Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Вдовин, С. С. Рублева, О гарантированной точности процедуры динамического восстановления управления с ограниченной вариацией в системе, зависящей от него линейно, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 3, 337–358

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm7837>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 15:59:39

О гарантированной точности процедуры динамического восстановления управления с ограниченной вариацией в системе, зависящей от него линейно

А. Ю. Вдовин, С. С. Рублева

В работе получена верхняя оценка точности модификации предложенного Ю. С. Осиповым и А. В. Кряжимским конечношагового динамического алгоритма восстановления неизвестного управления в динамической системе по неточной информации о ее траектории. Устанавливается, что в случае, когда управление обладает ограниченной вариацией, а подпространство образа матрицы коэффициентов при нем имеет постоянную размерность, асимптотический порядок в метрике пространства $L_1[a, b]$ его точности относительно погрешности на входе равен $1/2$.

Библиография: 15 названий.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу моделирования управления $v(\cdot)$, реализующего состояние динамической системы, которая описывается дифференциальным уравнением вида

$$x'(t) = g(t, x(t)) + f(t, x(t))v(t), \quad x(a) = x_a, \quad t \in [a, b]. \quad (1.1)$$

Здесь $g(\cdot)$, $f(\cdot)$ – отображения $[a, b] \times \mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^m$ (с евклидовой нормой $|\cdot|$) и в $\mathbb{R}^{m \times q}$ – пространство матриц размерности $m \times q$ (со спектральной нормой $\|\cdot\|$), соответственно. *Допустимыми управлениями* назовем измеримые на $[a, b]$ функции $v(\cdot)$ со значениями из компакта $Q \subset \mathbb{R}^q$, а движение системы $x(\cdot)$, порожденное таким управлением, трактуется как решение задачи (1.1) в смысле Каратеодори. В связи с этим в дальнейшем, там где это необходимо, равенства и неравенства считаются выполненными почти всюду.

Функция $\xi(\cdot): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется *измерением с уровнем погрешности h* , если она удовлетворяет неравенству

$$|\xi(t) - x(t)| \leq h,$$

а множество всех таких измерений обозначается $\Xi_h(x(\cdot))$.

Очевидно, что в общем случае задача восстановления $v(\cdot)$ по измерению из $\Xi_h(x(\cdot))$ является некорректной, поскольку множество допустимых управлений,

порождающих движение $x(\cdot)$, может оказаться неоднородным. Чтобы алгоритм восстановления обладал свойствами устойчивости относительно измерительной ошибки h , часто в качестве искомого решения принимается управление $v_*(\cdot)$, обладающее минимальной нормой в $L_2[a, b]$ среди всех порождающих $x(\cdot)$ допустимых управлений.

Для решения этой задачи Осиповым и Кряжимским [1] был предложен динамический метод, основанный на идее стабилизации аналога функционала Тихонова [2] с помощью процедуры экстремального сдвига, введенного Красовским в теории позиционных дифференциальных игр [3].

Суть метода [4] состоит в следующем. Пусть $\alpha(\cdot), \Delta(\cdot): (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение, компакт Q выпуклый, а индекс T означает транспонирование. В начальный момент (либо заранее) считаются заданными разбиение $[a, b]: a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ ($\max_{0 \leq i \leq n-1} (t_{i+1} - t_i) \leq \Delta(h)$), начальное состояние модели $w_h(t_0) = \xi(t_0)$ и величина u_0 , равная проекции нуля на Q .

На каждом промежутке разбиения $[t_i, t_{i+1})$ формируются

а) значение в точке t_{i+1} системы модели, функционирующей по правилу

$$w_h(t) = w_h(t_i) + (g(t_i, \xi(t_i)) + f(t_i, \xi(t_i))u_i)(t - t_i); \quad (1.2)$$

б) значение u_i – результат проекции на Q вектора

$$f^T(t_i, \xi(t_i)) \frac{\xi(t_i) - w_h(t_i)}{\alpha(h)},$$

на котором достигается минимум функционала

$$\beta(u) = 2\langle w_h(t_i) - \xi(t_i), f(t_i, \xi(t_i))u \rangle + \alpha(h)|u|^2. \quad (1.3)$$

При известной величине ошибки h измерения состояния системы описанный алгоритм, далее обозначаемый D_h , ставит в соответствие измерению из $\Xi_h(x(\cdot))$ кусочно-постоянное приближение $u_h(\cdot)$ для управления $v_*(\cdot)$, где $u_h(t) = u_i$ при $t \in [t_i, t_{i+1})$.

Если операция проектирования на компакт Q требует использования конечного числа арифметических операций (например, когда Q является шаром или многогранником), то восстановление неизвестного управления при помощи D_h при достаточном быстродействии вычислительного устройства может быть реализовано в режиме реального времени. Поэтому алгоритм D_h относится к классу конечношаговых динамических алгоритмов.

Пусть

$$\rho_p(h) = \sup_{\xi(\cdot) \in \Xi_h(x(\cdot))} \|u_h(\cdot) - v_*(\cdot)\|_{L_p[a, b]}.$$

Если $\lim_{h \rightarrow 0} \rho_p(h) = 0$, то алгоритм называется $L_p[a, b]$ -регуляризирующим.

Имеет место

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 [5]. Пусть $x(t)$ при $t \in [a, b]$ принадлежит компакт X из $\mathbb{R}^m$; функции $g(t, x)$, $f(t, x)$ при $(t, x(t)) \in [a, b] \times X$ липшицевы по совокупности переменных с общей константой L ; измерение $\xi(\cdot)$ принадлежит $\Xi_h(x(\cdot))$; параметры $\alpha(h)$, $\Delta(h)$ стремятся к нулю вместе с h согласованно в том смысле, что $\lim_{h \rightarrow 0} (h + \Delta(h))/\alpha(h) = 0$. Тогда D_h $L_2[a, b]$ -регуляризирующий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $\nu_1(h) (\nu_2(h)) : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ называется *нижней (верхней) оценкой точности алгоритма* D_h в пространстве $L_p[a, b]$, если существует положительное число h_* такое, что для всех $h \in (0, h_*)$, $\xi(\cdot) \in \Xi_h(x(\cdot))$ имеют место неравенства

$$\nu_1(h) \leq \rho_p(h) \leq \nu_2(h),$$

а $\gamma(h) : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – *порядком точности алгоритма* D_h в $L_p[a, b]$, если существуют положительные C_i , $i = 1, 2$, такие, что

$$C_1 h^{\gamma(h)} \leq \rho_p(h) \leq C_2 h^{\gamma(h)}.$$

Число $\varkappa$ называется *асимптотическим порядком точности алгоритма* D_h в $L_p[a, b]$, если существует $\lim_{h \rightarrow 0} \gamma(h) = \varkappa$.

В [6] были получены оценки точности D_h в пространстве $L_2[a, b]$ в предположении, что $f(t, x(t))$ обратима, а единственное в силу этого допустимое управление $v(\cdot)$, обладает на $[a, b]$ ограниченной вариацией $V_a^b v(\cdot)$.

В [7] была предложена модификация упомянутого алгоритма для случая неограниченных управлений, для которой в [8] были получены гарантированные оценки точности при тех же условиях, что в [6], но для постоянной, возможно вырожденной, $f(\cdot, x(\cdot))$. Заметим, что в обеих процитированных работах оценки получены при условии постоянства образов матрицы коэффициентов при управлении, при этом их порядок оказался равным $1/4$.

Ниже предлагается подход, позволяющий получить асимптотический порядок точности в $L_1[a, b]$ для модификации D_h в случае, когда $f(\cdot, x(\cdot))$ меняется во времени и обладает постоянным, но возможно неполным рангом вдоль движения, при этом подпространство ее образов может меняться (поворачиваться). Подчеркнем, что полученный в настоящей работе асимптотический порядок равен $1/2$.

УСЛОВИЕ (*). Помимо условий утверждения 1 будем дополнительно предполагать, что для $t \in [a, b]$

- 1) ранг $(f(t, x(t)))$ равен r ;
- 2) вариация $V_a^b v_*(\cdot)$ ограничена;
- 3) точные нижние грани по t расстояний между границами компактов Q и X и, соответственно, $v_*(t)$ и $x(t)$ положительны.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие (*) влечет существование положительных констант M_f , M_g , M_v таких, что $\|f(\cdot)\| \leq M_f$, $|g(\cdot)| \leq M_g$, $|v(\cdot)| \leq M_v$.

Модификация $D_h^{(1)}$ алгоритма D_h , о которой шла речь в аннотации, состоит в отказе от процедуры проектирования на компакт Q точки минимума функционала (1.3); последнее влечет уменьшение арифметических операций, выполняемых на каждом шаге, при этом приближение для $u_h(\cdot)$ при $t \in [t_i, t_{i+1})$ определяется правилом

$$u_i = f^T(t_i, \xi(t_i)) \frac{\xi(t_i) - w_h(t_i)}{\alpha(h)}. \quad (1.4)$$

Фиксируя $\alpha(h)$, рассмотрим в качестве идеализированного приближения неизвестного управления функцию $u_0(\cdot)$, задаваемую формулой

$$u_0(t) = \frac{f^T(t, x(t))(x(t) - w_0(t))}{\alpha(h)}, \quad (1.5)$$

числитель правой части которой можно трактовать как предельный случай (1.4) при $h = 0$, с системой – моделью вида

$$w'_0(t) = g(t, x(t)) + A(t, x(t)) \frac{x(t) - w_0(t)}{\alpha(h)}, \quad w_0(a) = x_a, \quad (1.6)$$

где

$$A(t, x(t)) = f(t, x(t))f^T(t, x(t)). \quad (1.7)$$

Реально $u_0(\cdot)$ на основании измерения из $\Xi_h(x(\cdot))$ построено быть не может, но нам в дальнейшем понадобятся лишь оценки $|u_0(t) - v_*(t)|$ и нормы разности $u_0(\cdot)$ и $u_h(\cdot)$, которые позволят определить асимптотический порядок точности $D_h^{(1)}$ в $L_1[a, b]$.

