Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. В. Вегнер, С. Б. Гашков, Реализация булевых функций формулами в непрерывных базисах, содержащих континуум констант, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 2, 181–191

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm7833>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 15:51:09

Реализация булевых функций формулами в непрерывных базисах, содержащих континуум констант

Я. В. Вегнер, С. Б. Гашков

Показано, как для произвольной булевой функции n переменных построить формулы сложности $O(2^{n/2})$ в базисах

$$\{x - y, xy, |x|\} \cup [0, 1], \quad \{x - y, x * y, 2x, |x|\} \cup [0, 1],$$

где $x * y = \max(-1, \min(1, x)) \max(-1, \min(1, y))$. Данные оценки, вообще говоря, по порядку не улучшаемы.

Библиография: 3 названия.

1. Введение. Задача о реализации булевых функций схемами и формулами в непрерывных базисах была поставлена Лупановым и впервые рассматривалась в [1]. Ее можно сформулировать следующим образом. Назовем *базисом* B произвольное множество непрерывных функций $w_k: \mathbb{R}^{m_k} \rightarrow \mathbb{R}$ и констант $C \subset \mathbb{R}$. *Схемой* в базисе B назовем последовательность функций

$$f_1(X), \dots, f_L(X), \quad X = (x_1, \dots, x_n),$$

где

$$f_i(X) = w_k(A_1, \dots, A_{m_k}), \quad k = k(i),$$

а каждая из величин $A_1, \dots, A_{m_k}$ – либо переменная, либо константа, либо одна из предыдущих функций f_j , $j < i$. Схему назовем *формулой*, если каждая функция f_i используется для вычисления следующих функций не больше одного раза. *Сложностью* схемы назовем число L составляющих ее функций. Булева функция f *реализуется* схемой (формулой) S , если при любых булевых значениях переменных значение функции f совпадает со значением последней функции f_L схемы (формулы) S . *Сложностью схемной (формульной) реализации* булевой функции f в данном базисе B называется минимальная сложность схемы (формулы) в базисе B , реализующей функцию f . Сложность схемной реализации функции f в базисе B обозначается $L_B(f)$, а соответствующая *функция Шеннона*, т.е. сложность самой

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00508-а), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-4470.2008.1) и программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН “Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения” (проект “Задачи оптимального синтеза управляющих систем”).

сложной n -местной булевой функции, обозначается $L_B(n)$. В случае реализации формулами соответствующая функция Шеннона обозначается $L_B^\Phi(n)$. Для конечных базисов мощностным методом Шеннона можно получить нижние оценки

$$L_B(n) \geq \Omega\left(\frac{2^n}{n}\right), \quad L_B^\Phi(n) \geq \Omega\left(\frac{2^n}{\log_2 n}\right)$$

(в [1] указаны чуть более точные оценки и приведены примеры базисов, для которых они достигаются). Для базисов, содержащих континуум констант, такие оценки, вообще говоря, не верны, и в [1] приведены примеры *почти конечных* базисов, т.е. базисов, состоящих из конечного числа функций и всех констант из данного отрезка, для которых функция Шеннона имеет линейный порядок роста. Если же почти конечный базис состоит из функций, удовлетворяющих условию Липшица, или из полиномиальных функций (в этом случае допускается, чтобы он содержал все действительные константы), то в этом случае в [1] получена нижняя оценка

$$L_B(n) \geq \Omega(2^{n/2}).$$

Согласно [1] эта оценка усиливается до оценки

$$L_B(n) \geq \Omega\left(\frac{2^n}{n}\right),$$

если все базисные функции удовлетворяют условию Липшица с константой 1, например, для базиса

$$B = \left\{ \frac{x-y}{2}, |x|, \min(x, y), 1-x \right\} \cup [0, 1]$$

в [1] показано, что $L_B(n) = \Omega(2^n/n)$. Для получения нетривиальных нижних оценок в случае почти конечных липшицевых базисов условие ограниченности констант существенно, так как в [1] показано, что существует функция $H(x, y)$, удовлетворяющая на $\mathbb{R}^2$ условию Липшица с константой 1 такая, что для базиса

$$B = \{H(x, y), x + 2y\} \cup \mathbb{R}$$

выполнено

$$L_B(n) = L_B^\Phi(n) = n + 1.$$

В [2] было показано, что для кусочно-линейного почти-конечного базиса

$$B = \left\{ x - y, |x|, \frac{x}{2} \right\} \cup [0, 1],$$

а также, разумеется, и для базиса

$$B = \left\{ x - y, |x|, \frac{x}{2}, \min(x, y), 1 - x \right\} \cup [0, 1]$$

выполнено

$$L_B(n) = \Omega(2^{n/2}).$$

Из сказанного выше следует, что в этом базисе заменить функции $x/2$, $x - y$ на одну функцию $(x - y)/2$ нельзя.

