Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Зубова, Решение задачи управления для линейной дескрипторной системы с прямоугольно-матричными коэффициентами, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 6, 885–896

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm7834>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 14:21:49

Решение задачи управления для линейной дескрипторной системы с прямоугольно-матричными коэффициентами

С. П. Зубова

Ставится задача управления для линейной стационарной алгебро-дифференциальной системы, коэффициенты которой – прямоугольные матрицы. Выводится критерий управляемости при частично заданных выходной функции и краевых значениях функции состояния. Строятся управляющая функция и функция состояния при минимальных ограничениях на гладкость выходной функции.

Библиография: 8 названий.

1. Постановка задач. Рассматривается динамическая система, описываемая дифференциально-алгебраической системой

$$\frac{d}{dt} Ex(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1.1)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (1.2)$$

где $E, A \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$, $B \in L(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^n)$, $C \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l)$, $t \in [t_1, t_2]$.

В теории управления функцию $x(t)$ называют *функцией состояний* системы (состоянием), $y(t)$ – *выходной функцией* (выходом), $u(t)$ – *управляющей функцией* (управлением). Ставятся задачи поиска функции $u(t)$ такой, чтобы при подстановке ее в дифференциальное соотношение (1.1) решение $x(t)$ системы (1.1), (1.2) удовлетворяло бы определенным требованиям.

В монографии [1] система (1.1), (1.2) называется *полностью управляемой по выходу*, если начальный выход $y(t_1)$, соответствующий любому t_1 , может быть приведен к любому окончательному выходу y_2 за конечное время $t_2 - t_1$ ограниченным входным сигналом $u(t), \dots, y(t_2) = y_2$.

Если на $y(t)$ не накладывается никаких ограничений, эта функция называется *наблюдаемой*.

В случае $C = 0$, $y(t) \equiv 0$ система (1.1) называется *полностью управляемой по состоянию*, если из начального состояния $x(t_1)$, соответствующего любому t_1 , она может быть переведена в любое окончательное состояние x_2 за конечное время $t_2 - t_1$ ограниченным входным сигналом $u(t), \dots, x(t_2) = x_2$ [1].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00397).

Вопросы существования $u(t)$ в различных задачах для системы (1.1), (1.2) изучались многими авторами. Обзоры работ можно найти в [2], [3]. Как правило, исследования проводились для случая квадратных матриц E , A и регулярности пары (E, A) . Выходная функция $y(t)$ рассматривалась как наблюдаемая, не участвующая в формировании управления.

В данной работе ставится более общая задача: построение $u(t)$ для получения на выходе максимально возможного желаемого результата $y(t)$ без значительных ограничений на состояние системы в начальный t_1 и конечный t_2 моменты времени.

Функция $y(t)$ не может быть любой наперед заданной, это следует из (1.2): $y(t)$ обязана принадлежать множеству значений C . Потребуется и некоторая гладкость $y(t)$. Значения $x(t_1)$ и $x(t_2)$ также не могут быть произвольно заданными. Из (1.2) следует, что при заданной функции $y(t) \in \text{Im } C$ произвольными могут быть только $x(t_1)$, $x(t_2)$ из ядра C .

Назовем систему *полностью управляемой по входу и выходу (управляемой)*, если существует вектор-функция $u(t)$, при подстановке которой в уравнение (1.1) решение $x(t)$ системы (1.1), (1.2) с произвольной достаточно гладкой вектор-функцией $y(t) \in \text{Im } C$ принимает при $t = t_1$ и t_2 любые значения $x_1^0, x_2^0 \in \text{Ker } C$ (соответственно).

Используются следующие факты [4].

С помощью линейного отображения $D: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^m$ осуществляется расщепление

$$\mathbb{R}^r = \text{Coim } D \dot{+} \text{Ker } D, \quad \mathbb{R}^m = \text{Im } D \dot{+} \text{Coker } D,$$

где через $\text{Coim } D$ обозначено прямое дополнение к $\text{Ker } D$ в $\mathbb{R}^r$, через $\text{Coker } D$ – прямое дополнение к $\text{Im } D$ в $\mathbb{R}^m$. Оператор D устанавливает взаимно однозначное соответствие между $\text{Coim } D$ и $\text{Im } D$. Сужение $\tilde{D}$ матрицы D на $\text{Coim } D$ имеет обратную D^+ , называемую *псевдообратной* матрицей.

