Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ш. Кожегельдинов, Ал-хусайново уравнение $x^4 + y^2 = z^2$, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 3, 365–377

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm7835>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 12:03:35

Ал-хусайново уравнение $x^4 + y^2 = z^2$

С. Ш. Кожегельдинов

Исследуется множество всех натуральных решений уравнения $x^4 + y^2 = z^2$. Получены общие формулы, описывающие все такие решения, и доказана их эквивалентность.

Библиография: 15 названий.

1. Напомним [1]–[12], что *ал-хусайновым уравнением* называется диофантово уравнение

$$x^4 + y^2 = z^2, \quad (1)$$

где

$$x, y, z \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Ал-хусайново уравнение (1) с условием (2) привлекало внимание выдающихся математиков ал-Хусайна (X век нашей эры), Л. Е. Диксона (1874–1954), А. О. Гельфонда (1906–1968), В. Серпинского (1882–1969) и других математиков.

Геометрически задача решения ал-хусайнова уравнения (1) с условием (2) или, что то же самое,

$$(x^2)^2 + y^2 = z^2,$$

где $x, y, z \in \mathbb{N}$, формулируется как задача нахождения прямоугольных треугольников, у которых один из катетов является квадратом натурального числа.

“Легко доказать существование бесконечного множества основных пифагоровых треугольников, у которых один из катетов является квадратом натурального числа. Легко доказать существование бесконечного множества основных пифагоровых треугольников, четный катет каждого из которых является квадратом.” [2].

“Все решения уравнения $(2x)^4 + y^2 = z^2$ в положительных, попарно взаимно простых числах x, y, z имеют вид

$$x = ab, \quad y = |4a^4 - b^4|, \quad z = 4a^4 + b^4,$$

где $a > 0, b > 0, (a, b) = 1, b \equiv 1 \pmod{2}$.” [7].

2. Известно [4], что древнегреческие математики, более того, древние вавилоняне владели формулами

$$x = a^2 - b^2, \quad y = 2ab, \quad z = a^2 + b^2 \quad (*_1)$$

для решения пифагорова уравнения $x^2 + y^2 = z^2$. Основываясь на формулах (*₁), Ибн ал-Хусайн решает ал-хусайново уравнение

$$t^4 + y^2 = z^2. \quad (*_2)$$

Это он с успехом делает, решая систему уравнений $x = t^2$, $x^2 + y^2 = z^2$, эквивалентную уравнению (*₂). Оба способа решения, предложенные Ибн ал-Хусайном, основаны на общей формуле решения последнего уравнения этой системы. Поэтому, полагая

$$x = 2ab, \quad y = a^2 - b^2, \quad z = a^2 + b^2,$$

либо

$$x = a^2 - b^2, \quad y = 2ab, \quad z = a^2 + b^2,$$

он ищет a и b , при которых соответственно либо $2ab = t^2$, либо $a^2 - b^2 = t^2$. В первом случае он полагает $a = p^2$, $b = q^2/2$ и тогда

$$t = pq, \quad x = p^2 q^2, \quad y = p^4 - \frac{q^4}{4}, \quad z = p^4 + \frac{q^4}{4}.$$

Во втором случае для решения уравнения $a^2 = b^2 + t^2$ он снова применяет общую формулу (*₁).

3. У ал-хусайнова уравнения (1) с условием (2) имеются решения, например,

$$\begin{aligned} 2^4 + 3^2 &= 5^2, & 4^4 + 63^2 &= 65^2, & 3^4 + 40^2 &= 41^2, & 6^4 + 77^2 &= 85^2, \\ 12^4 + 17^2 &= 145^2, & 3^4 + 12^2 &= 15^2, & 4^4 + 30^2 &= 34^2, & 12^4 + 165^2 &= 219^2, \\ 12^4 + 130^2 &= 194^2, & 21^4 + 112^2 &= 455^2. \end{aligned}$$

Все эти решения ал-хусайнова уравнения (1) с условием (2) удовлетворяют условию $(x^2, y, z)_{\deg 2} = 1$, которое означает то, что x^2 , y , z являются взаимно простыми числами степени 2. Из этих 10 решений первые пять удовлетворяют также условию $(x, y, z) = 1$, которое является традиционным и, следовательно, являются основными решениями.

Каждое из остальных пяти решений ал-хусайнова уравнения (1) с условием (2) также является основным, ибо, не нарушив структуру рассматриваемого уравнения, невозможно обе части каждого из соответствующих равенств сократить на натуральное число, большее единицы. Поэтому для неоднородного уравнения $x^4 + y^2 = z^2$ вместо традиционного лучше, пожалуй, дать следующее общее определение основного решения.

Решение $\langle x, y, z \rangle$ ал-хусайнова уравнения (1) с условием (2) называется *основным*, если $(x^2, y, z)_{\deg 2} = 1$, т.е. если x^2 , y , z – взаимно простые числа степени 2.

Аналогично дается определение основного решения любого диофантового уравнения того же типа.

Решения $\langle 2; 3; 5 \rangle$, $\langle 4; 63; 65 \rangle$, $\langle 3; 40; 41 \rangle$, $\langle 6; 77; 85 \rangle$, $\langle 12; 17; 145 \rangle$ ал-хусайнова уравнения (1) с условием (2) являются основными не только в смысле традиционного определения основного решения, но и в смысле нового определения. Поэтому, естественно, имеет место следующее важное включение:

$$\begin{aligned} &\{ \langle x; y; z \rangle \mid x, y, z \in \mathbb{N}, (x, y, z) = 1, x^4 + y^2 = z^2 \} \\ &\subset \{ \langle x; y; z \rangle \mid x, y, z \in \mathbb{N}, (x^2, y, z)_{\deg 2} = 1, x^4 + y^2 = z^2 \}. \end{aligned}$$

