Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Н. Мирошин, Асимптотический ряд для интеграла Вебера–Шафхейтлина, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 5, 751–757

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm786>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 02:14:17

УДК 517.5

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ РЯД ДЛЯ ИНТЕГРАЛА ВЕБЕРА–ШАФХЕЙТЛИНА

Р. Н. Мирошин

Получен асимптотический степенной ряд для упомянутого в заглавии интеграла, коэффициенты которого суть обобщенные функции.

Библиография: 7 названий.

Ранее [1] нами найден главный член асимптотики при $\rho \uparrow 1$ интеграла

$$I_c^\rho(\mu, \nu) = \int_0^\infty x^{-\rho} K_{i\mu}(x) K_{i\nu}(cx) dx, \quad (1)$$

в котором $K_{i\lambda}(x)$ – модифицированная функция Бесселя третьего рода (функция Макдональда) [2], [3], $c > 0$, $\mu > 0$, $\nu > 0$. Этот интеграл относится к типу разрывных интегралов Вебера–Шафхейтлина [2], выделяясь среди них наиболее сложным асимптотическим поведением при $\rho \uparrow 1$. В случае $c = 1$ асимптотическое поведение интеграла (1) задается формулой

$$I_1^\rho(\mu, \nu) \rightarrow \frac{\pi^2}{(\mu + \nu) \operatorname{sh} \frac{\pi(\mu + \nu)}{2}} \delta(\nu - \mu), \quad \rho \uparrow 1 \quad (2)$$

(это свойство используется при обращении преобразования Конторовича–Лебедева [4]). С необходимостью изучения асимптотики (1) для $c \neq 1$ мы встретились при вычислении нелинейных функционалов от траекторий гауссовских марковских дифференцируемых процессов, например, таких функционалов, как моменты и функция распределения числа нулей процесса [5], [6]. Предельное при $\rho \uparrow 1$ выражение для $I_c^\rho(\mu, \nu)$ оказалось в случае $c \neq 1$ сложнее, чем (2), и включает кроме δ -функции обобщенную функцию $\operatorname{Vp}(1/(\nu - \mu))$. В настоящей заметке, опираясь на метод, использованный нами в [1], мы выводим асимптотический ряд для интеграла (1), решив таким образом проблему его вычисления при ρ , близких к единице. Для остальных значений $\rho < 1$ этот интеграл подсчитывается по точной формуле [2], [3], в которую входят произведение гамма- и бета-функций и гипергеометрической функции Гаусса. Отметим, что использование этой формулы для нахождения асимптотического ряда – путь гораздо более сложный, чем предлагаемый нами.

В результат войдут обобщенные функции $\delta(x)$, $\delta^{(n)}(x)$, $\operatorname{Vp} x^{-n}$, где $n \geq 1$ – целое число. Вводя для этих функций общее обозначение $\omega(x)$, определим их как линейные

непрерывные функционалы $(\omega(x), \varphi(x))$ на пространстве $K(-b, a)$, $a > 0$, $b > 0$, бесконечно дифференцируемых в интервале $(-b, a)$ функций $\varphi(x)$, сопоставляющие $\varphi(x)$ числа в правых частях нижеследующих формул:

$$(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0), \quad (\delta^{(n)}(x), \varphi(x)) = (-1)^n \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}, \quad (3)$$

$$\left(\text{Vp} \frac{1}{x}, \varphi(x) \right) = \text{Vp} \int_{-b}^a \varphi(x) \frac{dx}{x}, \quad (4)$$

$$\left(\text{Vp} \frac{1}{x^{n+1}}, \varphi(x) \right) = \text{Vp} \int_{-b}^a \left[\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)x^k}{k!} \right] \frac{dx}{x^{n+1}}, \quad n \geq 1. \quad (5)$$

Символом Vp перед интегралом обозначается его главное значение в смысле Коши:

$$\text{Vp} \int_{-b}^a f(x) dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_{-b}^{-\varepsilon} f(x) dx + \int_{\varepsilon}^a f(x) dx \right).$$