Будем обозначать через $P(D)$ и $Q(D)$ проекторы на $\text{Ker } D$ и $\text{Coker } D$ соответственно, отвечающие указанным разложениям. Заметим:

$$P(D) = I - D^+ D, \quad D^+ = \tilde{D}^{-1}(I - Q(D))$$

(I – здесь и далее единичная матрица в соответствующем пространстве).

Можно для получения $P(G)$ и $Q(G)$ использовать, например, свойство матрицы D^* , сопряженной к D :

$$\text{Coim } D = \text{Im } D^*, \quad \text{Coker } D = \text{Ker } D^*.$$

Уравнение

$$Dv = w, \quad w \in \mathbb{R}^m,$$

эквивалентно системе

$$Q(D)w = 0, \quad v = D^+ w + P(D)v$$

для любых $P(D)v \in \text{Ker } D$.

Из второго уравнения исходной системы следует

$$y(t) \in \text{Im } C, \quad x(t) = C^+ y(t) + P(C)x(t). \quad (1.3)$$

Решаются следующие задачи.

1. Выявить условия существования управления $u(t)$, под воздействием которого часть $P(C)x(t) = x^0(t)$ состояния $x(t)$ системы (1.1), (1.2) переводится из произвольного состояния

$$x^0(t_1) = x_1^0 \in \text{Ker } C \quad (1.4)$$

в произвольное состояние

$$x^0(t_2) = x_2^0 \in \text{Ker } C, \quad (1.5)$$

давая на выходе максимально произвольную вектор-функцию $y(t)$.

2. Построить $x(t)$ и $u(t)$.

3. Выявить “свободные” компоненты $u(t)$ и $x(t)$, наличие которых позволяет решать задачи с дополнительными ограничениями на $u(t)$ и $x(t)$.

2. Исследования. Из постановки задачи следует существование $(d/dt)EC^+y(t)$. Соотношения (1.1), (1.3) приводят к следующему равенству:

$$\frac{d}{dt}EP(C)x(t) = AP(C)x(t) + Bu(t) + AC^+y(t) - \frac{d}{dt}EC^+y(t). \quad (2.1)$$

Система (1.1), (1.2) является управляемой, если существует функция $u(t)$, при подстановке которой в (2.1) полученное дифференциальное уравнение имеет единственное решение $x^0(t)$, удовлетворяющее условиям (1.4), (1.5) для любых $x_1^0, x_2^0 \in \text{Ker } C$.

Таким образом, ставится следующая задача. Дано дифференциальное соотношение, содержащее две неизвестные функции. Требуется найти их такими, чтобы одна из них удовлетворяла двум краевым условиям.

Для решения поставленных задач применяется метод каскадного расщепления пространств на подпространства [5], позволяющий найти неизвестные функции, решая не дифференциальные, а лишь алгебраические уравнения.

Соотношение (2.1) эквивалентно системе

$$u(t) = B^+ \left(\frac{d}{dt}Ex^0(t) - Ax^0(t) - AC^+y(t) + \frac{d}{dt}EC^+y(t) \right) + P(B)u(t), \quad (2.2)$$

$$Q(B)\frac{d}{dt}Ex^0(t) = Q(B)Ax^0(t) + Q(B)\left(AC^+y(t) - \frac{d}{dt}EC^+y(t) \right), \quad (2.3)$$

где $P(B)u(t)$ – произвольная вектор-функция из $\text{Ker } B$.

Обозначим $Q(B)E = G$.