4. Напомним, что целая часть числа α обозначается $[\alpha]$ и что *каноническим разложением* целого числа $a > 1$ называется представление a в виде $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, где $k, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ – натуральные числа, $p_1, p_2, \dots, p_k$ – попарно различные простые числа. Пусть n – натуральное число. Тогда, напомним [11]–[13], число вида

$$p_1^{[\alpha_1/n]} p_2^{[\alpha_2/n]} \cdots p_k^{[\alpha_k/n]}$$

называется *целым положительным числом a степени n* и обозначается через $a_{\deg n}$. Таким образом, по определению

$$a_{\deg n} = p_1^{[\alpha_1/n]} p_2^{[\alpha_2/n]} \cdots p_k^{[\alpha_k/n]}.$$

Если $a = 777600000$, $n = 2$, то

$$a_{\deg 2} = (777600000)_{\deg 2} = (2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^5)_{\deg 2} = 2^{[10/2]} \cdot 3^{[5/2]} \cdot 5^{[5/2]} = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 7200.$$

Наибольший общий делитель степени n чисел $a_1, a_2, \dots, a_m$ обозначается символом $(a_1, a_2, \dots, a_m)_{\deg n}$. Очевидно, что $(a_1, a_2, \dots, a_m)_{\deg n} = ((a_1, a_2, \dots, a_m))_{\deg n}$. Здесь внутренние скобки обозначают обычный наибольший общий делитель чисел $a_1, a_2, \dots, a_m$. Наибольший общий делитель $(a_1, a_2, \dots, a_m)_{\deg n}$ называется *арифметической функцией степени n* тогда и только тогда, когда с его помощью можно получить, по крайней мере, одну общую формулу, дающую параметризацию всех натуральных решений хотя бы для одного конкретного диофантова уравнения. Арифметическую функцию степени n называют, короче, *арифметической функцией*. Если $n = 1$, то арифметическая функция называется *простейшей*. Если же, $n > 1$, то она называется арифметической функцией более сложной природы.

5. Постановка задачи. Пусть $\{\langle x, y, z \rangle \mid x, y, z \in \mathbb{N}, x^4 + y^2 = z^2\}$ – множество всех решений ал-хусайнова уравнения (1) с условием (2). Требуется найти общую формулу, описывающую все эти решения. При этом ставится задача, чтобы число целых параметров, входящих в такую общую формулу, не превышала трех.

Для решения поставленной задачи используются идеи, методы и результаты работ [9]–[15].

6. Имеет место следующее утверждение

ТЕОРЕМА. Каждая из следующих эквивалентных формул:

$$x = k \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\Delta_1}, \quad y = k^2 \frac{2\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)}{\Delta_1^2}, \quad z = k^2 \frac{\alpha^4 - \beta^4}{\Delta_1^2}, \quad (3)$$

где

$$k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \quad \alpha > \beta, \quad (\alpha, \beta) = 1, \quad \Delta_1 = ((\alpha^2 - \beta^2)(2, \alpha - \beta))_{\deg 2}, \quad (4)$$

или

$$x = k \frac{2\gamma\delta}{\Delta_2}, \quad y = k^2 \frac{2\gamma\delta(\gamma^2 - \delta^2)}{\Delta_2^2}, \quad z = k^2 \frac{2\gamma\delta(\gamma^2 + \delta^2)}{\Delta_2^2}, \quad (5)$$

где

$$k, \gamma, \delta \in \mathbb{N}, \quad \gamma > \delta, \quad (\gamma, \delta) = 1, \quad \Delta_2 = (2\gamma\delta(2, \gamma - \delta))_{\deg 2}, \quad (6)$$

или

$$\begin{aligned} x &= k \frac{2\alpha\beta/\Delta + 2\alpha\beta^2/\Delta^2}{\Delta_1}, & y &= k^2 \frac{(2\alpha\beta/\Delta + 2\alpha\beta^2/\Delta^2)(\alpha + 2\alpha\beta/\Delta)}{\Delta_1^2}, \\ z &= k^2 \frac{(2\alpha\beta/\Delta + 2\alpha\beta^2/\Delta^2)(\alpha + 2\alpha\beta/\Delta + 2\alpha\beta^2/\Delta^2)}{\Delta_1^2}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \quad \Delta = (2\alpha)_{\deg 2}, \quad (\alpha, \beta) = 1, \quad (8)$$

 α – удвоенный квадрат или нечетный квадрат,

$$\Delta_1 = \left(\left(\frac{2\alpha\beta}{\Delta} + \frac{2\alpha\beta^2}{\Delta^2} \right) \left(\alpha, \frac{2\alpha\beta}{\Delta}, \frac{2\alpha\beta^2}{\Delta^2} \right) \right)_{\deg 2},$$

или

$$\begin{aligned} x &= k \frac{(\gamma - \delta)(3\delta - \gamma)}{\Delta_2}, & y &= k^2 \frac{2\delta(\gamma - \delta)(\gamma - 2\delta)(3\delta - \gamma)}{\Delta_2^2}, \\ z &= k^2 \frac{(\gamma - \delta)(3\delta - \gamma)(\gamma^2 - 4\gamma\delta + 5\delta^2)}{\Delta_2^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$k, \gamma, \delta \in \mathbb{N}, \quad 2\delta < \gamma < 3\delta, \quad (\gamma, \delta) = 1, \quad \Delta_2 = ((\gamma - \delta)(3\delta - \gamma)(2, \gamma - \delta))_{\deg 2}, \quad (10)$$

или

$$\begin{aligned} x &= k \frac{2\beta(\alpha - 2\beta)}{\Delta_1}, & y &= k^2 \frac{2\beta(\alpha - \beta)(\alpha - 2\beta)(3\beta - \alpha)}{\Delta_1^2}, \\ z &= k^2 \frac{2\beta(\alpha - 2\beta)(\alpha^2 - 4\alpha\beta + 5\beta^2)}{\Delta_1^2}, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \quad 2\beta < \alpha < 3\beta, \quad (\alpha, \beta) = 1, \quad \Delta_1 = (2\beta(\alpha - 2\beta)(2, \alpha - \beta))_{\deg 2}, \quad (12)$$