В [1] было показано, что если почти конечный базис содержит, кроме функций, удовлетворяющих условию Липшица, также полиномы, в которых каждая переменная входит только в первой степени (такие полиномы в [1] названы *жегалкинскими*¹, а в [2] – *мультилинейными*), то для сложности формульной реализации справедлива нижняя оценка

$$L_B^\Phi(n) \geq \Omega(2^{n/2}).$$

Далее будет показано, что эта оценка, вообще говоря, неумлучшаема.

Из теоремы 5 [1] можно вывести, что для базиса

$$B = \{x + y, xy, \cos x, |x|\} \cup [0, 1]$$

справедливо равенство $L_B(n) = O(n)$ для сложности схемной реализации, а если в базис добавить все действительные константы, то будет справедливо также равенство $L_B^\Phi(n) = O(n)$ для сложности формульной реализации. Если же ограничиться константами из отрезка $[0, 1]$, но в базис добавить немультлинейную функцию x^2 , то также будет справедливо равенство $L_B^\Phi(n) = O(n)$, поэтому для получения нижней оценки $L_B^\Phi(n) = \Omega(2^{n/2})$ условие мультилинейности всех нелипшицевых функций базиса B существенно.

2. Формулировка результатов. Тем не менее, справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Любую булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ можно реализовать формулой в почти-конечном базисе*

$$B = \{x + y, xy, \cos x, |x|\} \cup [0, 1]$$

сложности $O(2^{n/2})$.

Отсюда и из теоремы 12 [1] следует, что справедливо равенство по порядку

$$L_B^\Phi(n) = \Omega(2^{n/2}).$$

Аналогичный результат верен и для кусочно-полиномиальных почти конечных базисов.

ТЕОРЕМА 2. *Для любого натурального числа n в каждом из базисов*

$$\{x - y, xy, |x|\} \cup [0, 1], \quad \{x - y, x * y, 2x, |x|\} \cup [0, 1], \quad \{x - y, x * y, |x|\} \cup [0, +\infty),$$

где

$$x * y = \max(-1, \min(1, x)) \max(-1, \min(1, y)),$$

любую булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ можно реализовать формулой сложности $O(2^{n/2})$.

Из данной теоремы и теоремы 8 [1] следует, что для базиса

$$B = \{x - y, x * y, 2x, |x|\} \cup [0, 1]$$

справедливы равенства по порядку

$$L_B(n) = \Omega(2^{n/2}), \quad L_B^\Phi(n) = \Omega(2^{n/2}).$$

¹В честь И. И. Жегалкина.

Обойтись без функции $2x$ в этом базисе нельзя, так как без нее он имел бы липшицеву норму 1, т.е. все его функции удовлетворяли бы условию Липшица с константой 1 относительно нормы

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

и согласно теореме 9 [1] в нем функция Шеннона для формул была бы по порядку не меньше $2^n/n$.

Из теоремы 12 [1] следует, что для базиса

$$B = \{x - y, xy, |x|\} \cup [0, 1]$$

справедливо равенство по порядку $L_B^\Phi(n) = \Omega(2^{n/2})$. В этом базисе обойтись без модуля нельзя, что видно из теоремы 11 [1], согласно которой функция Шеннона для формул в базисе из мультилинейных функций по порядку не меньше $2^n/n$. Обойтись без функции xy тоже нельзя, так как тогда бы согласно теореме 9 [1] функция Шеннона для формул была бы по порядку не меньше $2^n/n$.

В базисе

$$\{x - y, x * y, |x|\} \cup [0, +\infty)$$

заменить множество констант ограниченным отрезком нельзя, так как для любого базиса

$$B = \{x - y, x * y, |x|\} \cup [0, c]$$

согласно теореме 9 [1] функция Шеннона для формул в этом базисе по порядку не меньше $2^n/n$.