ЛЕММА 1. Если система (1.1), (1.2) управляема, то

$$Q(G)Q(B)A = 0. \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (2.3):

$$\frac{d}{dt}G(x^0(t) + C^+y(t)) = Q(B)A(x^0(t) + C^+y(t))$$

эквивалентно системе

$$Q(G)Q(B)A(x^0(t) + C^+y(t)) = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{d}{dt}(I - P(G))(x^0(t) + C^+y(t)) = G^+Q(B)A(x^0(t) + C^+y(t)). \quad (2.6)$$

Соотношение (2.5) выполняется при любых $x^0(t_1), x^0(t_2) \in \text{Ker } C$, $f(t) \in \text{Im } C$, следовательно, $Q(G)Q(B)A = 0$.

Далее уравнение (2.6) можно заменить эквивалентной системой

$$x^0(t) = x^1(t) + u^1(t), \quad (2.7)$$

$$\frac{dx^1}{dt} = A_1 x^1(t) + B_1 u^1(t) + F_1(t), \quad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned} x^1 &= (I - P(G))x^0(t), & u^1 &= P(G)x^0(t), \\ A_1 &= G^+Q(B)A(I - P(G)), & B_1 &= G^+Q(B)AP(G), \\ F_1(t) &= G^+Q(B)AC^+y(t) - \frac{d}{dt}(I - P(G))C^+y(t). \end{aligned}$$

Из (1.4), (1.5), (2.8) следует

$$x^1(t_i) = x_i^{1,0}, \quad \frac{dx^1}{dt}(t_i) = x_i^{1,1}, \quad i = 1, 2, \quad (2.9)$$

со значениями

$$x_i^{1,0} = (I - P(G))x_i^0, \quad x_i^{1,1} = G^+Q(B)Ax_i^0 + F_1(t_i).$$

Система (1.1), (1.2) является управляемой тогда и только тогда, когда полностью управляема система (2.8) с управлением $u^1(t)$ и условиями (2.9).

На этом этапе остаются неизвестными свойства $y(t)$, достаточные для полной управляемости системы (1.1), (1.2). Поэтому следует продолжить расщепление.

3. Построение функций управления и состояния. Равенство (2.8) аналогичным образом заменяется эквивалентной системой

$$\begin{aligned} u^1(t) &= B_1^+ \left(\frac{dx^1}{dt} - A_1 x^1(t) - F_1(t) \right) + P(B_1)u^1(t), \\ x^1(t) &= x^2(t) + u^2(t), \\ \frac{dx^2}{dt} &= A_2 x^2(t) + B_2 u^2(t) + F_2(t), \end{aligned} \quad (3.1)$$

с произвольным $P(B_1)u^1(t) \in \text{Ker } B_1$, удовлетворяющим условиям

$$P(B_1)u^1(t_i) = P(B_1)P(G)x_i^0, \quad i = 1, 2.$$

И так далее. В результате получаются соотношения

$$u^m(t) = B_m^+ \left(\frac{dx^m}{dt} - A_m x^m(t) - F_m(t) \right) + P(B_m)u^m(t), \quad (3.2)$$

$$x^{m-1}(t) = x^m(t) + u^m(t), \quad (3.3)$$

$$\frac{dx^q}{dt} = A_q x^q(t) + B_q u^q(t) + F_q(t), \quad (3.4)$$

где

$$u^m(t) = (I - Q(B_{m-1}))x^{m-1}(t), \quad x^m(t) = Q(B_{m-1})x^{m-1}(t),$$

$$A_m = Q(B_{m-1})A_{m-1}Q(B_{m-1}), \quad B_m = Q(B_{m-1})A_{m-1}(I - Q(B_{m-1})),$$

$$F_m(t) = Q(B_{m-1})F_{m-1}(t), \quad P(B_m)u^m(t)$$

– произвольные вектор-функции из $\text{Ker } B_m$, удовлетворяющие условиям

$$P(B_m)u^m(t_i) = P(B_m)(I - Q(B_{m-1}))x^{m-1}(t_i), \quad m = 2, \dots, q. \quad (3.5)$$

Число q таково, что либо $B_q = 0$, либо B_q – сюръективная матрица [5]. В первом случае система (1.1), (1.2) не является управляемой, во втором случае она управляема.