2. Используемые определения и утверждения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [9]. Матрица H^+ называется *псевдообратной* для матрицы H , если выполняются условия

$$HH^+H = H, \quad H^+ = UH^* = H^*V,$$

где U, V – некоторые матрицы, а H^* – сопряженная к H .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2 [9], [10]. Для любой матрицы H имеют место равенства

$$H = HH^T(H^T)^+, \quad HH^+ = (HH^+)^T, \quad (H^T)^+ = (H^+)^T.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3 [10]. Пусть $B \in \mathbb{R}^{m \times q}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times l}$. Тогда $(BC)^+ = C^+B^+$, если $\text{rank}(B) = \text{rank}(C)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4 [11]. Пусть $H(\cdot)$ отображает $[a, b]$ в $\mathbb{R}^{m \times m}$ и имеет постоянный ранг. Тогда для $\tau_i \in [a, b]$, $i = 1, 2$, таких, что $\|H(\tau_1) - H(\tau_2)\| \leq 1/\|H^+(\tau_1)\|$ справедливо неравенство

$$\|H^+(\tau_1) - H^+(\tau_2)\| \leq \frac{3\|H^+(\tau_1)\|^2\|H(\tau_1) - H(\tau_2)\|}{1 - \|H^+(\tau_1)\|\|H(\tau_1) - H(\tau_2)\|}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 5 [9], [11]. Пусть $t \in [a, b]$, а матрица $A(t, x(t))$ определяется равенством (1.7). Тогда ее собственные числа $\lambda_k(t)$, $k = 1, \dots, m$, неотрицательны:

$$\lambda_1(t) \geq \dots \geq \lambda_r(t) > 0, \quad \lambda_{r+1}(t) = \dots = \lambda_m(t) = 0,$$

$$\text{а } \|A^+(t, x(t))\| \leq 1/\lambda_r(t).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 6 [9]. Пусть матрица $H \in \mathbb{R}^{m \times m}$ эрмитова, $R_0(H)$ – ее ядро, а $R_1(H)$ – образ. Тогда $\mathbb{R}^m = R_0(H) \oplus R_1(H)$, где $\oplus$ – знак прямой суммы.

Далее оператор проектирования $\mathcal{P}_k(H)$ на подпространство $R_k(H)$ будем отождествлять с соответствующей ему в фиксированном базисе $\mathbb{R}^m$ матрицей $P_k(H)$, $k = 0, 1$. Из утверждения 6 следуют первые два пункта следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Пусть $k = 0, 1$, а матрица $P_k(A(t, x(t)))$ является проектором на $R_k(A(t, x(t)))$. Тогда

$$1) \quad P_0(A(t, x(t))) + P_1(A(t, x(t))) = E;$$

- 2) проекторы $P_0(A(t, x(t))), P_1(A(t, x(t)))$ ортогональны;
- 3) $P_k^2(A(t, x(t))) = P_k(A(t, x(t)))$ [10];
- 4) $P_1(A(t, x(t))) = A(t, x(t))A^+(t, x(t))$ [10].

УТВЕРЖДЕНИЕ 8 [12]. Пусть $k = 0, 1, t, \tau \in [a, b]$, а ортогональные проекционные операторы $P_k(\cdot)$ непрерывны в смысле нормы операторов и имеют на $[a, b]$ ограниченную вариацию. Тогда существует унитарный, непрерывный по каждой переменной оператор $U(\tau, t)$ поворота пространства $\mathbb{R}^m$ такой, что

- 1) $U(t, t) = E$;
- 2) $U^{-1}(\tau, t) = U(t, \tau)$;
- 3) $P_k(\tau)U(\tau, t) = U(\tau, t)P_k(t)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9 [12]. Если выполнены условия утверждения 8, операторы $P_k(\tau)$ в точке τ дифференцируемы по норме, то этим свойством обладает и оператор $U(\tau, t)$, при этом

$$U'_\tau(\tau, t) = \sum_{k=0}^1 P'_k(\tau)P_k(\tau)U(\tau, t).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку проекторы $P_k(A(\tau, x(\tau)))$ удовлетворяют условию Липшица, производная оператора $U'_\tau(\tau, t)$ (утверждение 9) существует и ограничена почти всюду.

Пусть промежуток J (конечный или бесконечный) такой, что $t \geq 0$.

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dy}{dt} = D(t)y(t), \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^m, \quad t \in J, \quad D(t) \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad (2.1)$$

решение которой существует.

Пусть для некоторого $t_0 \in J$ пространство $\mathbb{R}^m$ распадается в прямую сумму замкнутых (в нашем случае ортогональных) подпространств

$$\mathbb{R}^m = R_0(t_0) \oplus R_1(t_0).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [13]. Уравнение (2.1) называется *э-дихотомичным* на интервале J , если существуют положительные константы N_0, N_1, ν_0, ν_1 такие, что выполнены следующие условия:

- а) решения $y_0(t)$ с начальным условием из $R_0(D(t_0))$ подчиняются оценке

$$|y_0(t)| \leq N_0 e^{-\nu_0(t-s)} |y_0(s)|, \quad s, t \in J, \quad t \leq s;$$

- б) решения $y_1(t)$ с начальным условием из $R_1(D(t_0))$ подчиняются оценке

$$|y_1(t)| \leq N_1 e^{-\nu_1(t-s)} |y_1(s)|, \quad s, t \in J, \quad s \leq t.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 [13]. Уравнения

$$\frac{dx_k}{dt} = D_k(t)x_k, \quad t \in J, \quad k = 1, 2,$$

называются *кинематически подобными* на интервале J , если между совокупностями решений первого и второго уравнений можно установить взаимно однозначное соответствие $x_2(t) = G(t)x_1(t)$, $t \in J$, где $G(\cdot)$ – равномерно ограниченный оператор, обладающий равномерно ограниченным обратным $\|G(t)\| \leq q_1$, $\|G^{-1}(t)\| \leq q_2$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 10 [13]. Пусть $D_i(\cdot) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $i = 1, 2$, таковы, что при $t \in J$

а) собственные числа $D_1(t)$ отличны от нуля;

б) уравнение

$$\frac{dx}{dt} = D_1(t)x, \quad t \in J, \quad (2.2)$$

ε -дихотомично с положительными константами N_k, ν_k , $k = 0, 1$, при этом соответствующие подпространства есть линейные оболочки собственных векторов, отвечающих положительным и отрицательным собственным числам матрицы $D_1(\cdot)$;

в) проекторы P_k , $k = 0, 1$, на указанные в пункте б) подпространства коммутируют с $D_1(\cdot)$;

г) для любых $t, t + 1 \in J$ $\int_t^{t+1} \|D_2(s) ds\| \leq M_D$.

Тогда, существует h_D такое, что для всех $h \in (0, h_D)$

1) уравнение

$$\frac{dx}{dt} = [D_1(t) + \alpha(h)D_2(t)]x \quad (2.3)$$

ε -дихотомично в тех же подпространствах, что и (2.2);

2) существует единственное преобразование кинематического подобия $x(t) = G(t)y(t)$ такое, что (2.3) приводится к квазидиогональному виду

$$\frac{dy}{dt} = \left[D_1(t) + \alpha(h) \sum_{k=0}^1 P_k D_2(t) G(t) P_k \right] y,$$

при этом $G(t) = E + S(t)$, где

$$\|S(\cdot)\| \leq \frac{8\alpha(h)}{1 - e^{-(\nu_1 - \nu_0)}} N_0 N_1,$$

E – единичная матрица.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11 [13]. Пусть $t \in [a, b]$, $D(t)$ – симметричная матрица, $\lambda_m(t)$ и $\lambda_M(t)$ – ее минимальное и максимальное собственные числа соответственно. Тогда для любого решения $y(\cdot)$ уравнения (2.1) при $\tau \in [0, t]$ справедливы оценки

$$|y(t)| e^{-\int_{\tau}^t \lambda_M(s) ds} \leq |y(\tau)| \leq |y(t)| e^{-\int_{\tau}^t \lambda_m(s) ds}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 12 [6]. Пусть $p(\cdot), g(\cdot): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^q$, $p(\cdot)$ и $\bigvee_a^b g(\cdot)$ ограничены. Тогда, если для всех $t \in [a, b]$

$$\left| \int_a^t p(\tau) d\tau \right| \leq \varepsilon, \quad |g(t)| \leq G,$$

то

$$\left| \int_a^t g^T(\tau) p(\tau) d\tau \right| \leq \varepsilon \left(\bigvee_a^b g(\cdot) + G \right).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 13 [14]. Пусть $\delta > 0$, функция $q(\cdot)$ обладает ограниченной вариацией на $[a - \delta, b]$. Тогда

$$\int_a^b \bigvee_{t-\delta}^t q(\cdot) dt \leq \delta \bigvee_a^b q(\cdot).$$

3. Оценка нормы разности $u_0(\cdot)$ и $v_*(\cdot)$. Решение задачи Коши (1.6) имеет вид

$$w_0(t) = Y_h(t, a)x_a + \int_a^t Y_h(t, \tau) \left(g(\tau, x(\tau)) + \frac{1}{\alpha(h)} A(\tau, x(\tau))x(\tau) \right) d\tau; \quad (3.1)$$

здесь $Y_h(t, \tau)$ – решение уравнения

$$[Y_h(t, \tau)]'_\tau = \frac{1}{\alpha(h)} Y_h(t, \tau) A(\tau, x(\tau)) \quad (3.2)$$

с начальным условием $Y_h(t, t) = E$.