или

$$\begin{aligned} x &= k \frac{\gamma + 2\gamma\delta/\Delta}{\Delta_2}, & y &= k^2 \frac{(\gamma + 2\gamma\delta/\Delta)(2\gamma\delta/\Delta + 2\gamma\delta^2/\Delta^2)}{\Delta_2^2}, \\ z &= k^2 \frac{(\gamma + 2\gamma\delta/\Delta)(\gamma + 2\gamma\delta/\Delta + 2\gamma\delta^2/\Delta^2)}{\Delta_2^2}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$k, \gamma, \delta \in \mathbb{N}, \quad \Delta = (2\gamma)_{\deg 2}, \quad (\gamma, \delta) = 1, \quad (14)$$

 γ – удвоенный квадрат или нечетный квадрат,

$$\Delta_2 = \left(\left(\frac{\gamma + 2\gamma\delta}{\Delta} \right) \left(\gamma, \frac{2\gamma\delta}{\Delta}, \frac{2\gamma\delta^2}{\Delta^2} \right) \right)_{\deg 2},$$

или

$$x = k \frac{2\alpha\beta}{\Delta_1}, \quad y = k^2 \frac{2\beta(\alpha^4 - \beta^2)}{\Delta_1^2}, \quad z = k^2 \frac{2\beta(\alpha^4 + \beta^2)}{\Delta_1^2}, \quad (15)$$

zde

$$k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \quad \alpha^2 > \beta, \quad (\alpha^2, \beta)_{\deg 2} = 1, \quad \Delta_1 = (2\beta(2\beta(\alpha^2, \beta), \alpha^4 - \beta^2))_{\deg 2}, \quad (16)$$

 $u\mathcal{U}u$

$$\begin{aligned} x &= k \frac{2\gamma(\gamma^2 - \delta)}{\Delta_2}, & y &= k^2 \frac{2\delta(\gamma^2 - \delta)(2\gamma^2 - \delta)}{\Delta_2^2}, \\ z &= k^2 \frac{2(\gamma^2 - \delta)(2\gamma^4 - 2\gamma^2\delta + \delta^2)}{\Delta_2^2}, \end{aligned} \quad (17)$$

 zde

$$k, \gamma, \delta \in \mathbb{N}, \quad \gamma^2 > \delta, \quad (\gamma^2, \delta)_{\deg 2} = 1, \quad \Delta_2 = (2(\gamma^2 - \delta)(2\gamma^2(\gamma^2, \delta), \delta^2))_{\deg 2}, \quad (18)$$

 $u\mathcal{U}u$

$$x = k \frac{2\alpha\beta}{\Delta_3}, \quad y = k^2 \frac{2\alpha(\alpha^2 - \beta^4)}{\Delta_3^2}, \quad z = k^2 \frac{2\alpha(\alpha^2 + \beta^4)}{\Delta_3^2}, \quad (19)$$

 zde

$$k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \quad \alpha > \beta^2, \quad (\alpha, \beta^2)_{\deg 2} = 1, \quad \Delta_3 = (2\alpha(2\alpha(\alpha, \beta^2), \alpha^2 - \beta^4))_{\deg 2}, \quad (20)$$

 $u\mathcal{U}u$

$$\begin{aligned} x &= k \frac{2\delta(\gamma + \delta^2)}{\Delta_4}, & y &= k^2 \frac{2\gamma(\gamma + \delta^2)(\gamma + 2\delta^2)}{\Delta_4^2}, \\ z &= k^2 \frac{2(\gamma + \delta^2)(\gamma^2 + 2\gamma\delta^2 + 2\delta^4)}{\Delta_4^2}, \end{aligned} \quad (21)$$

 zde

$$k, \gamma, \delta \in \mathbb{N}, \quad (\gamma, \delta^2)_{\deg 2} = 1, \quad \Delta_4 = (2(\gamma + \delta^2)(\gamma^2, 2\delta^2(\gamma, \delta^2)))_{\deg 2}, \quad (22)$$

 $u\mathcal{U}u$

$$\begin{aligned} x &= k \frac{\alpha(\alpha + 2\beta)}{\Delta_1}, & y &= k^2 \frac{2\alpha\beta(\alpha + \beta)(\alpha + 2\beta)}{\Delta_1^2}, \\ z &= k^2 \frac{\alpha(\alpha + 2\beta)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\beta^2)}{\Delta_1^2}, \end{aligned} \quad (23)$$

 zde

$$k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \quad (\alpha, \beta) = 1, \quad \Delta_1 = (\alpha(\alpha + 2\beta)(2, \alpha))_{\deg 2}, \quad (24)$$

 $u\mathcal{U}u$

$$\begin{aligned} x &= k \frac{2\delta(\gamma + \delta)}{\Delta_2}, & y &= k^2 \frac{2\gamma\delta(\gamma + \delta)(\gamma + 2\delta)}{\Delta_2^2}, \\ z &= k^2 \frac{2\delta(\gamma + \delta)(\gamma^2 + 2\gamma\delta^2 + 2\delta^2)}{\Delta_2^2}, \end{aligned} \quad (25)$$

 zde

$$k, \gamma, \delta \in \mathbb{N}, \quad (\gamma, \delta) = 1, \quad \Delta_2 = (2\delta(\gamma + \delta)(2, \gamma))_{\deg 2}, \quad (26)$$

или

$$\begin{aligned} x &= k \frac{2\alpha\beta/\Delta - 2\alpha\beta^2/\Delta^2}{\Delta_1}, & y &= k^2 \frac{(2\alpha\beta/\Delta - 2\alpha\beta^2/\Delta^2)(2\alpha\beta/\Delta - \alpha)}{\Delta_1^2}, \\ z &= k^2 \frac{(2\alpha\beta/\Delta - 2\alpha\beta^2/\Delta^2)(\alpha - 2\alpha\beta/\Delta + 2\alpha\beta^2/\Delta^2)}{\Delta_1^2}, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \quad \Delta = (2\alpha)_{\deg 2}, \quad \beta < \Delta < 2\beta, \quad (\alpha, \beta) = 1, \quad (28)$$

