U \in Y$. По теореме дедукции в исчислении высказываний выводится формула $\langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge \varphi(\vec{y}, \vec{p}) \Rightarrow \langle \vec{y} \rangle_U \in Y$.

Применяя правило обобщения, выводим формулу

$$\forall \vec{y}(\langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge \varphi(\vec{y}, \vec{p}) \Leftrightarrow \langle \vec{y} \rangle_U \in Y).$$

Пусть $\varphi(\vec{y})$ есть $\psi(\vec{y}) \Rightarrow \theta(\vec{y})$, что равносильно формуле $\neg\psi(\vec{y}) \vee \theta(\vec{y})$. По индукционному предположению существуют классы Z_1 и Y_2 такие, что

$$\zeta \equiv \forall \vec{y}(\langle \vec{y} \rangle_U \in Z_1 \Leftrightarrow \langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge \psi(\vec{y})), \quad \eta \equiv \forall \vec{y}(\langle \vec{y} \rangle_U \in Y_2 \Leftrightarrow \langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge \theta(\vec{y})).$$

По A2.11 для Z_1 существует класс Y_1 такой, что

$$\xi \equiv \forall \vec{y}(\langle \vec{y} \rangle_U \in Y_1 \Leftrightarrow \langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge \langle \vec{y} \rangle_U \notin Z_1).$$

По A2.12 для Y_1 и Y_2 существует Y такой, что

$$\chi \equiv \forall \vec{y}(\langle \vec{y} \rangle_U \in Y \Leftrightarrow \langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge (\langle \vec{y} \rangle_U \in Y_1 \vee \langle \vec{y} \rangle_U \in Y_2)).$$

Пусть $\langle \vec{y} \rangle \in Y$. Тогда из χ , η и ξ следует

$$\langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge ((\langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge \langle \vec{y} \rangle_U \notin Z_1) \vee (\langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge \theta(\vec{y}))),$$

что равносильно формуле $\langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge (\langle \vec{y} \rangle_U \in U \vee \theta(\vec{y}))$. С учетом ζ получаем $\langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge (\langle \vec{y} \rangle_U \notin U \vee \neg\psi) \vee \theta$, что равносильно

$$(\langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge \langle \vec{y} \rangle_U \notin U) \vee (\langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge (\neg\psi \vee \theta)).$$

Удаляя ложный член, получаем $\langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge (\neg\psi \vee \theta)$. По теореме дедукции в исчислении высказываний выводится формула $\langle \vec{y} \rangle_U \in Y \Rightarrow \langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge (\neg\psi \vee \theta)$.

Обратно, пусть $\langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge (\neg\psi \vee \theta)$. Тогда получаем

$$(\langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge \langle \vec{y} \rangle_U \notin U) \vee (\langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge \neg\psi) \vee (\langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge \theta).$$

Отсюда

$$\langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge (\langle \vec{y} \rangle_U \notin U \vee \neg \psi \vee (\langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge \theta)),$$

что равносильно

$$\langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge (\neg(\langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge \psi) \vee (\langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge \theta)).$$

Применяя ζ и η , получаем $\langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge (\langle \vec{y} \rangle_U \notin Z_1 \vee \langle \vec{y} \rangle_U \in Y_2)$, что равносильно

$$\langle \vec{y} \rangle_U \in U((\langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge \langle \vec{y} \rangle_U \in Z_1) \vee \langle \vec{y} \rangle_U \in Y_2).$$

Применяя ξ , получаем $\langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge (\langle \vec{y} \rangle_U \in Y_1 \vee \langle \vec{y} \rangle_U \in Y_2)$. Применяя χ , получаем $\langle \vec{y} \rangle_U \in Y$. По теореме дедукции в исчислении высказываний выводится формула $\langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge (\psi \vee \neg \theta) \Rightarrow \langle \vec{y} \rangle_U \in Y$. Применяя правило обобщения, выводим формулу $\forall \vec{y}(\langle \vec{y} \rangle_U \in Y \Leftrightarrow \langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge \varphi(\vec{y}))$.