Кратко результаты работы были изложены в [3]. Здесь мы приведем подробное доказательство. Оно основано на следующих леммах.

ЛЕММА 1. Для любого натурального числа n в базисе

$$\{x + y, xy, \cos x, |x|\} \cup [0, 1]$$

существует формула Φ_n , зависящая от одного параметра c_f и переменных $(x_1, \dots, x_n) = X$, такая, что

- 1) каждой булевой функции $f = f(x_1, \dots, x_n) = f(X)$ можно сопоставить такую константу $c_f \in [0, 1]$, что формула $\Phi_n(c_f, X)$ будет реализовывать f ;
- 2) константа c_f входит в формулу конечное число раз (не зависящее от n);
- 3) сложность формулы Φ_n составляет $O(2^n)$.

ЛЕММА 2. Для любого натурального числа n в каждом из базисов

$$\{x - y, xy, |x|\} \cup [0, 1], \quad \{x - y, x * y, 2x, |x|\} \cup [0, 1], \quad \{x - y, x * y, |x|\} \cup [0, +\infty)$$

существует формула Φ_n , зависящая от одного параметра c_f и переменных $(x_1, \dots, x_n) = X$ такая, что

- 1) каждой булевой функции $f = f(x_1, \dots, x_n) = f(X)$ можно сопоставить такую константу $c_f \in [0, 1]$, что формула $\Phi_n(c_f, X)$ будет реализовывать f ;
- 2) константа c_f входит в формулу $O(1)$ раз;
- 3) сложность формулы Φ_n в каждом из этих базисов составляет $O(2^n)$.

Подобные леммы использовались в [1]. Перед тем, как их доказать, сформулируем и докажем несколько вспомогательных лемм.

3. Вспомогательные леммы.

ЛЕММА 3. Для произвольного булевого набора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2^n})$ можно построить число $a = a_\alpha$, $0 \leq a < 1/3$, обладающее следующими свойствами:

$$\begin{aligned}\alpha_j = 0 & \iff \cos 2^{2j} a \pi > \frac{1}{2}, \\ \alpha_j = 1 & \iff \cos 2^{2j} a \pi < -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$a = \sum_{i=1}^{2^n} 2^{-2i} \alpha_i.$$

Умножая на 2^{2j} , получим

$$2^{2j} a = \sum_{i=1}^j 2^{2(j-i)} \alpha_i + \sum_{i=j+1}^{2^n} 2^{2(j-i)} \alpha_i.$$

Здесь первая сумма – целое число, а вторая заключена в интервале от 0 до $1/3$, так как

$$0 \leq \sum_{i=j+1}^{2^n} 2^{2(j-i)} \alpha_i < \sum_{i=1}^{\infty} 4^{-i} = \frac{1}{3}.$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^j 2^{2(j-i)} \alpha_i = \lfloor 2^{2j} a \rfloor,$$

и поскольку это равенство выполняется также и по модулю 4, получаем, что

$$\alpha_j = \lfloor 2^{2j} a \rfloor \bmod 4, \quad 2^{2j} a = \alpha_j + 4n_j + \theta_j, \quad \theta_j \in \left[0, \frac{1}{3}\right), \quad n_j \in \mathbb{Z}.$$

Учитывая 2π -периодичность функции $\cos x$, имеем

$$\begin{aligned}\cos(2^{2j} a \pi) &= \cos(\alpha_j \pi + \theta_j \pi) \in \left(\cos \frac{\pi}{3}, \cos 0\right] = \left(\frac{1}{2}, 1\right], & \text{если } \alpha_j = 0, \\ \cos(2^{2j} a \pi) &\in \left[\cos \pi, \cos \frac{4\pi}{3}\right) = \left[-1, -\frac{1}{2}\right), & \text{если } \alpha_j = 1,\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ 1. Рассмотрим кусочно-линейную функцию $l(x)$, равную 0 на $[1/2, 1]$ и 1 на $[-1, -1/2]$, определенную равенством

$$l(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right], \\ \frac{1}{2} - x, & x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \\ 0, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Тогда

$$l(\cos 2^{2j} a \pi) = \alpha_j.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все следует из леммы 3 и определения функции $l(x)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Функцию $l(x)$ можно реализовать в базисе

$$\{x + y, x - y, xy, |x|\} \cup [0, 1]$$

формулой, в которую переменная x будет входить 2 раза.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из равенства

$$l(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \left| x - \frac{1}{2} \right| - \left| x + \frac{1}{2} \right| \right).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. В предложении 1 можно обойтись без вычитания, если добавить в базис функцию $\cos x$. Число вхождений переменной x в формулу не увеличивается.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно в предложении 1 заменить вычитание по формуле

$$x - y = x + \cos(1 + 1 + 1 + (\pi - 3))y,$$

где все константы берутся из отрезка $[0, 1]$.