 α – удвоенный квадрат или нечетный квадрат,

$$\Delta_1 = \left(\left(\frac{2\alpha\beta}{\Delta} - \frac{2\alpha\beta^2}{\Delta^2} \right) \left(\alpha, \frac{2\alpha\beta}{\Delta}, \frac{2\alpha\beta^2}{\Delta^2} \right) \right)_{\deg 2},$$

или

$$\begin{aligned} x &= k \frac{2\gamma(2\delta - \gamma)}{\Delta_2}, & y &= k^2 \frac{2\lambda\delta(\gamma - \delta)(2\delta - \gamma)}{\Delta_2^2}, \\ z &= k^2 \frac{\gamma(2\delta - \gamma)(\gamma^2 - 2\gamma\delta + 2\delta^2)}{\Delta_2^2}, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$k, \gamma, \delta \in \mathbb{N}, \quad \delta < \gamma < 2\delta, \quad (\gamma, \delta) = 1, \quad \Delta_2 = (\gamma(2\delta - \gamma)(2, \gamma))_{\deg 2}, \quad (30)$$

или

$$\begin{aligned} x &= k \frac{2\beta(\alpha - \beta)}{\Delta_1}, & y &= k^2 \frac{2\alpha\beta(\alpha - \beta)(2\beta - \alpha)}{\Delta_1^2}, \\ z &= k^2 \frac{2\beta(\alpha - \beta)(\alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\beta^2)}{\Delta_1^2}, \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \quad \beta < \alpha < 2\beta, \quad (\alpha, \beta) = 1, \quad \Delta_1 = (2\beta(\alpha - \beta)(2, \alpha))_{\deg 2}, \quad (32)$$

или

$$\begin{aligned} x &= k \frac{2\gamma\delta/\Delta - \gamma}{\Delta_2}, & y &= k^2 \frac{(2\gamma\delta/\Delta - \gamma)(2\gamma\delta/\Delta - 2\gamma\delta^2/\Delta^2)}{\Delta_2^2}, \\ z &= k^2 \frac{(2\gamma\delta/\Delta - \gamma)(\gamma - 2\gamma\delta/\Delta + 2\gamma\delta^2/\Delta^2)}{\Delta_2^2}, \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$k, \gamma, \delta \in \mathbb{N}, \quad \Delta = (2\gamma)_{\deg 2}, \quad \delta < \Delta < 2\delta, \quad (\gamma, \delta) = 1, \quad (34)$$

 γ – удвоенный квадрат или нечетный квадрат,

$$\Delta_2 = \left(\left(\frac{2\gamma\delta}{\Delta} - \gamma \right) \left(\gamma, \frac{2\gamma\delta}{\Delta}, \frac{2\gamma\delta^2}{\Delta^2} \right) \right)_{\deg 2},$$

является общей формулой всех решений ал-хусайнова уравнения (1) с условием (2). При этом каждое такое решение ал-хусайнова уравнения (1) с условием (2) определяется каждым из этих способов однозначно.

Здесь и в дальнейшем для удобства совокупность формул вида (3) называется формулой.

ПРИМЕР 1. Одно и тоже решение $(63; 3780; 5481)$ ал-хусайнова уравнения (1) с условием (2) получается:

- из формулы (3) с условием (4) при $k = 3, \alpha = 5, \beta = 2$;
- из формулы (5) с условием (6) при $k = 3, \gamma = 7, \delta = 3$;
- из формулы (7) с условием (8) при $k = 3, \alpha = 8, \beta = 3$;
- из формулы (9) с условием (10) при $k = 3, \gamma = 12, \delta = 5$;
- из формулы (11) с условием (12) при $k = 3, \alpha = 17, \beta = 7$;
- из формулы (13) с условием (14) при $k = 3, \gamma = 9, \delta = 2$;
- из формулы (15) с условием (16) при $k = 3, \alpha = 7, \beta = 21$;
- из формулы (17) с условием (18) при $k = 3, \gamma = 7, \delta = 28$;
- из формулы (19) с условием (20) при $k = 3, \alpha = 21, \beta = 3$;
- из формулы (21) с условием (22) при $k = 3, \gamma = 12, \delta = 3$;
- из формулы (23) с условием (24) при $k = 3, \alpha = 3, \beta = 2$;
- из формулы (25) с условием (26) при $k = 3, \gamma = 4, \delta = 3$;
- из формулы (27) с условием (28) при $k = 3, \alpha = 50, \beta = 7$;
- из формулы (29) с условием (30) при $k = 3, \gamma = 7, \delta = 5$;
- из формулы (31) с условием (32) при $k = 3, \alpha = 10, \beta = 7$;
- из формулы (33) с условием (34) при $k = 3, \gamma = 49, \delta = 5$.

7. Доказательство теоремы. Оно состоит из доказательства ее первой части и доказательства эквивалентности формул (3)–(33) (нечетные номера) при выполнении условий (4)–(34) (четные номера) соответственно.

Воспользуемся методом автора. Из (1) с условием (2) следует, что

$$\frac{y}{z - x^2} = \frac{z + x^2}{y},$$

где $x, y, z \in \mathbb{N}$, $z > x^2$ и $y < z + x^2$. Положим, что

$$\frac{y}{z - x^2} = \frac{z + x^2}{y} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad (*)_3$$

где

$$\alpha, \beta \in \mathbb{N}, \quad \alpha > \beta, \quad (\alpha, \beta) = 1. \quad (*)_4$$

Из $(*)_3$ с условием $(*)_4$ следует, что

$$y = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2} x^2, \quad z = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2} x^2, \quad (*)_5$$

где

$$\alpha, \beta \in \mathbb{N}, \quad (\alpha, \beta) = 1. \quad (*)_6$$

Положим

$$x = k \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\Delta_1}, \quad (*)_7$$

где

$$k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \quad \alpha > \beta, \quad (\alpha, \beta) = 1, \quad \Delta_1 = ((\alpha^2 - \beta^2)(2, \alpha - \beta))_{\deg 2}. \quad (*)_8$$

Из $(*_5)$ с условием $(*_6)$ и из $(*_7)$ с условием $(*_8)$ получается формула (3) с условием (4), которая является общей формулой всех решений ал-хусайнова уравнения (1) с условием (2).