Наконец, пусть $\varphi[\vec{x}; \vec{p}]$ есть $\exists z(z \in U \wedge \psi[\vec{y}, z; \vec{p}])$. По индукционному предположению для формулы $\psi[\vec{y}, z; \vec{p}]$ существует класс Z такой, что

$$\zeta \equiv \forall \vec{y} \forall z(\langle \vec{y}, z \rangle_U \in Z \Leftrightarrow \langle \vec{y}, z \rangle_U \in U \wedge \psi[\vec{y}, z; \vec{p}]).$$

По A2.13 существует класс Y такой, что

$$\chi \equiv \forall \vec{y}(\langle \vec{y} \rangle_U \in U \Leftrightarrow \langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge \exists z(z \in U \wedge \langle \vec{y}, z \rangle_U \in Z)).$$

Пусть $\langle \vec{y} \rangle_U \in Y$. Тогда из χ следует $\langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge \exists z(z \in U \wedge \langle \vec{y}, z \rangle_U \in Z)$. Применяя ζ , получаем

$$\langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge \exists z(z \in U \wedge \langle \vec{y}, z \rangle_U \in U \wedge \psi(vy, z)).$$

Отсюда $\langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge \exists z(z \in U \wedge \psi(\vec{y}, z))$. По теореме дедукции в исчислении высказываний $\langle \vec{y} \rangle_U \in Y \Rightarrow \langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge \exists z(z \in U \wedge \psi(\vec{y}, z))$.

Обратно, пусть $\langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge \exists z(z \in U \wedge \psi(\vec{y}, z))$. По аксиоме A2.5 $\langle \vec{y}, z \rangle_U \equiv \langle \langle \vec{y} \rangle_U, z \rangle_U \in U$. Следовательно,

$$\langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge \exists z(z \in U \wedge \langle \vec{y}, z \rangle_U \in U \wedge \psi(\vec{y}, z)).$$

Применяя ζ , получаем $\langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge \exists z(z \in U \wedge \langle \vec{y}, z \rangle_U \in Z)$. Применяем χ , получаем $\langle \vec{y} \rangle_U \in Y$. По теореме дедукции в исчислении высказываний

$$\langle \vec{y} \rangle_U \in Y \wedge \exists z(z \in U \wedge \psi(\vec{y}, z; \vec{p})) \Rightarrow \langle \vec{y} \rangle_U \in Y.$$

Применяя правило обобщения, выводим формулу $\forall \vec{y}(\langle \vec{y} \rangle_U \in Y \Leftrightarrow \langle \vec{y} \rangle_U \in U \wedge \varphi(\vec{y}))$. Следовательно, предложение доказано для s .

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть $\varphi[x]$ – U -предикативная формула такая, что подстановка $\varphi[x||y]$ допустима и φ не содержит свободно переменную Y . Тогда в LTS^* выводится формула $\forall U \bowtie \exists Y \forall y(y \in Y \Leftrightarrow y \in U \wedge \varphi[y])$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\varphi[x]$ – X -предикативная формула такая, что подстановка $\varphi[x||y]$ допустима и φ не содержит свободно переменную Y . Тогда в LTS^* выводится формула $\forall X \exists Y \forall y(y \in Y \Leftrightarrow y \in X \wedge \varphi[y])$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По аксиомам универсальности A6 и транзитивности A7 существует универсальный класс U такой, что $X \subset U$. Проверим, что $\varphi[x]$ равносильна некоторой U -предикативной формуле $\varphi'[x]$.

Пусть φ содержит подформулу $\xi \equiv \forall x \varepsilon$ или $\eta \equiv \exists x \varepsilon$. По условию

$$\xi = \forall x(x \in X \Rightarrow \gamma), \quad \eta = \exists x(x \in X \wedge \delta).$$

Рассмотрим формулы

$$\xi' \equiv \forall x(x \in U \Rightarrow (x \in X \Rightarrow \gamma)), \quad \eta' \equiv \exists x(x \in U \wedge x \in X \wedge \delta).$$

Ясно, что в LTS^* выводится формула $\xi \Rightarrow \xi'$. Обратно, пусть ξ' и $x \in X$. Так как $X \subset U$, то $x \in U$. По ξ' выводится γ . Значит, по теореме дедукции в LTS^* выводится формула $x \in X \Rightarrow \gamma$. По правилу обобщения выводится формула ξ . По теореме дедукции в LTS^* выводится формула $\xi' \Rightarrow \xi$. Значит, в LTS^* выводится равносильность $\xi \Leftrightarrow \xi'$. Аналогичным образом в LTS^* выводится равносильность $\eta \Leftrightarrow \eta'$. Из этих равносильностей следует, что φ равносильна некоторой U -предикативной формуле φ' .