Для обобщенных функций $\delta^{(n)}(x)$ границы интервала $[-b, a]$ при $a > 0$, $b > 0$ не имеют значения, но для $\text{Vp} x^{-n}$ они существенны. Например,

$$\left(\text{Vp} \frac{1}{x}, 1 \right) = \text{Vp} \int_{-b}^a \frac{dx}{x} = \ln \frac{a}{b}. \quad (6)$$

Будем говорить, что *функция $f(\alpha, x)$ раскладывается в обобщенный асимптотический ряд в пространстве $K(-b, a)$* и писать

$$f(\alpha, x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \omega_n(\alpha), \quad \alpha \downarrow 0,$$

если $\omega_{n+1}(\alpha) = o(\omega_n(\alpha))$ и для любой функции $\varphi(x) \in K(-b, a)$ ряд

$$(f(\alpha, x), \varphi(x)) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (A_n(x), \varphi(x)) \omega_n(\alpha), \quad \alpha \downarrow 0,$$

– асимптотический ряд в обычном смысле для функционала $(f(\alpha, x), \varphi(x))$.

ТЕОРЕМА. При $c > 0$, $\mu > 0$, $\nu > 0$ функция $f(\alpha, \beta) \equiv I_c^p(\mu, \nu)$ раскладывается в следующий обобщенный асимптотический ряд в пространстве $K(-b, a)$:

$$I_c^p(\mu, \nu) \sim \frac{\pi}{4\gamma \operatorname{sh} \pi \gamma} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\beta|\gamma, c) \frac{\alpha^n}{n!}, \quad \alpha = \frac{1-\rho}{2} \downarrow 0,$$

где обозначено $2\beta = \nu - \mu$, $2\gamma = \nu + \mu$, $\beta \in [-b, a]$,

$$A_n(\beta|\gamma, c) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a_k(\gamma) B_{n-k}(\beta|\gamma, c), \quad (7)$$

$$a_n(\gamma) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (\ln 4)^{n-k} b_k, \quad (8)$$

$$b_0 = 1, \quad b_{n+1} \equiv b_{n+1}(\gamma) = v_n + \sum_{k_1=1}^n \frac{n!}{(n-k_1)! k_1!} (1 - \delta_{n0}) v_{n-k_1} v_{k_1-1} \\ + \sum_{j=2}^n \sum_{k_1=j}^n \sum_{k_2=j-1}^{k_1-1} \cdots \sum_{k_j=1}^{k_{j-1}-1} \frac{n!(1 - \delta_{n0})}{(n-k_1)! k_j!} v_{n-k_1} v_{k_j-1} \prod_{r=1}^{j-1} \frac{v_{k_r - k_{r+1} - 1} (1 - \delta_{nr})}{(k_r - k_{r+1} - 1)! k_r}, \quad (9)$$

$$v_n \equiv v_n(\gamma) = \psi^{(n)}(i\gamma) + \psi^{(n)}(-i\gamma), \quad \psi^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} \ln \Gamma(x),$$

$$B_n(\beta|\gamma, c) = K_n(\beta, \gamma; c) + \pi \delta^{(n)}(\beta) \cos\left(\frac{n\pi}{2} - \gamma \ln c\right) \\ + n! [\text{Vp } \beta^{-n-1} - d_n(\beta)] \sin\left(\frac{n\pi}{2} + \gamma \ln c\right), \quad (10)$$

$$d_0(\beta) = 0, \quad d_n(\beta) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)! k} \delta^{n-k}(\beta) [a^{-k} - (-b)^{-k}], \quad (11)$$

$$K_n(\beta, \gamma; c) = \int_0^1 \left[\cos\left(\beta \ln x - \gamma \ln \frac{1+cx}{x+c}\right) \ln^n \frac{x}{(x+c)(1+cx)} \right. \\ \left. - \cos(\beta \ln x + \gamma \ln c) \ln^n \frac{x}{c} \right] \frac{dx}{x}, \quad (12)$$

а $\Gamma(x)$ – гамма-функция, $\psi^{(n)}(x)$ – полигамма-функция, δ_{ij} – символ Кронекера.