Без особого труда можно убедиться в том, что значения x, y, z из формулы (3) с условием (4) действительно удовлетворяют ал-хусайнову уравнению (1) с условием (2). При этом нетрудно заметить, что $(x^2, y, z)_{\deg 2} = k$, где $k \in \mathbb{N}$. И так как $(\alpha, \beta) = 1$, каждое решение $\langle x, y, z \rangle$ ал-хусайнова уравнения (1) с условием (2) определяется этим способом однозначно. Первая часть теоремы доказана.

Докажем теперь эквивалентность формул (3)–(33) (нечетные номера). Схема доказательства такова: (3) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow \dots \Rightarrow$ (31) $\Rightarrow$ (33) $\Rightarrow$ (3).

Формула (5) следует из формулы (3) при $k = k$,

$$\alpha = \frac{\gamma + \delta}{(2, \gamma - \delta)}, \quad \beta = \frac{\gamma - \delta}{(2, \gamma - \delta)},$$

где $k, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$, $\gamma > \delta$, $(\gamma, \delta) = 1$. Здесь и в дальнейшем очевидные преобразования опускаем.

Формула (7) следует из формулы (5) при $k = k$,

$$\gamma = \frac{\Delta + \beta}{(\Delta, \beta)}, \quad \delta = \frac{\beta}{(\Delta, \beta)},$$

где $k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $\Delta = (2\alpha)_{\deg 2}$, $(\alpha, \beta) = 1$, α – удвоенный квадрат или нечетный квадрат.

Формула (9) следует из формулы (7) при $k = k$,

$$\alpha = \frac{2(\gamma - 2\delta)^2}{(2, \gamma - \delta)}, \quad \beta = \frac{3\delta - \gamma}{(2, \gamma - \delta)},$$

где $k, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$, $2\delta < \gamma < 3\delta$, $(\gamma, \delta) = 1$. Формула (11) следует из формулы (9) при $k = k$,

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{(2, \alpha - \beta)}, \quad \delta = \frac{\alpha - \beta}{(2, \alpha - \beta)},$$

где $k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $2\beta < \alpha < 3\beta$, $(\alpha, \beta) = 1$. Формула (13) следует из формулы (11) при $k = k$,

$$\alpha = \frac{3\Delta + 4\delta}{(\Delta, 2\delta)}, \quad \beta = \frac{\Delta + 2\delta}{(\Delta, 2\delta)},$$

где $k, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$, $\Delta = (2\gamma)_{\deg 2}$, $(\gamma, \delta) = 1$, γ – удвоенный квадрат или нечетный квадрат.

Формула (15) следует из формулы (13) при

$$\gamma = \frac{2\beta^2}{((2\beta^2, (\alpha^2 - \beta^2)^2)_{\deg 2})^2}, \quad \delta = \frac{\alpha^2 - \beta}{(2\beta^2, (\alpha^2 - \beta^2)^2)_{\deg 2}},$$

где $k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $\alpha^2 > \beta$, $(\alpha^2, \beta)_{\deg 2} = 1$. Формула (17) следует из формулы (15) при $k = k$, $\alpha = \gamma$, $\beta = \gamma^2 - \delta$, где $k, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$, $\gamma^2 > \delta$, $(\gamma^2, \delta)_{\deg 2}$. Формула (19) следует из формулы (17) при $k = k$,

$$\gamma = \frac{\alpha}{(\alpha^2, \alpha\beta^2)_{\deg 2}}, \quad \delta = \frac{\alpha^2 - \alpha\beta^2}{((\alpha^2, \alpha\beta^2)_{\deg 2})^2},$$

где $k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $\alpha > \beta^2$, $(\alpha, \beta^2)_{\deg 2} = 1$. Формула (21) следует из формулы (19) при $k = k$, $\alpha = \gamma + \delta^2$, $\beta = \delta$ где $k, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$, $(\gamma, \delta^2)_{\deg 2}$. Формула (23) следует из формулы (21) при $k = k$,

$$\gamma = \frac{2\alpha\beta}{((\alpha^2, 2\alpha)_{\deg 2})^2}, \quad \delta = \frac{\alpha}{(\alpha^2, 2\alpha)_{\deg 2}},$$

где $k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $(\alpha, \beta) = 1$. Формула (25) следует из формулы (23) при $k = k$,

$$\alpha = \frac{2\delta}{(2, \gamma)}, \quad \beta = \frac{\gamma}{(2, \gamma)},$$

где $k, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$, $(\gamma, \delta) = 1$. Формула (27) следует из формулы (25) при $k = k$,

$$\gamma = \frac{2\beta - \Delta}{(\Delta, \beta)}, \quad \delta = \frac{\Delta - \beta}{(\Delta, \beta)},$$

где $k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $\Delta = (2\alpha)_{\deg 2}$, $\beta < \Delta < 2\beta$, $(\alpha, \beta) = 1$, α – удвоенный квадрат или нечетный квадрат. Формула (29) следует из формулы (27) при $k = k$,

$$\alpha = \frac{2\delta^2}{(2, \gamma)}, \quad \beta = \frac{\gamma}{(2, \gamma)},$$

где $k, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$, $\delta < \gamma < 2\delta$, $(\gamma, \delta) = 1$. Формула (31) следует из формулы (29) при $k = k$,

$$\gamma = \frac{2\beta}{(2, \alpha)}, \quad \delta = \frac{\alpha}{(2, \alpha)},$$

где $k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $\beta < \alpha < 2\beta$, $(\alpha, \beta) = 1$. Формула (33) следует из формулы (31) при $k = k$,

$$\alpha = \frac{2\delta}{(\Delta, 2\delta)}, \quad \beta = \frac{\Delta}{(\Delta, 2\delta)},$$

где $k, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$, $\Delta = (2\gamma)_{\deg 2}$, $\delta < \Delta < 2\delta$, $(\gamma, \delta) = 1$, γ – удвоенный квадрат или нечетный квадрат. Наконец, формула (3) следует из формулы (33) при $k = k$,

$$\gamma = \frac{(\alpha + \beta)^2}{(2, \alpha - \beta)}, \quad \delta = \frac{\alpha(2(2, \alpha - \beta))_{\deg 2}}{(2, \alpha - \beta)},$$

где $k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $\alpha > \beta$, $(\alpha, \beta) = 1$.