Число $q + 1$ равно наименьшему количеству матриц в полноранговой матрице управляемости Калмана

$$(B_1 \quad A_1 B_1 \quad A_1^2 B_1 \quad \dots \quad A_1^q B_1)$$

для системы (2.8).

Пусть $\text{Coker } B_q = \{0\}$. Для $x^q(t)$ выводятся условия

$$x^q(t_i) = x_i^{q,0}, \quad \frac{d}{dt} x^q(t_i) = x_i^{q,1}, \quad (3.6)$$

$$\frac{d}{dt} \Phi_m(t_i) = x_i^{q,m+1}, \quad m = 1, \dots, q-1, \quad (3.7)$$

где

$$x_i^{q,0} = \prod_{m=1}^{q-1} Q(B_{q-m})(I - P(G))x_i^0,$$

$$x_i^{q,1} = Q(B_{q-1})A_{q-1} \prod_{m=2}^{q-1} Q(B_{q-m})(I - P(G))x_i^0 + F_q(t_i),$$

$$x_i^{q,m+1} = \prod_{j=1}^m Q(B_{q-j})A_{q-j}Q(B_{q-m-1})A_{q-m-1}$$

$$\times \prod_{r=m+2}^{q-1} Q(B_{q-r})(I - P(G))x_i^0, \quad m = 1, \dots, q-2,$$

$$x_i^{q,q} = \prod_{j=1}^{q-1} Q(B_{q-j})A_{q-j}(G^+Q(B)Ax_i^0 + F_1(t_i)),$$

$i = 1, 2$, и

$$\Phi_1(t) = \frac{dx^q}{dt} - F_q(t),$$

$$\Phi_m(t) = \frac{d}{dt} \Phi_{m-1} - \prod_{j=q-1}^{q-m+1} Q(B_j)A_j F_{q-m+1}(t), \quad m = 2, \dots, q-1.$$

Функцию $x^q(t)$ можно построить, например, в виде

$$x^q(t) = \sum_{m=0}^{2q+1} \alpha_m t^m + \int_0^t F_q(\tau) d\tau$$

$$+ \sum_{m=2}^{q-1} \int_0^t \int_0^{\tau_m} \dots \int_0^{\tau_2} \prod_{j=q-1}^{q-m+1} Q(B_j)A_j F_{q-m+1}(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_m. \quad (3.8)$$

Коэффициенты α_m с помощью условий (3.6), (3.7) находятся из линейной алгебраической системы с определителем, первые $q + 1$ строк которого суть $q + 1$ строк определителя Вронского для функций $1, t, \dots, t^{2q+1}$ в точке t_1 , а следующие $q + 1$ строк – те же строки с $t = t_2$. Такой определитель отличен от нуля, таким образом, $x^q(t)$ будет найдено.

Для построения $x^0(t)$ имеем рекуррентную формулу

$$x^{m-1}(t) = x^m(t) + B_m^+ \left(\frac{d}{dt} x^m(t) - A_m x^m(t) - F_m(t) \right) + P(B_m) u^m(t),$$

где $P(B_m) u^m(t)$ – произвольные вектор-функции из $\text{Ker } B_m$ со значениями

$$P(B_m) u^m(t_i) = (I - Q(B_{m-1})) \prod_{j=2}^{m-1} Q(B_{m-j}) (I - P(G)) x_i^0,$$

$m = q, \dots, 1, i = 1, 2$.

Управляющая функция $u(t)$ строится по формуле (2.2) с произвольным элементом $P(B) u(t) \in \text{Ker } B$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Сумму $\sum_{m=0}^{2q+1} \alpha_m t^m$ в выражении (3.8) можно заменить линейной комбинацией линейно независимых $2q + 2$ функций, для которых существуют $d\Phi_m/dt$, $m = 1, \dots, q - 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для построения $x(t)$ и $u(t)$ проекторы $Q(B_m)$ можно находить следующим образом. Соотношение

$$\frac{dx^m}{dt} = A_m x^m(t) + B_m u^m(t) + F_m(t)$$

рассматривается как уравнение для нахождения $u^m(t)$. Условие существования $u^m(t)$ имеет вид

$$Q(B_m) \frac{dx^m}{dt} = Q(B_m) A_m x^m(t) + Q(B_m) F_m(t),$$

т.е. $Q(B_m)$ – это матрица, стоящая при dx^m/dt , если записать ее в такой форме, чтобы выполнялось свойство $Q^2(B_m) = Q(B_m)$.