ЗАМЕЧАНИЕ. Коэффициенты (9) $b_n \equiv b_n(\gamma)$ определяются равенством (см. лемму 4 ниже)

$$\frac{d^n}{d\alpha^n} \Gamma(\alpha + i\gamma) \Gamma(\alpha - i\gamma) \Big|_{\alpha=0} = \Gamma(i\gamma) \Gamma(-i\gamma) b_n(\gamma).$$

Первые четыре значения суть

$$b_1 = v_0, \quad b_2 = v_1 + v_0^2, \quad b_3 = v_2 + 3v_1 v_0 + v_0^3, \quad b_4 = v_3 + 4v_2 v_0 + 6v_1 v_0^2 + 3v_1^2 + v_0^4,$$

где $v_k(\gamma)$ те же, что и в формулировке теоремы.

Доказательство теоремы опирается на леммы 1–4, которые могут быть полезны за пределами рассматриваемой конкретной задачи.

ЛЕММА 1. Для $\varphi(x) \in K(-b, a)$ справедлива формула

$$\int_{-b}^a c_n(x) \frac{dx}{x^{n+1}} = \left(\text{Vp } \frac{1}{x^{n+1}}, \varphi(x) \right) - \frac{\varphi^{(n)}(0) (\text{Vp } 1/x, 1)}{n!}, \quad (13)$$

в которой

$$c_n(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^n \frac{\varphi^{(k)}(0)x^k}{k!}. \quad (14)$$

В самом деле, по определению $\text{Vp } x^{-n-1}$ (см. (5))

$$\left(\text{Vp } \frac{1}{x^{n+1}}, \varphi(x) \right) = \text{Vp} \int_{-b}^a \left[c_n(x) + \frac{\varphi^{(n)}(0)x^n}{n!} \right] \frac{dx}{x^{n+1}}. \quad (15)$$

Так как $c_n(x) = O(x^{n+1})$ при малых x , то

$$\text{Vp} \int_{-b}^a c_n(x) x^{-n-1} dx = \int_{-b}^a c_n(x) x^{-n-1} dx, \quad (16)$$

и мы немедленно получаем (13) из (15) и (16), поскольку интеграл от второго слагаемого в (15) равен $\varphi^{(n)}(0)(\text{Vp } 1/x, 1)/n!$.

ЛЕММА 2. *Имеют место следующие обобщенные асимптотические ряды в пространстве $K(-b, a)$:*

$$\frac{1}{x \mp i\alpha} \sim \sum_{n=0}^{\infty} (\pm i\alpha)^n [(x \mp i0)^{-n-1} - d_n(x)], \quad \alpha \downarrow 0, \quad (17)$$

где $d_n(x)$ определены формулой (11) (при $\beta = x$), а

$$(x \mp i0)^{-n-1} = \text{Vp } x^{-n-1} \pm \frac{(-1)^n i \pi \delta^{(n)}(x)}{n!}. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим линейный функционал $(1/(x-i\alpha), \varphi(x))$ при $\varphi(x) \in K(-b, a)$. Очевидно,

$$\left(\frac{1}{x-i\alpha}, \varphi(x) \right) = \varphi(i\alpha) \left(\frac{1}{x-i\alpha}, 1 \right) + \left(1, \frac{\varphi(x) - \varphi(i\alpha)}{x-i\alpha} \right). \quad (19)$$

При $\alpha \neq 0$

$$\left(\frac{1}{x-i\alpha}, 1 \right) = \int_{-b}^a \frac{dx}{x-i\alpha} = \frac{1}{2} \ln \frac{a^2 + \alpha^2}{b^2 + \alpha^2} + i \left[\arctg \frac{a}{\alpha} + \arctg \frac{b}{\alpha} \right]$$

и это выражение раскладывается в асимптотический ряд

$$\ln \frac{a}{b} + i\pi - \sum_{k=1}^{\infty} (i\alpha)^k \frac{a^{-k} - (-b)^{-k}}{k}, \quad \alpha \downarrow 0.$$

Аналогичным образом (ряд Тейлора)

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(i\alpha)}{x-i\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} (i\alpha)^n c_n(x) x^{-n-1}, \quad (20)$$