Таким образом, при выполнении условий (4)–(34) (четные номера) соответственно общие формулы (3)–(33) (нечетные номера) всех решений ал-хусайнова уравнения (1) с условием (2) эквивалентны. Теорема доказана полностью.

8. Из доказанной теоремы очевидным образом вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Каждая из следующих эквивалентных формул:

$$x = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\Delta_1}, \quad y = \frac{2\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)}{\Delta_1^2}, \quad z = \frac{\alpha^4 - \beta^4}{\Delta_1^2}, \quad (35)$$

где

$$\alpha, \beta \in \mathbb{N}, \quad \alpha > \beta, \quad (\alpha, \beta) = 1, \quad \Delta_1 = ((\alpha^2 - \beta^2)(2, \alpha - \beta))_{\deg 2}, \quad (36)$$

или

$$x = \frac{2\gamma\delta}{\Delta_2}, \quad y = \frac{2\gamma\delta(\gamma^2 - \delta^2)}{\Delta_2^2}, \quad z = \frac{2\gamma\delta(\gamma^2 + \delta^2)}{\Delta_2^2}, \quad (37)$$

где

$$\gamma, \delta \in \mathbb{N}, \quad \gamma > \delta, \quad (\gamma, \delta) = 1, \quad \Delta_2 = (2\gamma\delta(2, \gamma - \delta))_{\deg 2}, \quad (38)$$

или

$$x = \frac{2\alpha\beta/\Delta + 2\alpha\beta^2/\Delta^2}{\Delta_1}, \quad y = \frac{(2\alpha\beta/\Delta + 2\alpha\beta^2/\Delta^2)(\alpha + 2\alpha\beta/\Delta)}{\Delta_1^2}, \quad (39)$$

$$z = \frac{(2\alpha\beta/\Delta + 2\alpha\beta^2/\Delta^2)(\alpha + 2\alpha\beta/\Delta + 2\alpha\beta^2/\Delta^2)}{\Delta_1^2},$$

где

$$\alpha, \beta \in \mathbb{N}, \quad \Delta = (2\alpha)_{\deg 2}, \quad (\alpha, \beta) = 1, \quad (40)$$

 α – удвоенный квадрат или нечетный квадрат,

$$\Delta_1 = \left(\left(\frac{2\alpha\beta}{\Delta} + \frac{2\alpha\beta^2}{\Delta^2} \right) \left(\alpha, \frac{2\alpha\beta}{\Delta}, \frac{2\alpha\beta^2}{\Delta^2} \right) \right)_{\deg 2},$$

или

$$x = \frac{(\gamma - \delta)(3\delta - \gamma)}{\Delta_2}, \quad y = \frac{2\delta(\gamma - \delta)(\gamma - 2\delta)(3\delta - \gamma)}{\Delta_2^2}, \quad (41)$$

$$z = \frac{(\gamma - \delta)(3\delta - \gamma)(\gamma^2 - 4\gamma\delta + 5\delta^2)}{\Delta_2^2},$$

где

$$\gamma, \delta \in \mathbb{N}, \quad 2\delta < \gamma < 3\delta, \quad (\gamma, \delta) = 1, \quad \Delta_2 = ((\gamma - \delta)(3\delta - \gamma)(2, \gamma - \delta))_{\deg 2}, \quad (42)$$

или

$$x = \frac{2\beta(\alpha - 2\beta)}{\Delta_1}, \quad y = \frac{2\beta(\alpha - \beta(\alpha - 2\beta))(3\beta - \alpha)}{\Delta_1^2}, \quad (43)$$

$$z = \frac{2\beta(\alpha - \beta)(\alpha^2 - 4\alpha\beta + 5\beta^2)}{\Delta_1^2},$$

где

$$\alpha, \beta \in \mathbb{N}, \quad 2\beta < \alpha < 3\beta, \quad (\alpha, \beta) = 1, \quad \Delta_1 = (2\beta(\alpha - 2\beta)(2, \alpha - \beta))_{\deg 2}, \quad (44)$$

или

$$x = \frac{\gamma + 2\gamma\delta/\Delta}{\Delta_2}, \quad y = \frac{(\gamma + 2\gamma\delta/\Delta)(2\gamma\delta/\Delta + 2\gamma\delta^2/\Delta^2)}{\Delta_2^2}, \quad (45)$$

$$z = \frac{(\gamma + 2\gamma\delta/\Delta)(\gamma + 2\gamma\delta/\Delta + 2\gamma\delta^2/\Delta^2)}{\Delta_2^2},$$

где

$$\gamma, \delta \in \mathbb{N}, \quad \Delta = (2\gamma)_{\deg 2}, \quad (\gamma, \delta) = 1, \quad (46)$$

 γ – удвоенный квадрат или нечетный квадрат,

$$\Delta_2 = \left(\left(\gamma + \frac{2\gamma\delta}{\Delta} \right) \left(\gamma, \frac{2\gamma\delta}{\Delta}, \frac{2\gamma\delta^2}{\Delta^2} \right) \right)_{\deg 2},$$

$u\mathbb{N}u$

$$x = \frac{2\alpha\beta}{\Delta_1}, \quad y = \frac{2\beta(\alpha^4 - \beta^2)}{\Delta_1^2}, \quad z = \frac{2\beta(\alpha^4 + \beta^2)}{\Delta_1^2}, \quad (47)$$