4. О “свободных” компонентах функций управления и состояния. Произвольной компонентой функции $u(t)$ является, очевидно, $P(B) u(t)$. Для $P(C) x(t)$ имеем формулу

$$P(C) x(t) = x^q(t) + \sum_{j=1}^q u^j(t),$$

где каждая функция $u^j(t)$ имеет произвольное слагаемое $P(B_j) u^j(t)$, удовлетворяющее условиям (3.5).

5. Критерий управляемости системы. Справедлива

ЛЕММА 2. Система (2.8) полностью управляема в том и только том случае, когда уравнение

$$(A - \lambda E)v + Bw = EP(C)z$$

имеет решение (v, w) при любых $\lambda \in \mathbb{C}$ и $z \in \mathbb{R}^k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [6]: система (2.8) полностью управляема тогда и только тогда, когда

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A_1 - \lambda I & B_1 \end{pmatrix} = \dim \text{Coim } G$$

для любых $\lambda \in \mathbb{C}$.

В силу определения A_1 , B_1 и G_1 (п. 1) это условие эквивалентно следующему условию: существует решение (α, β) уравнения

$$(A_1 - \lambda I)(I - P(G))\alpha + B_1 P(G)\beta = (I - P(G))P(C)\gamma \quad (5.1)$$

для любых $\lambda \in \mathbb{C}$, $\gamma \in \mathbb{R}^k$. Воспользовавшись в (5.1) формулами для A_1 , B_1 , G и применив к полученному выражению G , получим соотношение

$$(Q(B)A - \lambda Q(B)E)(I - P(G))\alpha + Q(B)AP(G)\beta = Q(B)EP(C)\gamma.$$

Обозначив

$$\begin{aligned} (I - P(G))\alpha + P(G)\beta &= v, \\ P(C)\gamma - \lambda P(G)P(C)\beta &= P(C)z, \end{aligned} \quad (5.2)$$

приходим к уравнению

$$Q(B)(A - \lambda E)v = Q(B)EP(C)z. \quad (5.3)$$

Возьмем

$$w = B^+(EP(C)z - (A - \lambda E)v) + P(B)w \quad (5.4)$$

с произвольным слагаемым $P(B)w \in \text{Ker } B$. Система (5.3), (5.4) эквивалентна уравнению

$$(A - \lambda E)v + Bw = EP(C)z. \quad (5.5)$$

Итак, если система (2.8) полностью управляема, то существует решение (v, w) уравнения (5.5) для любых $\lambda \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{R}^k$. При этом v является решением уравнения (5.3), а w определяется формулой (5.4).

Если же уравнение (5.5) имеет решение (v, w) для любых $\lambda \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{R}^k$, то уравнение (5.3) имеет решение v . Тогда уравнение (5.1) имеет решение (α, β) , где $\alpha = (I - P(G))v$, $\beta = P(G)v$ в силу (5.2) и, следовательно, система (2.8) полностью управляема.

Имеет место

ЛЕММА 3. Равенство (2.4) выполняется в том и только том случае, когда уравнение

$$Ev + Bw = Az$$

имеет решение (v, w) при любых $z \in \mathbb{R}^k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последнее уравнение эквивалентно системе

$$\begin{aligned} Q(B)Ev &= Q(B)Az, \\ w &= B^+Az - B^+Ev + P(B)w. \end{aligned}$$