где коэффициенты $c_n(x)$ те же, что и в лемме 1 (см. (14)). Используя эту лемму и линейность функционала, для второго слагаемого в (19) получаем

$$\left(1, \frac{\varphi(x) - \varphi(i\alpha)}{x - i\alpha}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (i\alpha)^n \left(\text{Vp} \frac{1}{x^{n+1}}, \varphi(x)\right) - \varphi(i\alpha) \left(\text{Vp} \frac{1}{x}, 1\right), \quad (21)$$

так что в силу (20), (21) и (6) имеем из (19)

$$\left(\frac{1}{x - i\alpha}, \varphi(x)\right) = \varphi(i\alpha) \left\{ i\pi - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\alpha)^k}{k} [a^{-k} - (-b)^{-k}] + \sum_{n=0}^{\infty} (i\alpha)^n \left(\text{Vp} \frac{1}{x^{n+1}}, \varphi(x)\right) \right\}. \quad (22)$$

Представив $\varphi(i\alpha)$ рядом Тейлора по степеням α и перемножив асимптотические ряды в первом слагаемом в (22), видим, что

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x - i\alpha}, \varphi(x)\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} (i\alpha)^n \left\{ \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} i\pi + \left(\text{Vp} \frac{1}{x^{n+1}}, \varphi(x)\right) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^n \frac{\varphi^{(n-k)}(0)}{(n-k)!k} [a^{-k} - (-b)^{-k}] \right\}. \end{aligned}$$

Из этого выражения и вытекает (17), если вспомнить (3)–(5), (18) и (11). Тем же путем проводится и доказательство формулы для $1/(x + i\alpha)$.

Отметим, что конечность длины интервала $(-b, a)$ в определении пространства основных функций $K(-b, a)$ вызвала появление дополнительных слагаемых $d_n(x)$ в (17) по сравнению с формулами, обобщающими формулы Сохоцкого [7].

ЛЕММА 3. *Справедливы следующие обобщенные асимптотические ряды в пространстве $K(-b, a)$:*

$$\frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \left[\pi \delta^{(n)}(x) \cos \frac{n\pi}{2} + n! \left(\text{Vp} \frac{1}{x^{n+1}} - d_n(x) \right) \sin \frac{n\pi}{2} \right], \quad \alpha \downarrow 0, \quad (23)$$

$$\frac{x}{x^2 + \alpha^2} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \left[\pi \delta^{(n)}(x) \sin \frac{n\pi}{2} + n! \left(\text{Vp} \frac{1}{x^{n+1}} - d_n(x) \right) \cos \frac{n\pi}{2} \right], \quad \alpha \downarrow 0, \quad (24)$$

где $d_n(x)$ определены равенствами (11) (при $x = \beta$).

Формулы (23), (24) немедленно получаются из представления

$$\frac{2i\alpha}{x^2 + \alpha^2} = \frac{1}{x + i\alpha} - \frac{1}{x - i\alpha}, \quad \frac{2x}{x^2 + \alpha^2} = \frac{1}{x + i\alpha} + \frac{1}{x - i\alpha}$$

и предыдущей леммы 2 (см. (17)–(19)).

ЛЕММА 4. Если $\gamma > 0$, то имеет место сходящийся ряд

$$4^{\alpha-1} \Gamma(\alpha + i\gamma) \Gamma(\alpha - i\gamma) = \frac{\pi}{4\gamma \operatorname{sh} \pi\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\gamma) \frac{\alpha^n}{n!}, \quad (25)$$

в котором $a_n(\gamma)$ заданы равенствами (8), (9).

