Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Малаксиано, О точных вложениях классов Геринга в классы Макенхаупта, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 5, 742–750

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm785>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 11:54:18

УДК 517.5

О ТОЧНЫХ ВЛОЖЕНИЯХ КЛАССОВ ГЕРИНГА В КЛАССЫ МАКЕНХАУПТА

Н. А. Малаксиано

В одномерном случае находится точная граница показателей классов функций Макенхаупта, в которые вложен заданный класс Геринга.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. Будем считать все функции измеримыми и неотрицательными на кубе $Q_0 \subset \mathbb{R}^n$ (рассматриваются только кубы со сторонами, параллельными координатным осям). Обозначим через $|E|$ меру Лебега множества $E \subset Q_0$ и

$$f_E \stackrel{\text{def}}{=} \int_E f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|E|} \int_E f(x) dx.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $q > 1$ и $B > 1$. Говорят, что функция f принадлежит классу Макенхаупта $A_q(B)$ на кубе $Q_0 \subset \mathbb{R}^n$, если для любого подкуба $Q \subset Q_0$ имеет место неравенство

$$\left(\int_Q f(x) dx \right) \left(\int_Q f^{-1/(q-1)}(x) dx \right)^{q-1} \leq B.$$

Такие классы функций играют важную роль в теории весовых пространств и в ряде других вопросов. В работе Макенхаупта [1] доказано, что из принадлежности функции классу $A_q(B)$ следует ее принадлежность классу $A_{q-\varepsilon}(B_1)$ при некотором $\varepsilon > 0$. Другими словами, имеет место включение

$$A_q(B) \subset A_{q-\varepsilon}(B_1). \quad (1.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Пусть $p > 1$ и $C > 1$. Говорят, что функция f принадлежит классу Геринга $G_p(C)$ на кубе $Q_0 \subset \mathbb{R}^n$, если для любого подкуба $Q \subset Q_0$ функция f удовлетворяет “обратному неравенству Гёльдера” (условию Геринга):

$$\left(\int_Q f^p(x) dx \right)^{1/p} \leq C \left(\int_Q f(x) dx \right).$$

Герингом [2] было показано, что для любого класса $G_p(C)$ найдется $\varepsilon > 0$, при котором имеет место включение

$$G_p(C) \subset G_{p+\varepsilon}(C_1). \quad (1.2)$$

Последний результат имеет многочисленные применения в теории весовых пространств, квазиконформных отображений, дифференциальных уравнений с частными производными.

Имеется ряд работ, в которых исследуется связь между классами Геринга и Макенхаупта. Так, в работе Койфмана и Феллермана [3] доказано, что каждый класс Геринга содержится в некотором классе Макенхаупта и наоборот, т.е. имеют место включения вида

$$A_q(B) \subset G_p(C) \quad (1.3)$$

и

$$G_{p_1}(C_1) \subset A_{q_1}(B_1). \quad (1.4)$$

В работе Боярского [4] для фиксированного класса $G_p(C)$ была поставлена задача нахождения предельного значения $\varepsilon = \varepsilon(n, p, C)$ во включении (1.2). Асимптотическая оценка такого $\varepsilon(n, p, C)$ при $C \rightarrow 1+$ получена Боярским [4], [5] и Виком [6]. В последнее время получены и другие асимптотические зависимости между параметрами классов Геринга и Макенхаупта (см., например, [7]).

В одномерном случае при решении поставленного вопроса удалось продвинуться дальше. Так, для монотонных функций Сбордине и Д'Апуццо [8], [9] были получены точные границы показателей, при которых имеют место вложения (1.2) для классов Геринга. Именно в [9] показано, что если невозрастающая на $[a, b]$ функция $f \in G_p(C)$, то для любого $p_1 < p_0$ существует такое C_1 , не зависящее от f , что $f \in G_{p_1}(C_1)$, где число $p_0 > p$ определяется как корень уравнения

$$\frac{p_0 - p}{p_0} \left(\frac{C p_0}{p_0 - 1} \right)^p = 1,$$

причем значение p_0 , вообще говоря, нельзя увеличить.