Проводя интегрирования по частям в пределах от a до t в правой части (3.1) с учетом (1.1) и (3.2), приходим к виду

$$\frac{x(t) - w_0(t)}{\alpha(h)} = \frac{1}{\alpha(h)} \int_a^t Y_h(t, \tau) f(\tau, x(\tau)) v(\tau) d\tau.$$

Отсюда в силу утверждения 2 имеем

$$\frac{x(t) - w_0(t)}{\alpha(h)} = \frac{1}{\alpha(h)} \int_a^t Y_h(t, \tau) A(\tau, x(\tau)) (f^T(\tau, x(\tau)))^+ v(\tau) d\tau.$$

В силу определения 2 и свойств оператора проектирования $P_1(A(\cdot))$ (пункт 4) утверждения 7) последнее равенство принимает вид

$$\frac{x(t) - w_0(t)}{\alpha(h)} = \frac{1}{\alpha(h)} \int_a^t Y_h(t, \tau) P_1(A(\tau, x(\tau))) A(\tau, x(\tau)) F(\tau) d\tau, \quad (3.3)$$

где $F(\tau) = (f^T(\tau, x(\tau)))^+ v(\tau)$.

Подвергнем обе части (3.3) воздействию $P_1(A(t, x(t)))$:

$$P_1(A(t, x(t))) \frac{x(t) - w_0(t)}{\alpha(h)} = \frac{1}{\alpha(h)} \int_a^t Y_h^{(1)}(t, \tau) P_1(A(\tau, x(\tau))) A(\tau, x(\tau)) F(\tau) d\tau, \quad (3.4)$$

где $Y_h^{(1)}(t, \tau) = P_1(A(t, x(t))) Y_h(t, \tau)$ является решением дифференциального уравнения (3.2) с начальным условием $Y_h^{(1)}(t, t) = P_1(A(t, x(t)))$.

Отметим некоторые свойства функций, стоящих под знаком интеграла в (3.4).

Определение функции ограниченной вариации и утверждение 4 с очевидностью влекут справедливость следующего результата

ЛЕММА 1. Пусть $t \in [a, b]$, вариация $v(\cdot)$ на этом промежутке ограничена, а ранг матрицы $f(t, x(t))$ постоянен. Тогда $\bigvee_a^b F(\cdot)$ ограничена.

Далее займемся оценкой $\|Y_h^{(1)}(t, \tau) P_1(A(\tau, x(\tau)))\|$. В силу свойств операторов $P_k(A(t, x(t)))$, $k = 0, 1$ (утверждение 8), существует ограниченный, обратимый оператор поворота $U(\tau, t)$. Тогда функция

$$Z(t, \tau) = Y_h(t, \tau) U(\tau, t) \quad (3.5)$$

является решением дифференциального уравнения с большим параметром:

$$Z'_\tau(t, \tau) = \frac{1}{\alpha(h)} Z(t, \tau) A_t^{(1)}(\tau, x(\tau)) + Z(t, \tau) U^{-1}(\tau, t) U'_\tau(\tau, t), \quad Z(t, t) = E, \quad (3.6)$$

где $A_t^{(1)}(\tau, x(\tau)) = U^{-1}(\tau, t) A(\tau, x(\tau)) U(\tau, t)$.

ЛЕММА 2. Пусть $t, \tau \in [a, b]$. Тогда проекторы $P_k(A(t, x(t)))$, $k = 0, 1$, коммутируют с матрицей $A_t^{(1)}(\tau, x(\tau))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу утверждений 2, 7 (пункта 4)) и симметричности матрицы $A(\tau, x(\tau))$ (1.7) имеют место равенства

$$\begin{aligned} P_1(A(\tau, x(\tau)))A(\tau, x(\tau)) &= A(\tau, x(\tau))A^+(\tau, x(\tau))A(\tau, x(\tau)) = A(\tau, x(\tau))(A^T(\tau, x(\tau)))^+A^T(\tau, x(\tau)) \\ &= A(\tau, x(\tau))(A(\tau, x(\tau))A^+(\tau, x(\tau)))^T = A(\tau, x(\tau))A(\tau, x(\tau))A^+(\tau, x(\tau)) \\ &= A(\tau, x(\tau))P_1(A(\tau, x(\tau))). \end{aligned}$$

Далее согласно пункту 1) утверждения 7

$$\begin{aligned} P_0(A(\tau, x(\tau)))A(\tau, x(\tau)) &= (E - P_1(A(\tau, x(\tau))))A(\tau, x(\tau)) \\ &= A(\tau, x(\tau)) - A(\tau, x(\tau))P_1(A(\tau, x(\tau))) \\ &= A(\tau, x(\tau))P_0(A(\tau, x(\tau))), \end{aligned}$$

т.е. $A(\tau, x(\tau))$ коммутирует с $P_k(A(\tau, x(\tau)))$, $k = 0, 1$. Тогда на основании утверждения 8 имеем

$$\begin{aligned} A_t^{(1)}(\tau, x(\tau))P_k(A(t, x(t))) &= U^{-1}(\tau, t)A(\tau, x(\tau))U(\tau, t)P_k(A(t, x(t))) \\ &= U^{-1}(\tau, t)A(\tau, x(\tau))P_k(A(\tau, x(\tau)))U(\tau, t) \\ &= U^{-1}(\tau, t)P_k(A(\tau, x(\tau)))A(\tau, x(\tau))U(\tau, t) \\ &= P_k(A(t, x(t)))U^{-1}(\tau, t)A(\tau, x(\tau))U(\tau, t) \\ &= P_k(A(t, x(t)))A_t^{(1)}(\tau, x(\tau)). \end{aligned}$$

Следовательно, операторы $P_k(A(t, x(t)))$ коммутируют с $A_t^{(1)}(\tau, x(\tau))$. Лемма доказана.

Поскольку $A(\tau, x(\tau))$ и $A_t^{(1)}(\tau, x(\tau))$ подобны, их собственные числа совпадают [9]. В силу непрерывности $A_t^{(1)}(\tau, x(\tau))$ существует $\lambda > 0$ такое, что для всех $t \in [a, b]$ минимальное положительное собственное число $\lambda_r(t)$ удовлетворяет неравенству $\lambda_r(t) \geq \lambda > 0$.

Пусть

$$A_t^{(2)}(\tau, x(\tau)) = A_t^{(1)}(\tau, x(\tau)) - \alpha(h)E, \quad B(t, \tau) = U^{-1}(\tau, t)U'_\tau(\tau, t) + E. \quad (3.7)$$

Собственные числа $A_t^{(2)}(\tau, x(\tau))$ получаются из соответствующих собственных чисел $A_t^{(1)}(\tau, x(\tau))$ при помощи их сдвига влево на величину $\alpha(h)$. Тогда при достаточно малых h таких, что $\alpha(h) < \lambda/2$, все собственные числа $A_t^{(2)}(\tau, x(\tau))$ будут отличны от нуля, при этом отрицательные соответствуют нулевым собственным числам матрицы $A_t^{(1)}(\tau, x(\tau))$, а положительные в силу выбора h оказываются превосходящими $\lambda/2$.

Задача (3.6) с учетом (3.7) принимает вид

$$Z'_\tau(t, \tau) = \frac{1}{\alpha(h)} Z(t, \tau)A_t^{(2)}(\tau, x(\tau)) + Z(t, \tau)B(t, \tau), \quad Z(t, t) = E.$$

Введение новой переменной $s = (t - \tau)/\alpha(h)$ переводит последнее уравнение с большим параметром к уравнению с “медленным временем”

$$\begin{aligned} Z'_s(t, t - \alpha(h)s) &= -Z(t, t - \alpha(h)s)A_t^{(2)}(t - \alpha(h)s, x(t - \alpha(h)s)) \\ &\quad - \alpha(h)Z(t, t - \alpha(h)s)B(t, t - \alpha(h)s), \\ Z(t, t) &= E, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $0 \leq s \leq (t - a)/\alpha(h)$.