Первое соотношение этой системы имеет решение v при любых $z \in \mathbb{R}^k$ тогда и только тогда, когда $Q(G)Q(B)Az = 0$. При выполнении этого условия

$$v = G^+Q(B)Az + P(G)v.$$

Таким образом, имеет место

ЛЕММА 4. Пусть $y(t) \in \text{Im } C$ и существует $(d/dt)(EC^+y(t))$. Существует функция $u(t)$ такая, что при подстановке ее в систему (1.1), (1.2) существует решение $x(t)$, удовлетворяющее условиям (1.4), (1.5) в том и только том случае, когда выполняются условия

k_2) уравнение

$$Ev + Bw = Az \quad (5.6)$$

имеет решение (v, w) при любых $z \in \mathbb{R}^k$;

k_3) система

$$\begin{aligned} Cz &= 0, \\ (A - \lambda E)v + Bw &= Ez \end{aligned} \quad (5.7)$$

имеет решение (v, w) при любых $\lambda \in \mathbb{C}$ и $z \in \mathbb{R}^k$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Условия k_2), k_3) сравнимы с условиями

i_1) $\text{rank}(E \ B) = n$,

i_2) $\text{rank}(A - \lambda E \ B) = n$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$,

полученными для уравнения (1.1) в случае квадратных матриц E , A , регулярности пары (E, A) и $C = 0$ [7], [2].

Однако условий k_2) и k_3) недостаточно для управляемости системы (1.1), (1.2). Это подтверждает

ПРИМЕР 1. Пусть

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

$$C = (1 \ 1 \ 1 \ 0), \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 1, \quad x(t) = (x_1, x_2, x_3, x_4), \quad u(t) \in \mathbb{R}^1.$$

Система (1.1), (1.2) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= 2x_1 + u, \\ -\dot{x}_3 + \dot{x}_4 &= 2x_2 + x_4 - u, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= y(t). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Из последнего соотношения следует

$$x_3 = y(t) - x_1 - x_2,$$

следовательно, $P(C)x = (x_1, x_2, -x_1 - x_2, x_4)$.

Пусть

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 1, & x_2(0) &= -1, & x_4(0) &= 0, \\ x_1(1) &= 0, & x_2(1) &= 1, & x_4(1) &= 2. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Условие k_2) выполняется, так как уравнение (5.6), т.е. система

$$\begin{aligned} v_3 + w &= 2z_1, \\ -v_3 + v_4 - w &= 2z_2 + z_4 \end{aligned}$$

имеет решение v_3, v_4 при любых w, z_1, z_2, z_4 .

Условие k_3) также выполняется. Действительно,

$$z = (z_1, z_2, -z_1 - z_2, z_4),$$

тогда (5.7) – это система

$$\begin{aligned} 2v_1 - \lambda v_3 + w &= -(z_1 + z_2), \\ 2v_2 + \lambda v_2 + (1 - \lambda)v_4 - w &= z_1 + z_2 + z_4, \end{aligned}$$

имеющая решения v_1, v_2 при любых $v_3, v_4, w, z_1, z_2, z_4$.

Условия леммы 4 выполнены, однако система (5.9) не является управляемой. Покажем это. Уравнение (2.1) – это система

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 + \dot{x}_2 &= -2x_1 - u + \dot{y}(t), \\ \dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \dot{x}_4 &= 2x_2 + x_4 - u + \dot{y}(t), \end{aligned}$$

эквивалентная соотношениям (2.2), (2.3):

$$u(t) = -\frac{d(x_1 + x_2)}{dt} - 2x_1 + \dot{y}(t) \quad (5.11)$$

$$\dot{x}_4 = x_4 + 2(x_1 + x_2). \quad (5.12)$$

Для $x_4(t)$ получаем из (5.10) и (5.12) условия

$$x_4(0) = 0, \quad x_4(1) = 2, \quad \dot{x}_4(0) = 0, \quad \dot{x}_4(1) = 4.$$

В качестве x_4 можно взять функцию $x_4(t) = 2t^2$. Тогда из (5.12) находится $x_1 + x_2 = 2t - t^2$. Из (5.11) получаем

$$u(t) = -2 + 2t - 2x_1 + \dot{y}(t).$$

Пусть $x_1 = (1 - t)^2$. Тогда

$$u(t) = -4 + 6t - 2t^2 + \dot{y}(t). \quad (5.13)$$

Итак, если $u(t)$ определено формулой (5.13), то существует состояние исходной системы

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - t)^2 \\ -1 + 4t - 2t^2 \\ -2t + t^2 + y(t) \\ 2t^2 \end{pmatrix},$$

удовлетворяющее условиям (5.10).