Кореновским [10] последний результат был обобщен на случай произвольной функции одной переменной. Также в [10] находятся точные границы показателей, при которых в одномерном случае имеют место вложения (1.1) для классов Макенхаупта. Именно в [10] показано, что если функция $f \in A_q(B)$ на $[a, b]$, то для любого $q_1 > q_0$ существует такое B_1 , не зависящее от f , что $f \in A_{q_1}(B_1)$, где число $q_0 > 1$ определяется равенством

$$\frac{q - q_0}{q - 1} (B q_0)^{1/(q-1)} = 1,$$

причем значение q_0 , вообще говоря, нельзя увеличить.

Таким образом, в одномерном случае решен вопрос нахождения точных границ показателей, при которых имеют место включения вида (1.1) и (1.2). Для включений вида (1.3) и (1.4) этот вопрос, насколько нам известно, оставался открытым.

Целью данной работы является нахождения точных границ показателей, при которых имеют место включения вида (1.4). Главный результат представлен в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $n = 1$, $p > 1$ и $C > 1$, а $q_0 > 1$ определяется как корень уравнения

$$q_0 \cdot \left(\frac{1}{1 + p(q_0 - 1)} \right)^{1/p} = C.$$

Тогда для любого $q \in (q_0, +\infty)$ существует $B = B(p, C, q) < \infty$ такое, что имеет место включение

$$G_p(C) \subset A_q(B),$$

причем для $q \leq q_0$ это включение неверно при любом B .

Для доказательства этой теоремы сначала рассматривается ее аналог для монотонных функций. Затем с помощью соответствующего неравенства для равноизмеримых перестановок (теорема А, п. 2) осуществляется переход от монотонных функций к произвольным. Такой переход применялся и ранее, например, Франциози и Москарелло [11] для доказательства вложений классов Геринга. Позднее, благодаря точным оценкам перестановок в [10] этот переход стал пригоден для получения точных показателей в (1.1) и (1.2) в одномерном случае.

Основным этапом в доказательстве теоремы 1 является получение ее аналога для монотонных функций (теорема 1', п. 3). Тот факт, что точность предельных показателей для включений вида (1.1) и (1.2) может быть проверена на степенных функциях, навела на мысль о целесообразности выработки соответствующего подхода к доказательству теоремы 1'. Метод доказательства теоремы 1' отличается от метода, использованного в работах [9] и [10], и заключается в сравнении монотонных функций со степенными.

Автор глубоко благодарен А. А. Кореновскому за постановку задачи, ценные советы и плодотворные обсуждения а также В. И. Коляде за внимание и полезные замечания, высказанные при подготовке данной работы к печати.

2. Вспомогательные результаты. Обозначим через Φ класс всех положительных на $[0, +\infty)$ выпуклых вниз функций.

ЛЕММА 2.1. Пусть функции f и g не убывают на (a, b) . Для того чтобы при любой $\varphi \in \Phi$ имело место неравенство

$$\int_a^b \varphi(g(x)) dx \leq \int_a^b \varphi(f(x)) dx,$$

необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие два условия:

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

и

$$\int_a^x g(y) dy \geq \int_a^x f(y) dy \quad (a \leq x \leq b).$$

В работе [12] доказан аналог этой леммы для невозрастающих функций f и g . Лемма 2.1 непосредственно следует из [12], если рассмотреть функции $g(a+b-x)$ и $f(a+b-x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $p > 1$ и функция f задана на интервале (a, b) . Будем обозначать

$$G_p(f) \stackrel{\text{def}}{=} G_p(f; (a, b)) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{I \subset (a, b)} \left(\int_I f^p(x) dx \right)^{1/p} \left(\int_I f(x) dx \right)^{-1},$$

где верхняя грань берется по всем подинтервалам $I \subset (a, b)$.