ЛЕММА 4. В базисе $\{x + y, xy\} \cup [0, 1]$ можно построить формулу $F_n(X)$ сложности $O(n)$ для функции

$$2^{2+2|X|-2^{n+1}}, \quad \text{где} \quad |X| = \sum_{k=1}^n 2^{k-1} x_k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$F_n(X) = \prod_{k=1}^n [2^{-2^k} + (1 - 2^{-2^k})x_k].$$

Если $x_k = 0$, то в квадратных скобках стоит

$$2^{-2^k} + (1 - 2^{-2^k})x_k = 2^{-2^k} = 2^{2^k(x_k-1)}.$$

Если же $x_k = 1$, то

$$2^{-2^k} + (1 - 2^{-2^k})x_k = 1 = 2^{2^k(x_k-1)}.$$

Следовательно,

$$F_n(X) = 2^{\sum 2^k(x_k-1)} = 2^{2\sum 2^{k-1}x_k - \sum 2^k} = 2^{2|X| - 2^{n+1} + 2}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Формула $F_n(X)$ также реализуется со сложностью $O(n)$ в кусочно-полиномиальных базисах

$$\{x + y, x * y\} \cup [0, 1], \quad \{\min(x + y, 1), x * y\} \cup [0, 1].$$

Эти базисы удовлетворяют условию Липшица с константой 1 относительно нормы

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Последний базис состоит из функций, сохраняющих отрезок $[0, 1]$, т.е. удовлетворяющих следующему условию: если аргументы функции принадлежат отрезку $[0, 1]$, то и ее значение при этих аргументах тоже принадлежит этому отрезку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x_k \in [0, 1]$, то значение в соответствующих квадратных скобках принадлежит тому же отрезку и поэтому может быть вычислено с помощью усеченной суммы $\min(x+y, 1)$. Ограниченное умножение совпадает с обычным, если аргументы принадлежат отрезку $[-1, 1]$. Выполнение условия Липшица вытекает из неравенства

$$|x_1 y_1 - x_2 y_2| \leq |(x_1 - x_2) y_1| + |x_2 (y_1 - y_2)| \leq |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

ЛЕММА 5. Существует кусочно-линейная 4-периодичная функция $u(x)$, обладающая таким свойством, что для числа a_α , построенного в лемме 3 по произвольному булевому набору $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2^n})$, выполнены следующие равенства:

$$\begin{aligned} \alpha_j = 0 &\iff u(2^{2j+1}a) > \frac{1}{3}, \\ \alpha_j = 1 &\iff u(2^{2j+1}a) < -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим по определению

$$u(4k) = 1, \quad u(4k+2) = -1, \quad u(2k+1) = 0, \quad k \in \mathbb{Z},$$

и доопределим $u(x)$ в остальных точках по линейности. Доказательство леммы проводится так же, как в лемме 3, вплоть до равенства

$$2^{2j}a = \alpha_j + 4n_j + \theta_j, \quad \theta_j \in \left[0, \frac{1}{3}\right), \quad n_j \in \mathbb{Z}.$$

Учитывая 4-периодичность функции $u(x)$, имеем

$$\begin{aligned} u(2^{2j+1}a) &= u(2\alpha_j + 2\theta_j) \in \left(\frac{1}{3}, 1\right], & \text{если } \alpha_j = 0, \\ u(2^{2j+1}a) &\in \left[-1, -\frac{1}{3}\right), & \text{если } \alpha_j = 1. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Рассмотрим кусочно-линейную функцию $l(x)$, равную 0 на $[1/3, 1]$ и 1 на $[-1, -1/3]$, определенную равенством

$$l(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[-1, -\frac{1}{3}\right], \\ \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x, & x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right], \\ 0, & x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]. \end{cases}$$

Тогда

$$l(u(2^{2j+1}a)) = \alpha_j.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что если $u(2^{2j+1}a) > 1/3$, то выполнено $l(u(2^{2j+1}a)) = 0$, а если $u(2^{2j+1}a) < -1/3$, то $l(u(2^{2j+1}a)) = 1$.