Но при таком $u(t)$ существует, например, и такое состояние системы (5.9):

$$x^*(t) = \begin{pmatrix} 2 - 3t + t^2 \\ -3 + 3t - t^2 \\ 1 + y(t) \\ 2 \end{pmatrix},$$

не удовлетворяющее условиям (5.10).

Для того, чтобы при $u(t)$, построенном подходящим образом (так, чтобы выполнялись условия (1.4), (1.5)) не было посторонних траекторий системы (1.1), (1.2), нужно, чтобы решение системы (2.1) при каждом $u(t)$, $y(t)$ было единственным.

Известно [8], что решение уравнения (2.1) при заданных $u(t)$, $y(t)$ единственно в том и только том случае, когда выполняется условие

k_1) система

$$\begin{aligned} Cv &= 0, \\ (E - \varepsilon A)v &= 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

при всех достаточно малых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ имеет единственное решение $v = 0$.

В примере 1 условие k_1) не выполняется: система

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 &= 0, \\ -2\varepsilon v_1 + v_3 &= 0, \\ -2\varepsilon v_2 - v_3 + (1 - \varepsilon)v_4 &= 0 \end{aligned}$$

имеет при $\varepsilon \in (0, 1)$ и ненулевые решения, например,

$$v_1 = 1, \quad v_2 = -(1 + 2\varepsilon), \quad v_3 = 2\varepsilon, \quad v_4 = -\frac{4\varepsilon^2}{1 - \varepsilon}.$$

На основании лемм 1–4 и свойства k_1) справедлива следующая

ТЕОРЕМА. Пусть $y(t) \in \text{Im } C$ и функция $EC^+y(t)$ дифференцируема при $t \in [t_1, t_2]$. Система (1.1), (1.2) с условиями (1.4), (1.5) управляема тогда и только тогда, когда выполняются условия k_1), k_2), k_3).

6. Примеры.

ПРИМЕР 2. Пусть E , A , B определяются формулами (5.8) и

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1],$$

т.е. система (1.1), (1.2) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= 2x_1 + u, \\ -\dot{x}_3 + \dot{x}_4 &= 2x_2 + x_4 - u, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= y_1, \\ x_2 + x_4 &= y_2. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Из последних двух уравнений имеем

$$x_3 = -x_1 - x_2 + y_1, \quad x_4 = -x_2 + y_2, \quad (6.2)$$

т.е. $P(C)x = (x_1, x_2, -x_1 - x_2, -x_2)$.

Пусть

$$x_1(0) = a, \quad x_1(1) = b, \quad x_2(0) = c, \quad x_2(1) = d. \quad (6.3)$$

Проверим выполнение условий теоремы. Условие k_1) выполняется, так как система (5.14) – это система

$$\begin{aligned} (1 + 2\varepsilon)v_1 + v_2 &= 0, \\ v_1 - \varepsilon v_2 &= 0. \end{aligned}$$

При всех $\varepsilon > 0$ получаем $v_1 = v_2 = 0$, т.е. $v = 0$.

Выполнение условия k_2) проверено в примере 1.

Система (5.7)

$$\begin{aligned} -2\lambda v_1 + v_3 + w &= 0, \\ -2\lambda v_2 - v_3 + (1 - \lambda)v_4 - w &= 0 \end{aligned}$$

при $\lambda \neq 0$ имеет решение v_1, v_3 для любых v_2, v_4, w , а при $\lambda = 0$ имеет решение v_2, v_3 для любых v_1, v_4, w .

Таким образом, все условия теоремы выполнены, следовательно, система (6.1) с условиями (6.3) является управляемой.

Построим $x(t)$ и $u(t)$.