В дальнейшем нам понадобится следующее свойство параметров классов Геринга для степенных функций.

ЛЕММА 2.2. Если $p > 1$ и $\alpha > -1/p$, то

$$G_p(x^\alpha) \equiv G_p(x^\alpha; (0, 1)) = \frac{1 + \alpha}{(1 + p\alpha)^{1/p}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению $G_p(f)$ имеем

$$\begin{aligned} G_p(x^\alpha) &= \sup_{(a, b) \subset (0, 1)} \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b x^{p\alpha} dx \right)^{1/p} \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b x^\alpha dx \right)^{-1} \\ &= \frac{1 + \alpha}{(1 + p\alpha)^{1/p}} \cdot \sup_{0 < a < b < 1} (b-a)^{1-1/p} (b^{p\alpha+1} - a^{p\alpha+1})^{1/p} (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1})^{-1}. \end{aligned}$$

Обозначим $t \equiv b/a$ и запишем

$$\begin{aligned} &(b-a)^{1-1/p} (b^{p\alpha+1} - a^{p\alpha+1})^{1/p} (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1})^{-1} \\ &= (t-1)^{1-1/p} (t^{p\alpha+1} - 1)^{1/p} (t^{\alpha+1} - 1)^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta(t, p, \alpha), \end{aligned}$$

где $t > 1$, $p > 1$ и $\alpha > -1/p$. Лемма будет доказана, если мы покажем, что

$$\sup_{t > 1} \zeta(t, p, \alpha) = 1$$

для любых фиксированных $p > 1$ и $\alpha > -1/p$.

Сначала покажем, что $\zeta(t, p, \alpha) \leq 1$ для любых $t > 1$, $p > 1$ и $\alpha > -1/p$. Зафиксируем $t > 1$, $p > 1$ и обозначим $v \equiv t^\alpha$. Тогда

$$\zeta(t, p, \alpha) \equiv \xi(v) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(v^p t - 1)^{1/p}}{vt - 1} (t-1)^{1-1/p},$$

где $v \in (t^{-1/p}, +\infty)$. Исследуя производную $\xi'(v)$, при наших ограничениях легко видеть, что на промежутке $(t^{-1/p}, +\infty)$ функция $\xi(v)$ принимает максимальное значение в точке $v = 1$, причем $\xi(1) = 1$. Следовательно, $\zeta(t, p, \alpha) \leq 1$.

Ясно, что при фиксированных $p > 1$ и $\alpha > -1/p$ имеет место равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \zeta(t, p, \alpha) = 1.$$

Из вышесказанного следует, что $\sup_{t > 1} \zeta(t, p, \alpha) = 1$.

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Из леммы 2.2 сразу следует, что если $0 < \alpha < \beta$ и $p > 1$, то $G_p(x^\alpha; (0, 1)) < G_p(x^\beta; (0, 1))$.

Для изучения свойств функций часто бывает эффективным рассмотрение их равноизмеримых перестановок. Напомним определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Невозрастающей перестановкой функции f на промежутке I называется функция

$$f^*(t) = \sup_{\substack{e \subset I, \\ |e| \geq t}} \inf_{x \in e} f(x) \quad (0 \leq t \leq |I|).$$

Ниже нам понадобится следующая точная оценка перестановки.

ТЕОРЕМА А (см. [10]). Пусть $\varphi \in \Phi$ и функция f такая, что $\varphi(f) \in L[a, b]$. Тогда

$$\sup_{I \subset (0, b-a)} \frac{\int_I \varphi(f^*(t)) dt}{\varphi\left(\int_I f^*(t) dt\right)} \leq \sup_{J \subset (a, b)} \frac{\int_J \varphi(f(x)) dx}{\varphi\left(\int_J f(x) dx\right)},$$

где верхние грани берутся по всем подинтервалам соответствующих интервалов.