Рассмотрим соответствующее (3.8) “усеченное уравнение”

$$\frac{d\tilde{Z}(t, t - \alpha(h)s)}{ds} = -\tilde{Z}(t, t - \alpha(h)s)A_t^{(2)}(t - \alpha(h)s, x(t - \alpha(h)s)). \quad (3.9)$$

Пусть

$$\tilde{Z}_i(t, t - \alpha(h)s) = \tilde{Z}(t, t - \alpha(h)s)P_i(A(t, x(t))), \quad i = 0, 1.$$

В силу (3.7) и леммы 2 матрица $A_t^{(2)}(t - \alpha(h)s, x(t - \alpha(h)s))$ коммутирует с проекторами $P_i(A(t, x(t)))$, поэтому уравнение (3.9) распадается на систему независимых уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{Z}_i(t, t - \alpha(h)s)}{ds} &= -\tilde{Z}_i(t, t - \alpha(h)s)A_t^{(2)}(t - \alpha(h)s, x(t - \alpha(h)s)), \\ \tilde{Z}_i(t, t) &= P_i(A(t, x(t))), \end{aligned} \quad i = 0, 1. \quad (3.10)$$

Обозначим через H^k k -й столбец произвольной матрицы H . Тогда из (3.10) следует

$$(\tilde{Z}_i^k(t, t - \alpha(h)s))'_s = -A_t^{(2)}(t - \alpha(h)s, x(t - \alpha(h)s))\tilde{Z}_i^k(t, t - \alpha(h)s), \quad (3.11)$$

$$\tilde{Z}_i^k(t, t) = P_i^k(A(t, x(t))).$$

ЛЕММА 3. Пусть $\tilde{Z}_i^k(t, t - \alpha(h)s)$, $i = 0, 1$, – решения (3.11). Тогда существует $h_1 > 0$ такое, что для всех $h \in (0, h_1]$

$$|\tilde{Z}_1^k(t, t - \alpha(h)s)| \leq |\tilde{Z}_1^k(t, t)|e^{-\lambda s/2}, \quad (3.12)$$

$$|\tilde{Z}_0^k(t, t - \alpha(h)s)| \geq |\tilde{Z}_0^k(t, t)|e^{\alpha(h)s}. \quad (3.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того чтобы получить требуемые оценки, будем придерживаться подхода, предложенного в [13]. Рассмотрим функцию

$$\varphi_1(s) = \langle \tilde{Z}_1^k(t, t - \alpha(h)s), \tilde{Z}_1^k(t, t - \alpha(h)s) \rangle e^{\int_0^s \lambda_r(t - \alpha(h)\zeta) d\zeta}.$$

Учитывая вид матрицы $A_t^{(2)}(t - \alpha(h)s, x(t - \alpha(h)s))$ и уравнение (3.11), имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1(s)}{ds} &= 2 \left[\langle (\tilde{Z}_1^k(t, t - \alpha(h)s))'_s, \tilde{Z}_1^k(t, t - \alpha(h)s) \rangle \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda_r(t - \alpha(h)s)}{2} \langle \tilde{Z}_1^k(t, t - \alpha(h)s), \tilde{Z}_1^k(t, t - \alpha(h)s) \rangle \right] e^{\int_0^s \lambda_r(t - \alpha(h)\zeta) d\zeta} \end{aligned}$$

$$= 2 \left[-\langle A_t^{(1)}(t - \alpha(h)s, x(t - \alpha(h)s)) \tilde{Z}_1^k(t, t - \alpha(h)s), \tilde{Z}_1^k(t, t - \alpha(h)s) \rangle \right. \\ \left. + \left(\alpha(h) + \frac{1}{2} \lambda_r(t - \alpha(h)s) \right) |\tilde{Z}_1^k(t, t - \alpha(h)s)|^2 \right] e^{\int_0^s \lambda_r(t - \alpha(h)\zeta) d\zeta}.$$

Поскольку

$$\langle A_t^{(1)}(t - \alpha(h)s, x(t - \alpha(h)s)) \tilde{Z}_1^k(t, t - \alpha(h)s), \tilde{Z}_1^k(t, t - \alpha(h)s) \rangle \\ - \lambda \langle \tilde{Z}_1^k(t, t - \alpha(h)s), \tilde{Z}_1^k(t, t - \alpha(h)s) \rangle \geq 0,$$

то

$$\frac{d\varphi_1(s)}{ds} \leq 2 \left[-\frac{\lambda_r(t - \alpha(h)s)}{2} + \alpha(h) \right] |\tilde{Z}_1^k(t, t - \alpha(h)s)|^2 e^{\int_0^s \lambda_r(t - \alpha(h)\zeta) d\zeta}.$$

Найдется $h_1 > 0$ такое, что

$$\alpha(h) - \frac{\lambda_r(t - \alpha(h)s)}{2} \leq 0 \quad \text{для всех } h \in (0, h_1],$$

поэтому $d\varphi_1(s)/ds \leq 0$. Следовательно, для $s \geq 0$ справедливо неравенство $\varphi_1(s) \leq \varphi_1(0)$, значит,

$$|\tilde{Z}_1^k(t, t - \alpha(h)s)| \leq |\tilde{Z}_1^k(t, t)| e^{-(1/2) \int_0^s \lambda_r(t - \alpha(h)\zeta) d\zeta} \leq |\tilde{Z}_1^k(t, t)| e^{-\lambda s/2}.$$

Оценка (3.13) получается с помощью аналогичных рассуждений. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Согласно приведенной лемме для решений уравнения (3.11) имеет место э-дихотомия.

Заметим, что в силу (3.8) справедливо равенство

$$\frac{dZ^k(t, t - \alpha(h)s)}{ds} = -A_t^{(2)}(t - \alpha(h)s, x(t - \alpha(h)s)) Z^k(t, t - \alpha(h)s) \\ - \alpha(h) B^T(t, t - \alpha(h)s) Z^k(t, t - \alpha(h)s). \quad (3.14)$$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dW^k(t, t - \alpha(h)s)}{ds} = \left[-A_t^{(2)}(t - \alpha(h)s, x(t - \alpha(h)s)) \right. \\ \left. - \alpha(h) \sum_{j=0}^1 P_j(A(t, x(t))) B^T(t, t - \alpha(h)s) G(t, t - \alpha(h)s) P_j(A(t, x(t))) \right] \\ \times W^k(t, t - \alpha(h)s). \quad (3.15)$$

Согласно утверждению 10 при достаточно малых h найдется единственное преобразование

$$Z^k(t, t - \alpha(h)s) = G(t, t - \alpha(h)s) W^k(t, t - \alpha(h)s) \quad (3.16)$$

такое, что (3.14) оказывается кинематически подобным (3.15), при этом последнее распадается на систему независимых уравнений в тех же подпространствах $R_i(A(t, x(t)))$, $i = 0, 1$, что и уравнение (3.9):

$$\begin{aligned} & \frac{dW_i^k(t, t - \alpha(h)s)}{ds} \\ &= P_i(A(t, x(t))) \left[-A_t^{(2)}(t - \alpha(h)s, x(t - \alpha(h)s)) \right. \\ & \quad \left. - \alpha(h)P_i(A(t, x(t)))B^T(t, t - \alpha(h)s)G(t, t - \alpha(h)s)P_i(A(t, x(t))) \right] \\ & \quad \times W_i^k(t, t - \alpha(h)s), \\ & W_i^k(t, t - \alpha(h)s) = P_i(A(t, x(t)))W^k(t, t - \alpha(h)s). \end{aligned} \quad (3.17)$$

ЛЕММА 4. Пусть $W_1^k(t, \cdot)$ является решением уравнения (3.17) с начальным условием $W_1^k(t, t) = P_1^k(A(t, x(t)))$. Тогда существует $h_2 > 0$ такое, что для всех $h \in (0, h_2]$ справедлива оценка

$$|W_1^k(t, t - \alpha(h)s)| \leq 2e^{-\lambda s/4}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу того, что матрица $A_t^{(2)}(t - \alpha(h)s, x(t - \alpha(h)s))$ коммутирует с проектором $P_1(A(t, x(t)))$, и леммы 3 для решения уравнения

$$\frac{d\widetilde{W}_1^k(t, t - \alpha(h)s)}{ds} = -P_1(A(t, x(t)))A_t^{(2)}(t - \alpha(h)s, x(t - \alpha(h)s))\widetilde{W}_1^k(t, t - \alpha(h)s)$$

справедлива оценка

$$|\widetilde{W}_1^k(t, t - \alpha(h)s)| \leq |\widetilde{W}_1^k(t, t)|e^{-\lambda s/2} \leq e^{-\lambda s/2}.$$

Кроме того, в силу свойств операторов проектирования (утверждения 6, 7) и утверждения 10 существует константа M_B такая, что

$$\int_{\tau}^{\tau+1} \|P_1(A(t, x(t)))B^T(t, t - \alpha(h)s)G(t, t - \alpha(h)s)P_1(A(t, x(t)))\| ds \leq M_B,$$

вследствие чего на основании [13; с. 180] справедливо неравенство

$$|W_1^k(t, t - \alpha(h)s)| \leq e^{\alpha(h)M_B} e^{\lambda/2 - \alpha(h)M_B}.$$

Очевидно, существует $h_2 > 0$ такое, что для всех $h \in (0, h_2]$ имеют место соотношения

$$\frac{\lambda}{2} - \alpha(h)M_B \geq \frac{\lambda}{4}, \quad e^{\alpha(h)M_B} \leq 2,$$

из которых следует результат леммы.

Нетрудно убедиться, что в силу утверждения 10 и леммы 3 существует $h_3 > 0$ такое, что для всех $h \in (0, h_3]$ справедлива оценка $\|S(t, t - \alpha(h)s)\| \leq 16\alpha(h)$. В силу (3.16) имеет место равенство

$$\begin{aligned} & P_1(A(t, x(t)))Z^k(t, t - \alpha(h)s) \\ &= P_1(A(t, x(t)))W^k(t, t - \alpha(h)s) + P_1(A(t, x(t)))S(t, t - \alpha(h)s)W^k(t, t - \alpha(h)s), \end{aligned}$$

из которого с учетом ограниченности нормы $W^k(t, \cdot)$ на основании леммы 4 следует, что

$$|Z_1^k(t, t - \alpha(h)s)| \leq 2e^{-\lambda s/4} + \alpha(h)16|W^k(t, \cdot)|. \quad (3.18)$$

Совершая обратную замену $s = (t - \tau)/\alpha(h)$ и переходя к спектральной норме матрицы $Z_1(t, \tau) = Z(t, \tau)P_1(A(t, x(t)))$ при $t \in [a, b]$, $\tau \in [a, t]$, имеем

$$\|Z_1(t, \tau)\| \leq 2me^{-\lambda(t-\tau)/4\alpha(h)} + \alpha(h)16m\|W(t, \cdot)\|. \quad (3.19)$$

Умножение обеих частей (3.5) на матрицу $P_1(A(t, x(t)))$ приводит к равенству

$$Z_1(t, \tau) = Y_h(t, \tau)U(\tau, t)P_1(A(t, x(t))),$$

из которого на основании свойств оператора поворота $U(\tau, t)$ (утверждение 7) следует представление

$$Z_1(t, \tau) = Y_h(t, \tau)P_1(A(\tau, x(\tau)))U(\tau, t).$$

Последнее с учетом оценки (3.19) и утверждения 7 гарантирует справедливость следующего результата.