Подставив (6.2) в (6.1), получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 - \dot{x}_1 - \dot{x}_2 &= 2x_1 + u, \\ -\dot{y}_1 + \dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \dot{y}_2 - \dot{x}_2 &= 2x_2 + y_2 - x_2 - u, \end{aligned}$$

эквивалентную следующей системе:

$$u = \dot{y}_1 - \dot{x}_1 - \dot{x}_2 - 2x_1, \quad (6.4)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 - 2x_1 + \dot{y}_2 - y_2. \quad (6.5)$$

Для $x_2(t)$ имеем краевые условия, полученные из (6.3) и (6.5):

$$\begin{aligned} x_2(0) &= c, & x_2(1) &= d, \\ \dot{x}_2(0) &= -c - 2a + \dot{y}_2(0) - y_2(0), & \dot{x}_2(1) &= -d - 2b + \dot{y}_2(1) - y_2(1). \end{aligned} \quad (6.6)$$

В качестве $x_2(t)$ можно взять, например, функцию

$$x_2(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3.$$

Коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ находятся из условий (6.6).

Затем из соотношения (6.5) вычисляется функция $x_1(t)$:

$$x_1(t) = \frac{1}{2}(\dot{y}_2 - y_2 - \dot{x}_2 - x_2).$$

Далее, по формулам (6.2) находятся $x_3(t)$ и $x_4(t)$ и по формуле (6.4) строится $u(t)$.

В этом примере

$$C^+ y = (0, 0, y_1, y_2), \quad EC^+ y = (y_1, -y_1 + y_2)$$

и для управляемости системы необходима дифференцируемость функций y_1 и y_2 .

В следующем примере этого не требуется.

ПРИМЕР 3. Пусть

$$\begin{aligned} E &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, & B &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & C &= (0 \quad 2 \quad 1), \\ x &= (x_1, x_2, x_3), & u &= (u), & y &= 3\sqrt{t}, & t &\in [0, 1], \\ x_1(0) &= 0, & x_1(1) &= 4, & x_2(0) &= 0, & x_2(1) &= -1. \end{aligned}$$

Здесь

$$C^+y = (0, 0, y), \quad EC^+y = 0,$$

поэтому дифференцируемости функции $y(t)$ не требуется. Условия $k_1)$ – $k_3)$ выполняются, система управляема и

$$u = 9\sqrt{t} - 10t\sqrt{t}, \quad x_1 = 8t\sqrt{t}, \quad x_2 = -2t\sqrt{t}, \quad x_3 = 3\sqrt{t} + 4t\sqrt{t}.$$

Заметим, что и $x_3(t)$ в этом примере не имеет производной при $t = 0$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. Д'Анжело, *Линейные системы с переменными параметрами. Анализ и синтез*, Машиностроение, М., 1974.
- [2] С. А. Минюк, А. В. Метельский, “Конструктивное исследование идентифицируемости и управляемости линейных стационарных алгебро-дифференциальных систем”, *Дифференц. уравнения*, **42**:11 (2006), 1524–1531.
- [3] A. Ilchmann, V. Mehrmann, “A behavioral approach to time-varying linear systems. Part 2: Descriptor systems”, *SIAM J. Control Optim.*, **44**:5 (2005), 1748–1765.
- [4] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, М., 1988.
- [5] С. П. Зубова, Е. В. Раецкая, Лё Хай Чунг, “О полиномиальных решениях линейной стационарной системы управления”, *Автомат. и телемех.*, **11** (2008), 41–47.
- [6] М. Уонэм, *Линейные многомерные системы управления: геометрический подход*, Наука, М., 1980.
- [7] L. Dai, *Singular Control Systems*, Lecture Notes in Control and Inform. Sci., **118**, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [8] С. П. Зубова, “Решение однородной задачи Коши для уравнения с нётеровым оператором при производной”, *Докл. РАН*, **428**:4 (2009), 444–446.

С. П. Зубова

Воронежский государственный университет

E-mail: spzubova@mail.ru

Поступило

17.02.2010