3. Доказательство теоремы 1. Как уже отмечалось во введении, сначала (см. ниже теорему 1') мы докажем аналог теоремы 1 для неубывающих функций, а затем обобщим его на случай произвольных функций одной переменной.

Для доказательства теоремы 1' нам понадобится следующая

ЛЕММА 3.1. Пусть числа $p > 1$ и $0 < \tau < \alpha < +\infty$. Тогда существует $\varepsilon = \varepsilon(\alpha, \tau) > 0$ такое, что для любой неубывающей на $(0, 1)$ функции f , удовлетворяющей условиям

$$G_p(f; (0, 1)) \leq G_p(x^\tau; (0, 1)) \quad \text{и} \quad \int_0^1 f(x) dx \geq 2 \int_0^1 x^\tau dx,$$

имеет место неравенство $f(x) \geq x^\alpha$, $0 < x < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проведем от противного. Предположим, что утверждение леммы неверно, т.е. предположим, что имеет место следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ А. Для любого $\varepsilon > 0$ существует неубывающая на $(0, 1)$ функция f , для которой

$$G_p(f; (0, 1)) \leq G_p(x^\tau; (0, 1)), \quad (3.1)$$

$$\int_0^1 f(x) dx \geq 2 \int_0^1 x^\tau dx, \quad (3.2)$$

и существует $a \in (0, \varepsilon)$ такое, что $f(a) < a^\alpha$.

Положим $\beta = (\alpha + \tau)/2$.

Очевидно, для любого $h < 1/3$ верно неравенство

$$h^{\beta+1} < \frac{1}{2} \int_h^1 x^\beta dx. \quad (3.3)$$

Возьмем $\varepsilon < 1/3$, и пусть f и a – произвольные функция и число из утверждения А с выбранным ε .

Возьмем точку $h_1 = a^{\alpha/\beta}$.

Заметим, что для любого $x \in [h_1, a]$ верно $f(x) < x^\beta$. Действительно, при $x \in [h_1, a]$ имеем

$$f(x) \leq f(a) < a^\alpha = (h_1^{\beta/\alpha})^\alpha = h_1^\beta \leq x^\beta.$$

Так как $h_1 < a < \varepsilon < 1/3$, то, в силу (3.3) верно неравенство

$$\int_0^{h_1} f(x) dx \leq h_1^{\beta+1} < \frac{1}{2} \int_{h_1}^1 x^{\beta} dx. \quad (3.4)$$

На промежутке $[h_1, 1]$ рассмотрим функцию

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{h_1}^x f(y) dy - \int_{h_1}^x y^{\beta} dy.$$

Очевидно, F непрерывна, $F(h_1) = 0$ и при $x \in (h_1, a)$ имеет место неравенство $F(x) < 0$.

Определим знак $F(1)$. Учитывая (3.4) и (3.2), имеем:

$$\begin{aligned} F(1) &= \int_{h_1}^1 f(y) dy - \int_{h_1}^1 y^{\beta} dy = \int_{h_1}^1 f(y) dy + \frac{1}{2} \int_{h_1}^1 y^{\beta} dy - \frac{3}{2} \int_{h_1}^1 y^{\beta} dy \\ &> \int_{h_1}^1 f(y) dy + \int_0^{h_1} f(y) dy - \frac{3}{2} \int_{h_1}^1 y^{\beta} dy = \int_0^1 f(y) dy - \frac{3}{2} \int_{h_1}^1 y^{\beta} dy \\ &\geq 2 \int_0^1 y^{\tau} dy - \frac{3}{2} \int_{h_1}^1 y^{\beta} dy > 0. \end{aligned}$$

Из перечисленных свойств функции F следует существование $h_2 \in (a, 1)$ такого, что $F(h_2) = 0$ и для любого $x \in (h_1, h_2)$ верно неравенство $F(x) < 0$.