ЛЕММА 5. Пусть выполнено условие (*). Тогда существуют $h_4 > 0$ и $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ такие, что для всех $t \in [a, b]$, $\tau \in [a, t]$, $h \in (0, h_4]$ имеет место оценка

$$\|Y_h(t, \tau)P_1(A(\tau, x(\tau)))\| \leq K_1e^{-\lambda(t-\tau)/4\alpha(h)} + \alpha(h)K_2.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. В силу (3.3) и ограниченности $F(t)$ существует положительная константа K_0 такая, что для всех $t \in [a, b]$ имеет место неравенство

$$\left| \frac{x(t) - w_0(t)}{\alpha(h)} \right| \leq K_0.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Для всех $t \in [a, b]$, $\tau \in [a, t]$, $h \in (0, h_4]$ справедливо неравенство

$$\|Y_h^{(1)}(t, \tau)P_1(A(\tau, x(\tau)))\| \leq K_1e^{-\lambda(t-\tau)/4\alpha(h)} + \alpha(h)K_2.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $h \in (0, \infty)$,

$$\Phi_h(\cdot): [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}, \quad \varphi(\cdot): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$$

и $\Phi_h(t, t)\varphi(t) = \varphi(t)$. Рассмотрим представление

$$\int_a^t \Phi_h(t, s)\varphi(s) ds = \varphi(t) + \varepsilon(h).$$

Интегральный оператор в левой части последнего равенства назовем оператором восстановления значения $\varphi(t)$, $\Phi_h(t, s)$ – его ядром, а $\varepsilon(h)$ – погрешностью

Рассмотрим функцию

$$\Phi_h^{(1)}(t, \tau) = \left(Y_h^{(1)}(t, \tau)P_1(A(\tau, x(\tau))) \right)'_{\tau}.$$

Покажем, что

$$\int_a^t \Phi_h^{(1)}(t, \tau)F(\tau) d\tau \quad (3.20)$$

является оператором восстановления значения $F(t)$, и оценим его погрешность.

ЛЕММА 6. Пусть выполнены условия леммы 5, $\delta(h)$, $\alpha(h)/\delta(h)$ стремятся к нулю вместе с h , $v(t) \equiv 0$ при $t \in [a - \delta(h), a]$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда существуют положительные константы $h_5(k)$, K_3 , K_4 такие, что при $h \in (0, h_5(k)]$ погрешность оператора восстановления значения $F(t)$ с ядром $\Phi_h^{(1)}(t, \tau)$ удовлетворяет оценке

$$\varepsilon(h) \leq (2K_1 + K_2) \bigvee_{t-\delta(h)}^t F(\cdot) + K_3 \left(\frac{4\alpha(h)}{\lambda\delta(h)} \right)^k + \alpha(h)K_4.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим при $\tau \in [a - \delta(h), a]$ выполнено $\Phi_h^{(1)}(t, \tau) = \Phi_h^{(1)}(t, a)$. Пусть

$$I_1 = \left| \int_{a-\delta(h)}^{t-\delta(h)} \Phi_h^{(1)}(t, \tau)(F(\tau) - F(t)) d\tau \right|, \quad I_2 = \left| \int_{t-\delta(h)}^t \Phi_h^{(1)}(t, \tau)(F(\tau) - F(t)) d\tau \right|,$$

$$I_3 = \left| \int_{a-\delta(h)}^t \Phi_h^{(1)}(t, \tau)F(t) d\tau - F(t) \right|.$$

Оценим каждую из этих величин. При этом в силу леммы 5 и утверждений 4 и 10 для I_1 , имеем

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \left(\bigvee_{a-\delta(h)}^{t-\delta(h)} F(\cdot) + |F(t - \delta(h))| + |F(t)| \right) \left\| \int_{a-\delta(h)}^{t-\delta(h)} \Phi_h^{(1)}(t, \tau) d\tau \right\| \\ &\leq \left(\bigvee_{a-\delta(h)}^{t-\delta(h)} F(\cdot) + \frac{2}{\lambda} M_v \right) \|Y_h^{(1)}(t, t - \delta(h))P_1(A(t - \delta(h), x(t - \delta(h)))) \\ &\quad - Y_h^{(1)}(t, a - \delta(h))P_1(A(a - \delta(h), x(a - \delta(h))))\| \\ &\leq \left(\bigvee_{a-\delta(h)}^{t-\delta(h)} F(\cdot) + \frac{2}{\lambda} M_v \right) (K_1 e^{-\lambda\delta(h)/4\alpha(h)} + K_1 e^{-\lambda(t-a+\delta(h))/4\alpha(h)} + 2\alpha(h)K_2) \\ &\leq 2(K_1 e^{-\lambda\delta(h)/4\alpha(h)} + \alpha(h)K_2) \left(\bigvee_{a-\delta(h)}^{t-\delta(h)} F(\cdot) + \frac{2}{\lambda} M_v \right); \end{aligned}$$

для I_2

$$I_2 \leq \bigvee_{t-\delta(h)}^t F(\cdot) \left\| \int_{t-\delta(h)}^t \Phi_h^{(1)}(t, \tau) d\tau \right\| \leq (2K_1 + K_2) \bigvee_{t-\delta(h)}^t F(\cdot);$$

для I_3 в силу утверждений 2 и 6

$$\begin{aligned} I_3 &\leq |[Y_h^{(1)}(t, t)P_1(A(t, x(t))) - Y_h^{(1)}(t, a - \delta(h))P_1(A(a - \delta(h), x(a - \delta(h)))) \\ &\quad - P_1(A(t, x(t)))]F(t)| \\ &\leq (K_1 e^{-\lambda\delta(h)/4\alpha(h)} + 2\alpha(h)K_2) \frac{M_v}{\lambda}. \end{aligned}$$

Для погрешности оператора восстановления, задаваемого (3.20), справедливо неравенство

$$\varepsilon(h) = \left| \int_a^t \Phi_h^{(1)}(t, \tau)F(\tau) d\tau - F(t) \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq \left| \int_{a-\delta(h)}^{t-\delta(h)} \Phi_h^{(1)}(t, \tau)(F(\tau) - F(t)) d\tau \right| + \left| \int_{t-\delta(h)}^t \Phi_h^{(1)}(t, \tau)(F(\tau) - F(t)) d\tau \right| \\ &\quad + \left| \int_{a-\delta(h)}^t \Phi_h^{(1)}(t, \tau)F(\tau) d\tau - F(t) \right|; \end{aligned}$$

из него, с учетом оценок для I_j при

$$K_3 = K_1 \left(2 \bigvee_{a-\delta(h)}^b F(\cdot) + \frac{5M_v}{\lambda} \right), \quad K_4 = 2K_2 \left(\bigvee_{a-\delta(h)}^b F(\cdot) + \frac{3M_v}{\lambda} \right)$$

следует соотношение

$$\varepsilon(h) \leq (2K_1 + K_2) \bigvee_{t-\delta(h)}^t F(\cdot) + K_3 e^{-\lambda\delta(h)/4\alpha(h)} + \alpha(h)K_4.$$

Отметим, что для любого $k \in \mathbb{N}$ можно указать такое $h_5(k) > 0$, что для всех $h \in (0, h_5(k)]$ имеет место неравенство

$$e^{-\lambda\delta(h)/4\alpha(h)} \leq \left(\frac{4\alpha(h)}{\lambda\delta(h)} \right)^k,$$

из которого следует результат леммы.

Перейдем от интеграла, стоящего в правой части (3.4), к оператору восстановления значения $F(t)$ с ядром $\Phi_h^{(1)}(t, \tau)$, $t \in [a, b]$, $\tau \in [a, t]$. Отметим, что в силу (3.2) $Y_h^{(1)}(t, \tau)P_1(A(\tau, x(\tau)))$ является решением задачи Коши

$$\begin{aligned} &(Y_h^{(1)}(t, \tau)P_1(A(\tau, x(\tau))))'_\tau \\ &= \frac{1}{\alpha(h)} Y_h^{(1)}(t, \tau)P_1(A(\tau, x(\tau)))A(\tau, x(\tau)) + Y_h^{(1)}(t, \tau)P'_1(A(\tau, x(\tau))), \\ &Y_h^{(1)}(t, t)P_1(A(t, x(t))) = P_1(A(t, x(t))), \end{aligned}$$

с учетом которой (3.4) принимает вид

$$P_1(A(t, x(t))) \frac{x(t) - w_0(t)}{\alpha(h)} = \int_a^t \Phi_h^{(1)}(t, \tau)F(\tau) d\tau - \int_a^t Y_h^{(1)}(t, \tau)P'_1(A(\tau, x(\tau)))F(\tau) d\tau. \quad (3.21)$$

ЛЕММА 7. Пусть выполнены условия леммы 6. Тогда найдутся положительные константы K_5 и h_6 такие, что для всех $t \in [a, b]$, $\tau \in [a, t]$, $h \in (0, h_6]$

$$\|Y_h^{(1)}(t, \tau)P_0(A(\tau, x(\tau)))\| \leq \alpha(h)K_5.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим производную $Y_h^{(1)}(t, \cdot)P_0(A(\cdot, x(\cdot)))$, которая на основании (3.2) и свойств операторов проектирования принимает вид

$$\begin{aligned} &(Y_h^{(1)}(t, \tau)P_0(A(\tau, x(\tau))))'_\tau \\ &= \frac{1}{\alpha(h)} Y_h^{(1)}(t, \tau)A(\tau, x(\tau))P_0(A(\tau, x(\tau))) \\ &\quad + Y_h^{(1)}(t, \tau)(P_0(A(\tau, x(\tau))) + P_1(A(\tau, x(\tau))))P'_0(A(\tau, x(\tau))). \end{aligned}$$

Поскольку первое слагаемое из правой части последнего равенства есть нулевая матрица, а $P'_1(A(\tau, x(\tau))) = -P'_0(A(\tau, x(\tau)))$, то из этого следует

$$\begin{aligned} (Y_h^{(1)}(t, \tau)P_0(A(\tau, x(\tau))))'_\tau &= -Y_h^{(1)}(t, \tau)P_0(A(\tau, x(\tau)))P'_1(A(\tau, x(\tau))) \\ &\quad - Y_h^{(1)}(t, \tau)P_1(A(\tau, x(\tau)))P'_1(A(\tau, x(\tau))), \\ Y_h^{(1)}(t, t)P_0(A(t, x(t))) &= 0, \end{aligned}$$

0 – нулевая матрица.