ЛЕММА 6. Функцию $l(x)$ можно реализовать формулой сложности $O(1)$, в которую переменная будет входить $O(1)$ раз, в следующих базисах:

$$\{x + y, x - y, xy, |x|\} \cup [0, 1], \quad \{x - y, xy, |x|\} \cup [0, 1], \quad \{x - y, x * y, |x|\} \cup [0, 1].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В первом базисе достаточно использовать формулу

$$l(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \left(\left| x - \frac{1}{3} \right| - \left| x + \frac{1}{3} \right| \right).$$

Чтобы реализовать $l(x)$ во втором базисе, нужно заменить в предыдущей формуле $x + y$ на $x - (0 - y)$. Та же формула реализует $l(x)$ и в третьем базисе, поскольку в произведении первый сомножитель равен $3/4$, а второй заключен в пределах от $-2/3$ до $2/3$, поэтому операции xy и $x * y$ совпадают.

ЛЕММА 7. В конечном базисе $\{x - y, 2x, |x|, 1\}$ можно реализовать функцию $u(2^{2^{n+1}+1}x)$, $x \in [0, 1/2]$, формулой сложности $O(2^n)$ с одним вхождением переменной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим кусочно-линейную функцию

$$z(x) = 1 - |2x - 1|$$

на отрезке $[0, 1]$. Эта функция возрастает от 0 до 1 на первой половине отрезка и убывает от 1 до 0 на второй. Такую функцию назовем “зубчиком”. Рассмотрим последовательность подстановок $z(x)$ в себя:

$$z_1(x) = z(x), \quad z_2(x) = z(z_1(x)), \quad \dots, \quad z_{i+1}(x) = z(z_i(x)), \quad \dots$$

Функция $z_2(x)$ определена на отрезке $[0, 1]$, имеет один зубчик на отрезке $[0, 1/2]$ и один на $[1/2, 1]$. При каждой подстановке $z_n(x)$ в $z(x)$ число зубчиков удваивается. Ясно, что у функции $z_{2^{n+1}}(x)$ будет $2^{2^{n+1}-1}$ зубчиков.

Чтобы перейти к функции, у которой каждый зубчик имеет ширину 4, нужно вместо аргумента x подставлять в функцию $z_{2^{n+1}}(x)$ величину $2^{-2^{n+1}-1}x$. Из такой функции построить $u(x)$ можно следующим образом:

$$u(x) = 1 - 2z_{2^{n+1}}(2^{-2^{n+1}-1}x).$$

Указанная формула дает правильные значения $u(x)$ на отрезке $[0, 2^{2^{n+1}+1}]$. Тогда формула для $u(2^{2^{n+1}+1}x)$ на отрезке $[0, 1]$ выглядит так:

$$u(2^{2^{n+1}+1}x) = 1 - 2z_{2^{n+1}}(x).$$

Она может быть реализована в указанном базисе со сложностью $O(2^n)$.

ЛЕММА 8. Функцию $u(x)$ можно реализовать на отрезке $[0, 2^{2^{n+1}}]$ формулой сложности $O(2^n)$ с одним взойдением переменной в бесконечном базисе $\{|x|\} \cup \{x - c : c > 0\}$, имеющем липшицеву норму 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$u_0(x) = |x - 2^{2^{n+1}}| - 2^{2^{n+1}-1},$$

определенную на отрезке $[0, 2^{2^{n+1}+1}]$, симметричную относительно его середины и представляющую собой один “уголок”, у которого максимальные и минимальные значения равны по модулю и составляют $2^{2^{n+1}-1}$. Проведем итерацию

$$u_m = |u_{m-1}| - 2^{2^{n+1}-1-m}.$$

После каждого шага итерации число “уголков” на отрезке $[0, 2^{2^{n+1}+1}]$ удваивается, а их амплитуда уменьшается в два раза. Функция u_m представляет собой 2^m уголков с амплитудой $2^{2^{n+1}-1-m}$. Положим $m = 2^{n+1} - 1$, тогда функция u_m представляет собой $2^{2^{n+1}-1}$ уголков с амплитудой 1, т.е. равна $u(x)$.