Таким образом, для функций f и x^{β} на промежутке $[h_1, h_2]$ выполнены все условия леммы 2.1. Взяв в условии леммы 2.1 $\varphi(s) = s^p$, получим

$$\int_{h_1}^{h_2} f^p(x) dx \geq \int_{h_1}^{h_2} x^{p\beta} dx.$$

Заметим, что

$$\frac{h_2}{h_1} > \frac{a}{h_1} = \frac{a}{a^{\alpha/\beta}} = a^{1-\alpha/\beta} > \varepsilon^{1-\alpha/\beta}. \quad (3.5)$$

Подводя итог вышесказанному, получаем: для любого $\varepsilon < 1/3$ и для любой функции f из утверждения А с выбранным ε существуют h_1 и h_2 из $(0, 1)$ такие, что $h_2/h_1 > \varepsilon^{1-\alpha/\beta}$, и имеет место неравенство

$$\begin{aligned} G_p(f) &\geq \left(\int_{h_1}^{h_2} f^p(x) dx \right)^{1/p} \left(\int_{h_1}^{h_2} f(x) dx \right)^{-1} \geq \left(\int_{h_1}^{h_2} x^{p\beta}(x) dx \right)^{1/p} \left(\int_{h_1}^{h_2} x^{\beta} dx \right)^{-1} \\ &= \left[\frac{1}{1+p\beta} (h_2^{p\beta+1} - h_1^{p\beta+1}) \frac{1}{h_2 - h_1} \right]^{1/p} \left[\frac{1}{1+\beta} (h_2^{1+\beta} - h_1^{1+\beta}) \frac{1}{h_2 - h_1} \right]^{-1} \\ &= \left[\frac{1}{1+p\beta} \left(\left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{p\beta+1} - 1 \right) \frac{1}{h_2/h_1 - 1} \right]^{1/p} \left[\frac{1}{1+\beta} \left(\left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{1+\beta} - 1 \right) \frac{1}{h_2/h_1 - 1} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Если будем выбирать ε достаточно малым, то в силу неравенства (3.5) правая часть (3.6) будет сколь угодно мало отличаться от

$$\left(\frac{1}{1+p\beta} \right)^{1/p} \left(\frac{1}{1+\beta} \right)^{-1}.$$

Но в силу леммы 2.2 и замечания 2.1

$$\left(\frac{1}{1+p\beta}\right)^{1/p} \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{-1} = G_p(x^\beta) > G_p(x^\tau).$$

Значит, выбирая ε достаточно малым, мы получим, что для любой функции f , удовлетворяющей утверждению А, из (3.6) будет следовать неравенство $G_p(f) > G_p(x^\tau)$, противоречащее (3.1).

Полученное противоречие доказывает лемму.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Обозначим $A_q^*(B)$ множество всех невозрастающих функций из $A_q(B)$, а через $G_p^*(C)$ – множество всех невозрастающих функций из $G_p(C)$.

Если в дальнейшем будет необходимо уточнить множество Q , на котором рассматриваются классы $A_q(B)$ или $G_p(C)$, мы будем использовать обозначения

$$A_q(B; Q) \equiv A_q(B) \quad \text{и} \quad G_p(C; Q) \equiv G_p(C).$$

ТЕОРЕМА 1'. Пусть $p \in (1, +\infty)$ и $C > 1$. Тогда

1) уравнение

$$C = q_0 \left(\frac{1}{1+p(q_0-1)} \right)^{1/p} \quad (3.7)$$

имеет единственный корень $q_0 > 1$;

2) для любого $q > q_0$ существует $B = B(p, C, q) < \infty$ такое, что для любого интервала (a, b)

$$G_p^*(C; (a, b)) \subset A_q^*(B; (a, b));$$

3) при $q \leq q_0$ утверждение 2) теряет силу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем каждое утверждение теоремы.

1) Следует из того, что правая часть (3.7) непрерывна как функция q_0 и строго возрастает от 1 до $+\infty$ при $q_0 > 1$.