Пусть $H^{[k]}$ – строка с номером k произвольной матрицы H ,

$$y_0^{[k]}(\tau) = (Y_h^{(1)}(t, \tau)P_0(A(\tau, x(\tau))))^k;$$

тогда

$$\begin{aligned} (y_0^{[k]}(\tau))' &= -y_0^{[k]}(\tau)P'_1(A(\tau, x(\tau))) - (Y_h^{(1)}(t, \tau)P_1(A(\tau, x(\tau)))P'_1(A(\tau, x(\tau))))^{[k]}, \\ y_0^{[k]}(t) &= 0. \end{aligned}$$

Решение этой задачи Коши может быть представлено в виде

$$y_0^{[k]}(\tau) = \int_\tau^t (Y_h^{(1)}(t, s)P_1(A(s, x(s)))P'_1(A(s, x(s))))^{[k]} \mathcal{K}(\tau, s) ds, \quad (3.22)$$

где $\mathcal{K}(\tau, s)$ – матрица Коши, удовлетворяющая уравнению

$$(\mathcal{K}(\tau, s))'_s = P'_1(A(s, x(s)))\mathcal{K}(\tau, s), \quad \mathcal{K}(\tau, \tau) = E.$$

В силу утверждения 3 и свойств операторов проектирования матрица $P_1(A(t, x(t)))$ удовлетворяет условию Липшица с константой L_{P_1} , которая выписывается конструктивно, поэтому на основании утверждения 11 для строк $\mathcal{K}(\tau, s)$ при $s \in [a, \tau]$ и $\lambda' = \max\{-\lambda_{\min}, L_{P_1}\}$ ($\lambda_{\min} \leq \lambda_{\min}(s)$, где $\lambda_{\min}(s)$ – минимальное собственное число $P'_1(A(s, x(s)))$) имеют место соотношения

$$|\mathcal{K}^{[k]}(\tau, s)| \leq |\mathcal{K}^{[k]}(\tau, \tau)|e^{\lambda'(\tau-s)} \leq e^{\lambda'(\tau-s)}, \quad k = 1, \dots, m.$$

Последнее неравенство позволяет оценить норму решения (3.22):

$$\begin{aligned} |y_0^{[k]}(\tau)| &\leq m \int_\tau^t e^{\lambda'(\tau-s)} \|Y_h^{(1)}(t, \tau)P_1(A(\tau, x(\tau)))P'_1(A(\tau, x(\tau)))\| ds \\ &\leq mK_1L_{P_1} \int_\tau^t e^{\lambda'(\tau-s)} (K_1e^{-\lambda(t-s)/4\alpha(h)} + \alpha(h)K_2) ds \\ &\leq mK_1L_{P_1} \int_\tau^t e^{(\lambda' - \lambda/4\alpha(h))(\tau-s)} ds + \alpha(h)mK_2L_{P_1} \int_\tau^t e^{\lambda'(\tau-s)} ds. \end{aligned}$$

Существует $h_6 > 0$ такое, что для всех $h \in (0, h_6]$ выполнено $\lambda' - \lambda/4\alpha(h) \leq -\lambda/5\alpha(h)$, поэтому

$$|y_0^{[k]}(\tau)| \leq mK_1L_{P_1} \frac{5\alpha(h)}{\lambda} e^{-\lambda(\tau-s)/5\alpha(h)} \Big|_t^\tau + \alpha(h)mK_2L_{P_1} \int_a^b e^{\lambda'(b-s)} ds.$$

Переходя к спектральной норме матрицы $Y_h^{(1)}(t, \tau)P_0(A(\tau, x(\tau)))$ и полагая

$$K_5 = m^2 L_{P_1} \left[K_1 \frac{5}{\lambda} + K_2 \int_a^b e^{\lambda'(b-s)} ds \right],$$

получаем искомую оценку. Лемма доказана.

Займемся оценкой $|u_0(t) - v_*(t)|$.

ЛЕММА 8. Пусть выполнены условия леммы 6. Тогда существуют положительные константы K_7, K_8, K_9 такие, что для всех $t \in [a, b]$ справедлива оценка

$$|u_0(t) - v_*(t)| \leq K_7 \bigvee_{t-\delta(h)}^t F(\cdot) + K_8 \left(\frac{4\alpha(h)}{\lambda\delta(h)} \right)^k + K_9 \alpha(h).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (3.21), леммам 6 и 7 имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & \left| P_1(A(t, x(t))) \frac{x(t) - w_0(t)}{\alpha(h)} - F(t) \right| \\ &= \left| \int_a^t \Phi_h^{(1)}(t, \tau) F(\tau) d\tau - F(t) - \int_a^t Y_h^{(1)}(t, \tau) P_1(A(\tau, x(\tau))) P_1'(A(\tau, x(\tau))) F(\tau) d\tau \right. \\ & \quad \left. - \int_a^t Y_h^{(1)}(t, \tau) P_0(A(\tau, x(\tau))) P_1'(A(\tau, x(\tau))) F(\tau) d\tau \right| \\ &\leq (2K_1 + K_2) \bigvee_{t-\delta(h)}^t F(\cdot) + K_3 \left(\frac{4\alpha(h)}{\lambda\delta(h)} \right)^k + \alpha(h) K_4 \\ & \quad + \alpha(h) L_{P_1} \frac{M_v}{\sqrt{\lambda}} \left(K_1 \frac{4}{\lambda} + K_5(b-a) \right) \\ &\leq (2K_1 + K_2) \bigvee_{t-\delta(h)}^t F(\cdot) + K_3 \left(\frac{4\alpha(h)}{\lambda\delta(h)} \right)^k + K_6 \alpha(h), \end{aligned} \quad (3.23)$$

где

$$K_6 = \left(\frac{4}{\lambda} K_1 + K_5(b-a) \right) \frac{M_v}{\sqrt{\lambda}} L_{P_1} + K_4.$$

Из (3.23) следует существование вектора $e(t)$, по норме меньшего единицы, такого, что $v(t)$ удовлетворяет следующей системе линейных уравнений:

$$\begin{aligned} (f^T(t, x(t)))^+ v(t) &= P_1(A(t, x(t))) \frac{x(t) - w_0(t)}{\alpha(h)} \\ &+ \left[(2K_1 + K_2) \bigvee_{t-\delta(h)}^t F(\cdot) + K_3 \left(\frac{4\alpha(h)}{\lambda\delta(h)} \right)^k + K_6 \alpha(h) \right] e(t). \end{aligned}$$

Ее нормальное решение $v_*(t)$ согласно [9] имеет вид

$$\begin{aligned} v_*(t) &= f^T(t, x(t)) P_1(A(t, x(t))) \frac{x(t) - w_0(t)}{\alpha(h)} \\ &+ f^T(t, x(t)) \left[K_3 \left(\frac{4\alpha(h)}{\lambda\delta(h)} \right)^k + (2K_1 + K_2) \bigvee_{t-\delta(h)}^t F(\cdot) + K_6 \alpha(h) \right] e(t). \end{aligned}$$

В силу утверждений 2, 3 и 6 (пункт 4))

$$f^T(t, x(t))P_1(A(t, x(t)))\frac{x(t) - w_0(t)}{\alpha(h)} = f^T(t, x(t))\frac{x(t) - w_0(t)}{\alpha(h)},$$

откуда с учетом (1.5) следует справедливость равенства

$$v_*(t) = u_0(t) + f^T(t, x(t)) \left[(2K_1 + K_2) \bigvee_{t-\delta(h)}^t F(\cdot) + K_3 \left(\frac{4\alpha(h)}{\lambda\delta(h)} \right)^k + K_6\alpha(h) \right] e(t),$$

которое при $K_7 = M_f(2K_1 + K_2)$, $K_8 = M_f K_3$, $K_9 = M_f K_6$, приводит к требуемой оценке. Лемма доказана.

4. Оценка нормы разности $u_0(\cdot)$ и $u_h(\cdot)$. Для ее получения нам потребуется оценить $|w_h(t) - w_0(t)|$. Заметим, что правило (1.2) можно трактовать как реализацию метода Эйлера для решения задачи (1.6) с неточно вычисляемой правой частью. Непосредственно получим эту оценку, поскольку в связи со спецификой интересующего нас уравнения сослаться на известные результаты не удастся.