 $z\partial e$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{N}, \quad \alpha^2 > \beta, \quad (\alpha^2, \beta)_{\deg 2} = 1, \quad \Delta_1 = (2\beta(2\beta(\alpha^2, \beta), \alpha^4 - \beta^2))_{\deg 2}, \quad (48)$$

 $u\mathbb{N}u$

$$x = \frac{2\gamma(\gamma^2 - \delta)}{\Delta_2}, \quad y = \frac{2\delta(\gamma^2 - \delta)(2\gamma^2 - \delta)}{\Delta_2^2}, \quad z = \frac{2(\gamma^2 - \delta)(2\gamma^4 - 2\gamma^2\delta + \delta^2)}{\Delta_2^2}, \quad (49)$$

 $z\partial e$

$$\gamma, \delta \in \mathbb{N}, \quad \gamma^2 > \delta, \quad (\gamma^2, \delta)_{\deg 2} = 1, \quad \Delta_2 = (2(\gamma^2 - \delta)(2\gamma^2(\gamma^2, \delta), \delta^2))_{\deg 2}, \quad (50)$$

 $u\mathbb{N}u$

$$x = \frac{2\alpha\beta}{\Delta_3}, \quad y = \frac{2\alpha(\alpha^2 - \beta^4)}{\Delta_3^2}, \quad z = \frac{2\alpha(\alpha^2 + \beta^4)}{\Delta_3^2}, \quad (51)$$

 $z\partial e$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{N}, \quad \alpha > \beta^2, \quad (\alpha, \beta^2)_{\deg 2} = 1, \quad \Delta_3 = (2\alpha(2\alpha(\alpha, \beta^2), \alpha^2 - \beta^4))_{\deg 2}, \quad (52)$$

 $u\mathbb{N}u$

$$x = \frac{2\delta(\gamma + \delta^2)}{\Delta_4}, \quad y = \frac{2\gamma(\gamma + \delta^2)(\gamma + 2\delta^2)}{\Delta_4^2}, \quad z = \frac{2(\gamma + \delta^2)(\gamma^2 + 2\gamma\delta + 2\delta^4)}{\Delta_4^2}, \quad (53)$$

 $z\partial e$

$$\gamma, \delta \in \mathbb{N}, \quad (\gamma, \delta^2)_{\deg 2} = 1, \quad \Delta_4 = (2(\gamma + \delta^2)(\gamma^2, 2\delta^2(\gamma, \delta^2)))_{\deg 2}, \quad (54)$$

 $u\mathbb{N}u$

$$x = \frac{\alpha(\alpha + 2\beta)}{\Delta_1}, \quad y = \frac{2\alpha\beta(\alpha + \beta)(\alpha + 2\beta)}{\Delta_1^2}, \quad (55)$$

$$z = \frac{\alpha(\alpha + 2\beta)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\beta^2)}{\Delta_1^2},$$

 $z\partial e$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{N}, \quad (\alpha, \beta) = 1, \quad \Delta_1 = (\alpha(\alpha + 2\beta)(2, \alpha))_{\deg 2}, \quad (56)$$

 $u\mathbb{N}u$

$$x = \frac{2\delta(\gamma + \delta)}{\Delta_2}, \quad y = \frac{2\gamma\delta(\gamma + \delta)(\gamma + 2\delta)}{\Delta_2^2}, \quad z = \frac{2\delta(\gamma + \delta)(\gamma^2 + 2\gamma\delta + 2\delta^2)}{\Delta_2^2}, \quad (57)$$

 $z\partial e$

$$\gamma, \delta \in \mathbb{N}, \quad (\gamma, \delta) = 1, \quad \Delta_2 = (2\delta(\gamma + \delta)(2, \gamma))_{\deg 2}, \quad (58)$$

 $u\mathbb{N}u$

$$x = \frac{2\alpha\beta/\Delta - 2\alpha\beta^2/\Delta^2}{\Delta_1}, \quad y = \frac{(2\alpha\beta/\Delta - 2\alpha\beta^2/\Delta^2)(2\alpha\beta/\Delta - \alpha)}{\Delta_1^2}, \quad (59)$$

$$z = \frac{(2\alpha\beta/\Delta - 2\alpha\beta^2/\Delta^2)(\alpha - 2\alpha\beta/\Delta + 2\alpha\beta^2/\Delta^2)}{\Delta_1^2},$$

где

$$\alpha, \beta \in \mathbb{N}, \quad \Delta = (2\alpha)_{\deg 2}, \quad \beta < \Delta < 2\beta, \quad (\alpha, \beta) = 1, \quad (60)$$

 α – удвоенный квадрат или нечетный квадрат,

$$\Delta_1 = \left(\left(\frac{2\alpha\beta}{\Delta} - \frac{2\alpha\beta^2}{\Delta^2} \right) \left(\alpha, \frac{2\alpha\beta}{\Delta}, \frac{2\alpha\beta^2}{\Delta^2} \right) \right)_{\deg 2},$$

или

$$x = \frac{\gamma(2\delta - \gamma)}{\Delta_2}, \quad y = \frac{2\gamma\delta(\gamma - \delta)(2\delta - \gamma)}{\Delta_2^2}, \quad z = \frac{\gamma(2\delta - \gamma)(\gamma^2 - 2\gamma\delta + 2\delta^2)}{\Delta_2^2}, \quad (61)$$

где

$$\gamma, \delta \in \mathbb{N}, \quad \delta < \gamma < 2\delta, \quad (\gamma, \delta) = 1, \quad \Delta_2 = (\gamma(2\delta - \gamma)(2, \gamma))_{\deg 2}, \quad (62)$$

или

$$x = \frac{2\beta(\alpha - \beta)}{\Delta_1}, \quad y = \frac{2\alpha\beta(\alpha - \beta)(2\beta - \alpha)}{\Delta_1^2}, \quad z = \frac{2\beta(\alpha - \beta)(\alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\beta^2)}{\Delta_1^2}, \quad (63)$$