2) Зафиксируем $q > q_0$ и покажем, что если произвольная невозрастающая на (a, b) функция $f \in G_p(C)$, то $f \in A_q(B)$, где B – некоторая постоянная, не зависящая от f и (a, b) .

Обозначим $q_1 = (q + q_0)/2$.

Возьмем произвольный интервал $(h_1, h_2) \subset (a, b)$.

Обозначим $g_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x(h_1 - h_2) + h_2)$ и рассмотрим

$$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2 \int_0^1 y^{q_0-1} dy}{\int_0^1 g_1(y) dy} \cdot g_1(x), \quad 0 < x < 1.$$

Легко проверить, что g не убывает на $(0, 1)$ и

$$\left(\int_{h_1}^{h_2} f(x) dx \right) \left(\int_{h_1}^{h_2} f^{-1/(q-1)}(x) dx \right)^{q-1} = \left(\int_0^1 g(x) dx \right) \left(\int_0^1 g^{-1/(q-1)}(x) dx \right)^{q-1}. \quad (3.8)$$

Очевидно,

$$G_p(g; (0, 1)) = G_p(f; (h_1, h_2)) \leq G_p(f; (a, b)) \leq C.$$

Далее, по лемме 2.2 имеем

$$C = q_0 \left(\frac{1}{1 + p(q_0 - 1)} \right)^{1/p} = G_p(x^{q_0-1}; (0, 1)).$$

Поэтому $G_p(g; (0, 1)) \leq G_p(x^{q_0-1}; (0, 1))$.

Непосредственно из определения функции g следует, что

$$\int_0^1 g(x) dx = 2 \int_0^1 x^{q_0-1} dx. \quad (3.9)$$

Таким образом, для чисел p и $q_0 - 1 < q_1 - 1$ и функции g выполнены условия леммы 3.1. В силу леммы 3.1 существует $\varepsilon = \varepsilon(q_0, q_1)$, не зависящее от функции g , такое, что $g(x) \geq x^{q_1-1}$, $0 < x < \varepsilon$. Отсюда

$$\int_0^1 g^{-1/(q-1)}(x) dx \leq \int_0^\varepsilon x^{-(q_1-1)/(q-1)} dx + (1 - \varepsilon) \varepsilon^{-(q_1-1)/(q-1)} < +\infty. \quad (3.10)$$

Подставляя (3.10) и (3.9) в (3.8), получим

$$\begin{aligned} \left(\int_{h_1}^{h_2} f(x) dx \right) \left(\int_{h_1}^{h_2} f^{-1/(q-1)}(x) dx \right)^{q-1} &= \left(\int_0^1 g(x) dx \right) \left(\int_0^1 g^{-1/(q-1)}(x) dx \right)^{q-1} \\ &\leq \left(2 \int_0^1 x^{q_0-1} dx \right) \left(\int_0^\varepsilon x^{-(q_1-1)/(q-1)} dx + (1 - \varepsilon) \varepsilon^{-(q_1-1)/(q-1)} \right)^{q-1}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Заметим, что правая часть (3.11) не зависит от функции f и выбора промежутков (a, b) и (h_1, h_2) , а зависит только от q_0, q_1, q и ε , т.е. от p, C и q . Обозначим правую часть (3.11) через $B \equiv B(p, C, q)$. Таким образом, мы получили, что для любого промежутка $(h_1, h_2) \subset (a, b)$ имеет место неравенство

$$\left(\int_{h_1}^{h_2} f(x) dx \right) \left(\int_{h_1}^{h_2} f^{-1/(q-1)}(x) dx \right)^{q-1} \leq B,$$

что доказывает утверждение 2).

3) Покажем, что для любых $p > 1$ и $C > 1$ в классе $G_p(C; (0, 1))$ существует такая функция f , которая не только не принадлежит никакому классу $A_q(B; (0, 1))$, где $q \leq q_0$ и q_0 — положительный корень уравнения (3.7), но даже не суммируема со степенью $-1/(q_0 - 1)$.