4. Доказательство лемм 1 и 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Для произвольной функции $f(x_1, \dots, x_n)$ построим последовательность длины 2^n , определенную равенством

$$\alpha_{1+|X|} = f(X), \quad X = (x_1, \dots, x_n), \quad |X| = \sum_{k=1}^n 2^{k-1} x_k,$$

и сопоставим функции f код $c_f = a_\alpha \pi / 2 \in [0, 1]$. Для произвольного $X = (x_1, \dots, x_n)$ положим $j = 1 + |X|$; тогда согласно следствию 1 и лемме 4 имеем

$$\begin{aligned} f(X) &= \alpha_{1+|X|} = \alpha_j = l(\cos(2^{2j} a_\alpha \pi)) = l(\cos(2^{2j+1} c_f)) \\ &= l(\cos(2^{2^{n+1}+1} 2^{2j-2^{n+1}} c_f)) = l(\cos(2^{2^{n+1}+1} F_n(X) c_f)). \end{aligned}$$

Определим формулу $\Phi_n(c_f, X)$ равенством

$$\Phi_n(c_f, X) = l(\cos(2^{2^{n+1}+1} F_n(X) c_f)).$$

Этим доказано первое утверждение леммы 1. Функцию $2^{2^{n+1}+1}x$ можно реализовать повторным умножением на константу $2 = 1 + 1$, на это потребуется $O(2^n)$ операций; подформула F_n вычисляется с линейной сложностью согласно лемме 4. Поскольку функция $l(x)$ реализуется формулой сложности $O(1)$, в которую переменная входит 2 раза (в соответствии с предложениями 1 и 2), утверждения 2 и 3 леммы 1 доказаны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если в базис добавить функцию x^2 , то константу $2^{2^{n+1}}$, а также и всю формулу Φ_n можно реализовать со сложностью $O(n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2 производится аналогично доказательству леммы 1, где везде вместо $\cos x$ используется $u(x)$, а вместо π – константа 2. Для произвольной функции $f(x_1, \dots, x_n)$ строим последовательность

$$\alpha_{1+|X|} = f(X), \quad X = (x_1, \dots, x_n), \quad |X| = \sum_{k=1}^n 2^{k-1} x_k,$$

и сопоставим функции f код $c_f = a_\alpha \in [0, 1]$. Для произвольного X определяем $j = 1 + |X|$, получаем согласно следствию 2 цепочку равенств

$$\begin{aligned} f(X) &= \alpha_{1+|X|} = \alpha_j = l(u(2^{2j+1}a_\alpha)) = l(u(2^{2j+1}c_f)) \\ &= l(u(2^{2^{n+1}+1}2^{2j-2^{n+1}}c_f)) = l(u(2^{2^{n+1}+1}F_n(X)c_f)). \end{aligned}$$

Положим по определению

$$\Phi_n(c_f, X) = l(u(2^{2^{n+1}+1}F_n(X)c_f)), \quad X = (x_1, \dots, x_n).$$

Этим доказано первое утверждение леммы 2. Для дальнейшего достаточно, чтобы функция $u(x)$ реализовывалась на отрезке $[0, 2^{2^{n+1}}]$ (так как $c_f = a_\alpha < 1/3$, $F_n(X) \leq 1$). При этом она должна иметь сложность $O(2^n)$ и содержать $O(1)$ вхождений переменной x . Для этого реализуем функцию $u(2^{2^{n+1}+1}x)$, пользуясь леммами 7 и 8. Поскольку функцию $F_n(x)$ можно реализовать с линейной сложностью согласно лемме 4, а функцию $l(x)$ – со сложностью $O(1)$ согласно лемме 6, получаем утверждения 2 и 3 леммы 2.

5. Доказательство теорем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Для этого, используя идею из [2], достаточно разложить f по первым $m = \lfloor n/2 \rfloor$ переменным и получить формулу

$$f(X) = \Phi_{n-m}(C(x_1, \dots, x_m), x_{m+1}, \dots, x_n),$$

где

$$C(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\sigma_1=0}^1 x_1^{\sigma_1} \sum_{\sigma_2=0}^1 x_2^{\sigma_2} \cdots \sum_{\sigma_m=0}^1 x_m^{\sigma_m} c_{f_{\sigma_1, \dots, \sigma_m}},$$

$$f_{\sigma_1, \dots, \sigma_m} = f_{\sigma_1, \dots, \sigma_m}(x_{m+1}, \dots, x_n) = f(\sigma_1, \dots, \sigma_m, x_{m+1}, \dots, x_n),$$

$x^1 = x$, $x^0 = 1 - x$. Справедливость этой формулы вытекает из леммы 1.