где

$$\alpha, \beta \in \mathbb{N}, \quad \beta < \alpha < 2\beta, \quad (\alpha, \beta) = 1, \quad \Delta_1 = (2\beta(\alpha - \beta)(2, \alpha))_{\deg 2}, \quad (64)$$

или

$$x = \frac{2\gamma\delta/\Delta + \gamma}{\Delta_2}, \quad y = \frac{(2\gamma\delta/\Delta - \gamma)(2\gamma\delta/\Delta - 2\gamma\delta^2/\Delta^2)}{\Delta_2^2},$$

$$z = \frac{(2\gamma\delta/\Delta - \gamma)(\gamma - 2\gamma\delta/\Delta + 2\gamma\delta^2/\Delta^2)}{\Delta_2^2}, \quad (65)$$

где

$$\gamma, \delta \in \mathbb{N}, \quad \Delta = (2\gamma)_{\deg 2}, \quad \delta < \gamma < 2\delta, \quad (\gamma, \delta) = 1, \quad (66)$$

 γ – удвоенный квадрат или нечетный квадрат,

$$\Delta_2 = \left(\left(\frac{2\gamma\delta}{\Delta} - \gamma \right) \left(\gamma, \frac{2\gamma\delta}{\Delta}, \frac{2\gamma\delta^2}{\Delta^2} \right) \right)_{\deg 2},$$

является общей формулой всех основных решений ал-хусайнова уравнения (1) с условием (2). При этом каждое такое решение определяется каждым из этих способов однозначно.

ПРИМЕР 2. Одно и то же основное решение $\langle 21; 420; 609 \rangle$ ал-хусайнова уравнения (1) с условием (2) и с условием $(x^2, y, z)_{\deg 2} = 1$ получается:

- из формулы (35) с условием (36) при $\alpha = 5, \beta = 2$;
- из формулы (37) с условием (38) при $\gamma = 7, \delta = 3$;
- из формулы (39) с условием (40) при $\alpha = 8, \beta = 3$;
- из формулы (41) с условием (42) при $\gamma = 12, \delta = 5$;
- из формулы (43) с условием (44) при $\alpha = 17, \beta = 7$;
- из формулы (45) с условием (46) при $\gamma = 9, \delta = 2$;

- из формулы (47) с условием (48) при $\alpha = 7, \beta = 21$;
- из формулы (49) с условием (50) при $\gamma = 7, \delta = 28$;
- из формулы (51) с условием (52) при $\alpha = 21, \beta = 3$;
- из формулы (53) с условием (54) при $\gamma = 12, \delta = 3$;
- из формулы (55) с условием (56) при $\alpha = 3, \beta = 2$;
- из формулы (57) с условием (58) при $\gamma = 4, \delta = 3$;
- из формулы (59) с условием (60) при $\alpha = 50, \beta = 7$;
- из формулы (61) с условием (62) при $\gamma = 7, \delta = 5$;
- из формулы (63) с условием (64) при $\alpha = 10, \beta = 7$;
- из формулы (65) с условием (66) при $\gamma = 49, \delta = 5$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. О. Гельфонд, *Решение уравнений в целых числах*, Популярные лекции по математике, 8, Наука, М., 1978.
- [2] В. Серпинский, *Пифагоровы треугольники*, Учпедгиз, М., 1959.
- [3] А. Бейкер, *Введение в теорию чисел*, Вышэйшая школа, Минск, 1995.
- [4] И. Г. Башмакова, Е. И. Славутин, *История диофантова анализа от Диофанта до Ферма*, Наука, М., 1984.
- [5] Диофант Александрийский, *Арифметика и книга о многоугольных числах*, Наука, М., 1974.
- [6] П. Ферма, *Исследования по теории чисел и диофантову анализу*, Наука, М., 1992.
- [7] L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, v. 2: *Diophantine Analysis*, Carnegie Institution of Washington, New York, 1920.
- [8] L. J. Mordell, *Diophantine Equations*, Pure Appl. Math., 30, Academic Press, New York, 1969.
- [9] С. Ш. Кожегельдинов, *Некоторые элементы теории диофантовых уравнений в упражнениях и задачах*, Прометей, М., 1993.
- [10] С. Ш. Кожегельдинов, “Об основных героновых треугольниках”, *Матем. заметки*, 55:2 (1994), 72–79.
- [11] С. Ш. Кожегельдинов, “Об эквивалентности общих формул основных решений одного диофантова уравнения”, *III Республиканская конференция, посвященная памяти профессора Т. И. Аманова (1923–1978)*, Сборник докладов. Часть 2, КарГУ, Караганда, 1998, 129–135.
- [12] С. Ш. Кожегельдинов, *Некоторые классические диофантовы уравнения от трех и более переменных: в 5-ти томах*, т. 1, Новосибирск, 2002; т. 2, Алматы, 2004; т. 3, Алматы, 2006; т. 4, Семей, 2008; т. 5, Семей, 2008.
- [13] С. Ш. Кожегельдинов, “О решении уравнений в натуральных числах”, *Межвузовская конференция, посвященная 70-летию со дня рождения профессора Т. И. Аманова*, Тезисы докладов, СГПИ им. Шакарима, Семипалатинск, 1993, 17–19.
- [14] С. Ш. Кожегельдинов, “Об исследовании арифметических функций”, *II Международная конференция “Алгебраические, вероятностные, геометрические, комбинаторные и функциональные методы в теории чисел”*, Тезисы докладов, ВГУ, Воронеж, 1995, 85.
- [15] С. Ш. Кожегельдинов, “Об одном диофантовом уравнении”, *III Международная конференция “Современные проблемы теории чисел и ее приложения”*, Тезисы докладов, ТГПУ, Тула, 1996, 77.

С. Ш. КожегельдиновСемипалатинский государственный педагогический институт
им. ШакаримаE-mail: sagdulla@ok.kz

Поступило

27.04.2009