Рассмотрим метод Эйлера для дифференциального уравнения (1.6) при точно вычисляемой правой части: при $t \in [t_i, t_{i+1})$

$$w_e(t) = w_e(t_i) + \left(g(t_i, x(t_i)) + A(t_i, x(t_i)) \frac{x(t_i) - w_e(t_i)}{\alpha(h)} \right) (t - t_i), \quad w_e(a) = w_0(a). \quad (4.1)$$

Для простоты в дальнейшем будем считать, что $(b - a)/\Delta(h) \in \mathbb{N}$.

ЛЕММА 9. Пусть выполнено условие (*). Тогда существуют положительные константы h_7, K_{11} такие, что для любых $h \in (0, h_7]$ и $t \in [a, b]$ справедлива оценка

$$|w_0(t) - w_e(t)| \leq \frac{\Delta(h)}{\alpha(h)} K_{11}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (1.6)

$$w_0(t_{i+1}) = w_0(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(g(t, x(t)) + A(t, x(t)) \frac{x(t) - w_0(t)}{\alpha(h)} \right) dt,$$

поэтому разность $w_0(t_{i+1})$ и $w_e(t_{i+1})$ имеет вид

$$\begin{aligned} w_0(t_{i+1}) - w_e(t_{i+1}) &= w_0(t_i) - w_e(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left([A(t, x(t)) - A(t_i, x(t_i))] \frac{x(t) - w_0(t)}{\alpha(h)} \right. \\ &\quad \left. + A(t_i, x(t_i)) \frac{x(t) - w_0(t) - x(t_i) + w_e(t_i)}{\alpha(h)} \right) dt \\ &\quad + \int_{t_i}^{t_{i+1}} (g(t, x(t)) - g(t_i, x(t_i))) dt \\ &= \left(E - A(t_i, x(t_i)) \frac{\Delta(h)}{\alpha(h)} \right) (w_0(t_i) - w_e(t_i)) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} A(t_i, x(t_i)) \frac{x(t) - x(t_i)}{\alpha(h)} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{t_i}^{t_{i+1}} A(t_i, x(t_i)) \frac{w_0(t) - w_0(t_i)}{\alpha(h)} dt \\
& + \int_{t_i}^{t_{i+1}} [A(t, x(t)) - A(t_i, x(t_i))] \frac{x(t) - w_0(t)}{\alpha(h)} dt \\
& + \int_{t_i}^{t_{i+1}} (g(t, x(t)) - g(t_i, x(t_i))) dt.
\end{aligned}$$

В силу условия (*) и следствия 1 из леммы 5 имеют место оценки

$$\begin{aligned}
|x(t) - x(t_i)| & \leq (M_g + M_f M_v) \Delta(h), & |w_0(t) - w_0(t_i)| & \leq (M_g + M_f^2 K_0) \Delta(h), \\
|g(t, x(t)) - g(t_i, x(t_i))| & \leq L(1 + M_g + M_f M_v) \Delta(h), \\
\|A(t, x(t)) - A(t_i, x(t_i))\| & \leq 2LM_f(1 + M_g + M_f M_v) \Delta(h),
\end{aligned}$$

из которых следует существование положительной константы K_{10} такой, что

$$|w_0(t_{i+1}) - w_e(t_{i+1})| \leq \left\| E - \frac{\Delta(h)}{\alpha(h)} A(t_i, x(t_i)) \right\| |w_0(t_i) - w_e(t_i)| + \frac{\Delta^2(h)}{\alpha(h)} K_{10}.$$

Поскольку можно гарантировать существование $h_7 > 0$ такого, что для $h \in (0, h_7]$ справедливо неравенство

$$\left\| E - \frac{\Delta(h)}{\alpha(h)} A(t_i, x(t_i)) \right\| \leq 1,$$

то

$$|w_0(t_{i+1}) - w_e(t_{i+1})| \leq |w_0(t_i) - w_e(t_i)| + \frac{\Delta^2(h)}{\alpha(h)} K_{10}. \quad (4.2)$$

Из оценки (4.2) с учетом того, что $|w_0(t_0) - w_e(t_0)| = 0$, следует справедливость для всех $i = 1, \dots, n$ неравенства

$$|w_0(t_i) - w_e(t_i)| \leq n \frac{\Delta^2(h)}{\alpha(h)} K_{10} = \frac{b-a}{\Delta(h)} \frac{\Delta^2(h)}{\alpha(h)} K_{10} = \frac{\Delta(h)}{\alpha(h)} K_{11},$$

$K_{11} = (b-a)K_{10}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 10. Пусть выполнено условие (*). Тогда существуют положительные постоянные $h_8, K_{13} > 0$ такие, что для всех $h \in (0, h_8], t \in [a, b]$

$$|w_h(t) - w_e(t)| \leq \frac{h}{\alpha(h)} K_{13}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (4.1) и (1.2) справедливо равенство

$$\begin{aligned}
& w_h(t_{i+1}) - w_e(t_{i+1}) \\
& = (E - A(t_i, \xi(t_i)) \frac{\Delta(h)}{\alpha(h)})(w_h(t_i) - w_e(t_i)) + A(t_i, \xi(t_i)) \frac{\xi(t_i) - x(t_i)}{\alpha(h)} \Delta(h) \\
& \quad + (A(t_i, \xi(t_i)) - A(t_i, x(t_i))) \left(\frac{x(t_i) - w_0(t_i)}{\alpha(h)} + \frac{w_0(t_i) - w_e(t_i)}{\alpha(h)} \right) \Delta(h) \\
& \quad + (g(t_i, \xi(t_i)) - g(t_i, x(t_i))) \Delta(h),
\end{aligned}$$

из которого с учетом леммы 9 следует существование $h_8 > 0$ и константы $K_{12} > 0$ таких, что для всех $h \in (0, h_8]$

$$|w_h(t_{i+1}) - w_e(t_{i+1})| \leq |w_h(t_i) - w_e(t_i)| + \frac{\Delta(h)h}{\alpha(h)} K_{12}. \quad (4.3)$$

Так как в этом случае $|w_h(t_0) - w_e(t_0)| \leq h$, из оценки (4.3) для любого $i = 1, \dots, n$ получаем

$$|w_h(t_i) - w_e(t_i)| \leq h + n \frac{\Delta(h)h}{\alpha(h)} K_{12} = h + \frac{b-a}{\Delta(h)} \frac{\Delta(h)h}{\alpha(h)} K_{12} \leq \frac{h}{\alpha(h)} K_{13},$$

$K_{13} = (b-a)K_{12} + 1$. Лемма доказана.

С учетом лемм 9, 10 справедлива

ЛЕММА 11. Пусть выполнено условие леммы 9, $\Delta(h) = h$. Тогда существует положительная константа K_{14} такая, что для любого $t \in [a, b]$ справедлива оценка

$$|w_h(t) - w_0(t)| \leq \frac{h}{\alpha(h)} K_{14}. \quad (4.4)$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Из ограниченности $w_0(t)$ и (4.4) следует ограниченность $w_h(t)$ на $[a, b]$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Существует положительная константа K_{15} такая, что

$$|w_h(t_i) - \xi(t_i)| \leq K_{15}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Заметим, что разность $u_0(t)$ и $u_h(t)$ при $t \in [t_i, t_{i+1})$ может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} u_0(t) - u_h(t) &= f^T(t, x(t)) \frac{x(t) - \xi(t_i)}{\alpha(h)} + f^T(t, x(t)) \frac{w_h(t_i) - w_h(t)}{\alpha(h)} \\ &\quad + f^T(t, x(t)) \frac{w_h(t) - w_0(t)}{\alpha(h)} \\ &\quad + (f^T(t, x(t)) - f^T(t_i, \xi(t_i))) \frac{\xi(t_i) - w_h(t_i)}{\alpha(h)}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

ЛЕММА 12. Пусть выполнены условия леммы 11, величина $h/\alpha^2(h)$ ограничена. Тогда найдется константа $h_9 > 0$ такая, что для всех $h \in (0, h_9]$ приближение $u_h(\cdot)$ равномерно ограничено на $[a, b]$, т.е. найдется положительная константа M_u такая, что $|u_h(t)| \leq M_u$ для всех $t \in [a, b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (4.5) имеем

$$\begin{aligned} &|u_0(t) - u_h(t)| \\ &\leq \|f^T(t, x(t))\| \frac{|x(t) - \xi(t_i)|}{\alpha(h)} \\ &\quad + \|f^T(t, x(t))\| \left(|g(t_i, \xi(t_i))| + \|A(t_i, \xi(t_i))\| \frac{|\xi(t_i) - w_h(t_i)|}{\alpha(h)} \right) \frac{\Delta(h)}{\alpha(h)} \\ &\quad + \|f^T(t, x(t))\| \frac{|w_h(t) - w_0(t)|}{\alpha(h)} + \|f^T(t, x(t)) - f^T(t_i, \xi(t_i))\| \frac{|\xi(t_i) - w_h(t_i)|}{\alpha(h)}. \end{aligned}$$

С учетом условия (*) и леммы 11 получаем неравенство

$$|u_0(t) - u_h(t)| \leq \frac{h}{\alpha(h)} M_f(1 + M_g + M_f M_v) + \frac{h}{\alpha^2(h)} M_f(\alpha(h) M_g + M_f^2 K_{15}) \\ + \frac{h}{\alpha^2(h)} M_f K_{14} + \frac{h}{\alpha(h)} L(2 + M_g + M_f M_v) K_{15},$$

из которого в силу ограниченности $u_0(t)$ следует справедливость леммы.