Рассмотрим U -предикативную формулу $x \in X \wedge \varphi'[x]$. По следствию к предложению 1 существует класс Y такой, что $\chi \equiv \forall y(y \in Y \Leftrightarrow y \in U \wedge y \in X \wedge \varphi'[y])$. Ясно, что из формулы χ выводится формула $y \in Y \Rightarrow y \in X \wedge \varphi[y]$. Пусть $y \in X \wedge \varphi[y]$. Так как $X \subset U$, то, используя χ , мы выводим $y \in Y$. По теореме дедукции в LTS^* выводится формула $y \in X \wedge \varphi[y] \Rightarrow y \in Y$. Значит, из формулы χ в LTS^* выводится формула $\psi \equiv \forall y(y \in Y \Leftrightarrow y \in X \wedge \varphi[y])$. Согласно логическим аксиомам выводится формула $\forall X \exists Y \psi$.

Обозначим теорию, задаваемую аксиомами A1, A2.1–A2.15, A3–A14, через LTS^f .

ТЕОРЕМА 3. *Теории LTS и LTS^f дедуктивно равносильны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 2 следует, что LTS^f сильнее LTS . С другой стороны ясно, что аксиомы A2.3–A2.13 являются частными случаями аксиомной схемы AS2. Аксиомы A2.1 и A2.2 выводятся в LTS (см. [10]). Значит, LTS сильнее LTS^f .

Авторы считают своим приятным долгом выразить глубокую благодарность академику С. И. Адяну и всем участникам его семинара за ценные и полезные обсуждения данной темы. Кроме того, авторы выражают особую благодарность В. Х. Хаханяну за ценные замечания и предложения, способствовавшие улучшению текста статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] К. Куратовский, А. Мостовский, *Теория множеств*, Мир, М., 1970.
- [2] Дж. Келли, *Общая топология*, Наука, М., 1968.
- [3] Э. Мендельсон, *Введение в математическую логику*, Наука, М., 1971.
- [4] S. Eilenberg, S. MacLane, "General theory of natural equivalences", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **58** (1945), 231–294.
- [5] S. MacLane, "Locally small categories and the foundations of set theory", *Infinitistic Methods* (Warsaw, 1959), Pergamon, Oxford, 1961, 25–43.

- [6] C. Ehresmann, “Gattungen von lokalen Strukturen”, *Jahresber. Deutsch. Math. Verein.*, **60** (1957), 49–77.
- [7] P. Dedecker, “Introduction aux structures locales”, *Colloque Géom. Diff. Globale* (Bruxelles, 1958), Centre Belge Rech. Math., Louvain, 1959, 103–135.
- [8] J. Sonner, “The formal definition of categories”, *Math. Z.*, **80** (1962), 163–176.
- [9] P. Gabriel, “Des catégories abéliennes”, *Bull. Soc. Math. France*, **90** (1962), 323–448.
- [10] В. К. Захаров, “Локальная теория множеств”, *Матем. заметки*, **77**:2 (2005), 194–212.
- [11] V. K. Zakharov, E. I. Bunina, A. V. Mikhalev, P. V. Andreev, “Local theory of sets as a foundation for category theory and its connection with Zermelo–Fraenkel set theory”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **138**:4 (2006), 5763–5829.
- [12] А. Н. Колмогоров, А. Г. Драгалин, *Математическая логика*, КомКнига, М., 2006.

В. К. Захаров

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: zakharov_valerij@list.ru

Поступило

23.04.2009

Исправленный вариант

14.11.2010

А. Д. Яшин

Московский городской психолого-педагогический университет

E-mail: yashin_aleksandr@list.ru