Действительно, зафиксируем произвольные $p > 1$ и $C > 1$. Пусть $q_0 = q_0(p, C)$ — положительный корень уравнения (3.7). Возьмем $f(x) = x^{q_0-1}$. Ясно, что $f^{-1/(q_0-1)}$ не суммируема на $(0, 1)$. Покажем, что $f(x) \in G_p(C)$. По лемме 2.2

$$G_p(f; (0, 1)) = q_0 \left(\frac{1}{1 + p(q_0 - 1)} \right)^{1/p} = C;$$

значит, $f \in G_p(C; (0, 1))$.

Теорема доказана полностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Для доказательства теоремы 1 нам осталось показать, что в утверждении 2) теоремы 1' вместо включения $G_p^*(C) \subset A_q^*(B)$ можно гарантировать $G_p(C) \subset A_q(B)$.

Зафиксируем произвольную функцию $f \in G_p(C; (a, b))$ и возьмем произвольный интервал $I \subset (a, b)$. Рассмотрим сужение $f|_I$. В силу теоремы А $(f|_I)^* \in G_p(C; (0, |I|))$. Применяя к перестановке $(f|_I)^*$ теорему 1', получим, что для любого $q > q_0$ существует $B = B(p, q, C)$ такое, что $(f|_I)^* \in A_q(B; (0, |I|))$. Значит,

$$\begin{aligned} & \left(\int_I f(x) dx \right) \left(\int_I f^{-1/(q-1)}(x) dx \right)^{q-1} \\ &= \left(\int_0^{|I|} (f|_I)^*(t) dt \right) \left(\int_0^{|I|} ((f|_I)^*)^{-1/(q-1)}(t) dt \right)^{q-1} \leq B. \end{aligned}$$

Так как $I \subset (a, b)$ – произвольный интервал, то отсюда получаем, что $f \in A_q(B; (a, b))$.

В силу произвольности выбора функции $f \in G_p(C; (a, b))$ имеем $G_p(C; (a, b)) \subset A_q(B; (a, b))$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Muckenhoupt B. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 165. P. 207–226.
- [2] Gehring F. W. The L^p -integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping // Acta Math. 1973. V. 130. P. 265–277.
- [3] Coifman R. R., Fefferman C. Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals // Studia Math. 1974. V. 51. № 3. P. 241–250.
- [4] Bojarski B. Remarks on the stability of reverse Hölder inequalities and quasiconformal mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. A. Math. 1985. V. 10. P. 291–296.
- [5] Bojarski B. On Gurov–Reshetnyak classes // Proc. BMO-Seminar (Joensuu, Finland, June 1988): Joensuu Univ., 1989.
- [6] Wik I. Reverse Hölder inequalities with constant close to 1 // Ricerche di Matematica. 1990. V. 39. № 1. P. 151–157.
- [7] Korey M. B. Ideal weights: asymptotically optimal versions of doubling, absolute continuity, and bounded mean oscillation // J. Fourier Anal. Appl. 1998. V. 4. № 4, 5. P. 491–519.
- [8] Sbordone C. Rearrangement of functions and reverse Hölder inequalities // Research Notes in Math. 1983. V. 125. P. 139–148.
- [9] D'Apuzzo L., Sbordone C. Reverse Hölder inequalities. A sharp result // Rendiconti di Math. Ser. VII. 1990. V. 10. P. 357–366.
- [10] Кореновский А. А. О точном продолжении обратного неравенства Гёльдера и условия Макенхаупта // Матем. заметки. 1992. Т. 52. № 6. С. 32–44.
- [11] Franciosi M., Moscarriello G. Higher integrability results // Manuscripta Math. 1985. V. 52. № 1–3. P. 151–170.
- [12] Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G. Some simple inequalities satisfied by convex functions // Messenger of Math. 1929. V. 58. P. 145–152.