Следующий результат понадобится для получения более точной оценки.

ЛЕММА 13. Пусть выполнены условия леммы 12. Тогда существует константа $K_{16} > 0$ такая, что для всех $t \in [a, b]$ имеет место неравенство

$$|w_0(t) - w_h(t)| \leq h K_{16}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $W(t) = w_0(t) - w_h(t)$. Функция $W(t)$ при $t \in [t_i, t_{i+1})$ является решением задачи Коши

$$W'(t) = -A(t, x(t)) \frac{W(t)}{\alpha(h)} \\ + (A(t_i, \xi(t_i)) - A(t, x(t))) \\ \times \left(\frac{\xi(t_i) - x(t_i)}{\alpha(h)} + \frac{x(t_i) - w_0(t_i)}{\alpha(h)} + \frac{w_0(t_i) - w_h(t_i)}{\alpha(h)} \right) \\ + A(t, x(t)) \frac{\xi(t_i) - x(t)}{\alpha(h)} + \frac{1}{\alpha(h)} A(t, x(t)) (g(t_i, \xi(t_i)) + f(t_i, \xi(t_i)) u_i) (t - t_i) \\ + (g(t_i, \xi(t_i)) - g(t, x(t))), \\ W(a) = w_h(a) - w_0(a), \tag{4.6}$$

при этом $|W(a)| \leq h$. Отметим, что существуют число $S_1(t)$, матрица – функция $S_2(t)$ и вектор – функции $S_3(t)$, $S_4(t)$, по модулю и нормам не превосходящие единицы, такие, что при $t \in [t_i, t_{i+1})$ имеют место равенства

$$A(t_i, \xi(t_i)) - A(t, x(t)) = 2LM_f h(2 + M_g + M_f M_v) S_2(t), \\ g(t_i, \xi(t_i)) - g(t, x(t)) = Lh(2 + M_g + M_f M_v) S_3(t), \\ t - t_i = hS_1(t), \quad \xi(t_i) - x(t) = h(1 + M_g + M_f M_v) S_4(t).$$

Поэтому решение уравнения (4.6) имеет вид

$$W(t) = Y_h(t, a) W(a) \\ + \int_a^t Y_h(t, \tau) \left[2LM_f h(2 + M_g + M_f M_v) S_2(\tau) \right. \\ \times \left(\frac{\xi(t_i) - x(t_i)}{\alpha(h)} + \frac{x(t_i) - w_0(t_i)}{\alpha(h)} + \frac{w_0(t_i) - w_h(t_i)}{\alpha(h)} \right) \\ \left. + Lh(2 + M_g + M_f M_v) S_3(\tau) \right] d\tau \\ + \frac{h}{\alpha(h)} \int_a^t Y_h(t, \tau) P_1(A(\tau, x(\tau))) A(\tau, x(\tau)) \\ \times [(1 + M_g + M_f M_v) S_4(\tau) + (g(t_i, \xi(t_i)) + f(t_i, \xi(t_i)) u_i) S_1(\tau)] d\tau.$$

В силу утверждения 11 и уравнения (3.2) при $\tau \leq t$ выполнено $\|Y_h(t, \tau)\| \leq m$, поэтому с учетом лемм 5, 11, 12 имеем

$$\begin{aligned} |W(t)| &\leq mh + 2LM_fm(2 + M_g + M_fM_v) \left(\frac{h}{\alpha(h)} + K_0 + \frac{h}{\alpha(h)} K_{14} \right) h \\ &\quad + hmL(2 + M_g + M_fM_v) + h \left(K_1 \frac{4}{\lambda} + K_2 \right) M_f^2(1 + M_g + M_fM_v) \\ &\quad + h \left(K_1 \frac{4}{\lambda} + K_2 \right) M_f^2(M_g + M_fM_u). \end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует существование константы K_{16} такой, что выполнено $|W(t)| \leq hK_{16}$. Лемма доказана.

Приступим к анонсированному уточнению нормы разности $u_0(t)$ и $u_h(t)$.

ЛЕММА 14. Пусть выполнены условия леммы 13. Тогда существует константа $K_{17} > 0$ такая, что для всех $t \in [a, b]$ имеет место неравенство

$$|u_0(t) - u_h(t)| \leq \frac{h}{\alpha(h)} K_{17}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (4.5) следует

$$\begin{aligned} |u_0(t) - u_h(t)| &\leq \|f^T(t, x(t))\| \frac{|x(t) - \xi(t_i)|}{\alpha(h)} \\ &\quad + \|f^T(t, x(t))\| (|g(t_i, \xi(t_i))| + \|f(t_i, \xi(t_i))\| M_u) \frac{h}{\alpha(h)} \\ &\quad + \|f^T(t, x(t))\| \frac{|w_h(t) - w_0(t)|}{\alpha(h)} \\ &\quad + \|f^T(t, x(t)) - f^T(t_i, \xi(t_i))\| \frac{|\xi(t_i) - w_h(t_i)|}{\alpha(h)}, \end{aligned}$$

которое с учетом условия (*), леммы 13 и замечания к лемме 11 приводит к требуемой оценке. Лемма доказана.

5. Верхняя и нижняя оценки, асимптотический порядок точности.

УТВЕРЖДЕНИЕ 14 (нижняя оценка точности) [15]. Пусть выполнено условие (*). Тогда найдется положительная константа K_{18} такая, что нижняя оценка точности алгоритма $D_h^{(1)}$ в пространстве $L_1[a, b]$ $\nu_1(h) \geq K_{18}\sqrt{h}$.

ТЕОРЕМА 1 (верхняя оценка точности) [15]. Пусть выполнено условие (*) и $\delta_1(h) = \lambda\delta(h)/4$. Тогда верхняя оценка точности в пространстве $L_1[a, b]$ имеет вид

$$\begin{aligned} \nu_2(h) &\leq K_7\delta_1(h) \frac{4}{\lambda} \bigvee_a^b (f^T(\cdot))^+ v(\cdot) + K_8 \left(\frac{\alpha(h)}{\delta_1(h)} \right)^k (b-a) \\ &\quad + \alpha(h)K_9(b-a) + \frac{h}{\alpha(h)} K_{17}(b-a). \end{aligned} \tag{5.1}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу лемм 8, 14 справедлива оценка

$$|v_*(t) - u_h(t)| \leq |v_*(t) - u_0(t)| + |u_0(t) - u_h(t)| \\ \leq K_7 \bigvee_{t-\delta(h)}^t (f^T(\cdot))^+ v(\cdot) + K_8 \left(\frac{4\alpha(h)}{\lambda\delta(h)} \right)^k + \alpha(h)K_9 + \frac{h}{\alpha(h)} K_{17},$$

интегрирование которой с учетом утверждения 14 дает оценку в метрике $L_1[a, b]$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Оптимальный по h порядок верхней оценки точности может быть реализован с помощью выбора $\delta_1(h) = h^{k/(2k+1)}$, $\alpha(h) = h^{(k+1)/(2k+1)}$, при этом $\varkappa = 1/2$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Yu. S. Osipov, A. V. Kryazhimskii, *Inverse Problems for Ordinary Differential Equations. Dynamical Solutions*, Gordon and Breach Sci. Publ., Basel, 1995.
- [2] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1986.
- [3] Н. Н. Красовский, *Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата*, Наука, М., 1985.
- [4] Ю. С. Осипов, Ф. П. Васильев, М. М. Потапов, *Основы метода динамической регуляризации*, МГУ, М., 1999.
- [5] А. В. Кряжковский, Ю. С. Осипов, “О моделировании управления в динамической системе”, *Изв. АН СССР. Сер. техн. киберн.*, 1983, № 2, 51–60.
- [6] А. Ю. Вдовин, “Оценки погрешности в задаче восстановления управления”, *Задачи позиционного моделирования*, Изд-во УНЦ АН СССР, Свердловск, 1986, 3–11.
- [7] В. И. Максимов, Л. Пандолфи, “О реконструкции неограниченных управлений в нелинейных динамических системах”, *ПММ*, **65**:3 (2001), 385–391.
- [8] А. С. Мартянов, “Оценки скорости сходимости одного алгоритма динамической реконструкции”, *Управление, устойчивость и обратные задачи динамики*, Сборник научных трудов, Тр. ИММ, **12**, № 2, 2006, 119–128.
- [9] В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов, *Матрицы и вычисления*, Наука, М., 1984.
- [10] А. Алберт, *Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание*, Наука, М., 1977.
- [11] P.-Å. Wedin, “Perturbation theory for pseudo-inverses”, *Nordisk Tidskr. Informationsbehandling (BIT)*, **13**:2 (1973), 217–232.
- [12] Ю. Л. Далецкий, “О непрерывном вращении подпространств в банаховом пространстве”, *УМН*, **12**:3 (1957), 147–154.
- [13] Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Нелинейный анализ и его приложения, Наука, М., 1970.
- [14] Б. Сендов, В. Попов, *Усредненные модули гладкости*, Мир, М., 1988.
- [15] А. Ю. Вдовин, А. В. Ким, С. С. Рублева, “Об асимптотической точности в L_1 одного динамического алгоритма восстановления возмущения”, *Управление, устойчивость и обратные задачи динамики*, Сборник научных трудов, Тр. ИММ, **12**, № 2, 2006, 18–26.

А. Ю. Вдовин

Уральский государственный лесотехнический университет,
г. Екатеринбург
E-mail: Vdovin@usfeu.ru

Поступило

29.01.2009

Исправленный вариант

03.07.2009

С. С. Рублева

Уральский государственный лесотехнический университет,
г. Екатеринбург
E-mail: rublevas@mail.ru