Подформула $C(x_1, \dots, x_m)$ (аналог совершенной дизъюнктивной нормальной формы) реализует мультилинейный полином, сохраняющий отрезок $[0, 1]$, и имеет сложность $O(2^m) = O(2^{n/2})$. Поскольку формула Φ_{n-m} реализуется согласно лемме 1 со сложностью $O(2^{n/2})$ и подформула $C(X)$ подставляется в нее $O(1)$ раз, то сложность всей формулы составляет $O(2^{n/2})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Формула $C(x_1, \dots, x_m)$ может быть реализована со сложностью $O(2^m)$ в полиномиальном базисе $\{x + y, xy, 1 - x\}$ и в любом из кусочно-полиномиальных базисов

$$\{x + y, x * y, 1 - x\}, \quad \{\min(x + y, 1), x * y, 1 - x\}.$$

Последний базис сохраняет отрезок $[0, 1]$. В частности, формула $C(x_1, \dots, x_m)$ может быть реализована со сложностью $O(2^m)$ в любом из базисов теорем 1 и 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Коэффициенты в аналоге разложения любого мультилинейного многочлена в виде совершенной ДНФ совпадают с его значениями в вершинах единичного m -мерного куба. Экстремальные значения на этом кубе мультилинейный многочлен принимает в вершинах этого куба. Поэтому, если его значения в вершинах куба принадлежат отрезку $[0, 1]$, то его значения в любой точке

куба принадлежат отрезку $[0, 1]$. Следовательно, значения любой суммы в формуле $C(x_1, \dots, x_m)$ принадлежат отрезку $[0, 1]$. Поэтому все операции умножения и сложения в этой формуле можно заменить на операции ограниченного умножения и усеченного сложения. Операция $x + y$ выражается через операцию $x - y$ формулой $x + y = x - (0 - y)$. Операция $1 - x$ выражена через базис теоремы 1 в замечании 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Универсальную формулу $\Phi_n(c_f, X)$ можно переписать в виде

$$\Phi_n(c_f, X) = l(\cos(2^{2^{n+1}+1} F_n(X) c_f)) = l(T_{2^{2^{n+1}+1}}(\cos(F_n(X) c_f))),$$

где T_m – многочлен Чебышева. Если к базису добавить функцию T_2 , то этот многочлен реализуется со сложностью $O(2^n)$. В [2] вместо T_2 используется многочлен $-x^2 + 4x$, являющийся модификацией T_2 .

Докажем теперь теорему 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2 проводится так же, как для теоремы 1. Раскладываем f по первым $m = \lfloor n/2 \rfloor$ переменным и используем лемму 2 и формулу

$$f(X) = \Phi_{n-m}(C(x_1, \dots, x_m), x_{m+1}, \dots, x_n),$$

$$C(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\sigma_1=0}^1 x_1^{\sigma_1} \sum_{\sigma_2=0}^1 x_2^{\sigma_2} \cdots \sum_{\sigma_m=0}^1 x_m^{\sigma_m} c_{f_{\sigma_1, \dots, \sigma_m}}.$$

Согласно замечанию 1 формулу $C(x_1, \dots, x_m)$ можно реализовать в каждом из этих базисов со сложностью $O(2^{n/2})$. Поскольку формула Φ_{n-m} реализуется согласно лемме 2 со сложностью $O(2^{n/2})$ и подформула $C(X)$ подставляется в нее $O(1)$ раз, то сложность всей формулы составляет $O(2^{n/2})$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Б. Гашков, “Сложность реализации булевых функций схемами из функциональных элементов и формулами в базисах, элементы которых реализуют непрерывные функции”, *Проблемы кибернетики*, **37** (1980), 57–118.
- [2] G. Turán, F. Vatan, “On the computation of Boolean functions by analog circuits of bounded fan-in”, *J. Comput. System Sci.*, **54**:1 (1997), 199–212.
- [3] С. Б. Гашков, Я. В. Вегнер, “О сложности реализации булевых функций вещественными формулами”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2008, № 2, 47–49.

Я. В. Вегнер

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило

26.04.2009

Исправленный вариант

19.12.2010

С. Б. Гашков

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: sbgashkov@gmail.com