Это утверждение следует из аналитичности функции в левой части (25) при $\gamma > 0$. Перемножая ряды Тейлора для $4^{\alpha-1}$ и $\Gamma(\alpha + i\gamma) \Gamma(\alpha - i\gamma)$, мы и получаем (25), поскольку по правилу Лейбница дифференцирования произведения

$$\left. \frac{d^n}{d\alpha^n} \Gamma(\alpha + i\gamma) \Gamma(\alpha - i\gamma) \right|_{\alpha=0} = \Gamma(i\gamma) \Gamma(-i\gamma) b_n(\gamma),$$

где $\Gamma(i\gamma) \Gamma(-i\gamma) = \pi / (\gamma \operatorname{sh} \pi\gamma)$, а коэффициенты $b_n(\gamma)$ те же, что и в (9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. В [1] показано, что

$$I_c^\rho(\mu, \nu) = 4^{\alpha-1} \Gamma(\alpha + i\gamma) \Gamma(\alpha - i\gamma) F_c^\alpha(\beta, \gamma),$$

где

$$F_c^\alpha(\beta, \gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2it\beta} \psi_c^\gamma(e^t) dt}{(1 + 2c \cdot \operatorname{ch} 2t + c^2)^\alpha}, \quad \psi_c^\gamma(x) = \left(\frac{x^2 + c}{1 + cx^2} \right)^{i\gamma}.$$

Вследствие леммы 4 нам осталось только найти асимптотический ряд для интеграла $F_c^\alpha(\beta, \gamma)$. Замена переменной $\exp(-2t) = x$ приводит его к виду

$$2F_c^\alpha(\beta, \gamma) = \int_0^1 x^{\alpha-1} [f_\alpha(x|\beta, \gamma; c) + f_\alpha(x|-\beta, -\gamma; c)] dx, \quad (26)$$

где

$$f_\alpha(x|\beta, \gamma; c) = x^{-i\beta} (x + c)^{-i\gamma-\alpha} (1 + cx)^{i\gamma-\alpha}.$$

Прибавив к первому и второму слагаемым в квадратных скобках в (26) и вычтя из них соответственно $x^{-i\beta} c^{-i\gamma}$ и $x^{i\beta} c^{i\gamma}$ и взяв интегралы от $x^{\alpha-i\beta-1}$ и $x^{\alpha+i\beta-1}$, находим, что

$$2F_c^\alpha(\beta, \gamma) = \frac{c^{-i\gamma}}{\alpha - i\beta} + \frac{c^{i\gamma}}{\alpha + i\beta} + J_c^\alpha(\beta, \gamma) + J_c^\alpha(-\beta, -\gamma), \quad (27)$$

$$J_c^\alpha(\beta, \gamma) = \int_0^1 \left[\left(\frac{1 + cx}{x + c} \right)^{i\gamma} \exp \left(\alpha \ln \frac{x}{(x + c)(1 + cx)} \right) - c^{-i\gamma} \exp \left(\alpha \ln \frac{a}{b} \right) \right] \frac{dx}{x^{i\beta+1}}. \quad (28)$$

Заменим в (28) экспоненты их рядами Тейлора по степеням α . Мы получим асимптотический ряд

$$J_c^\alpha(\beta, \gamma) \sim \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(\beta, \gamma; c) \frac{\alpha^n}{n!}, \quad \alpha \downarrow 0, \quad (29)$$

в котором

$$Q_n(\beta, \gamma; c) = \int_0^1 x^{-i\beta-1} \left[\left(\frac{1 + cx}{x + c} \right)^{i\gamma} \ln^n \frac{x}{(x + c)(1 + cx)} - c^{-i\gamma} \frac{\ln^n x}{c} \right] dx. \quad (30)$$

Интегралы (30) сходятся при любом целом n и любых вещественных β и $\gamma > 0$. В самом деле, особенность подынтегральной функции возможна только при $x = 0$, но в окрестности нуля эта функция при $\gamma > 0$ имеет порядок $x^{-i\beta} \ln^n x$, а это интегрируемая особенность при вещественных β .

В том, что ряд (29) асимптотический, легко убедиться, заменяя ряды Тейлора для экспонент частными суммами с остаточным членом, который при интегрировании в $(0, 1)$ даст конечную величину, умноженную на порядок первого отброшенного члена.

Так как в (27) первых два и последних два слагаемых – комплексно-сопряженные величины, получаем из (27) в силу (29), (30)

$$F_c^\alpha(\beta, \gamma) \sim \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \cos(\gamma \ln c) + \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \sin(\gamma \ln c) + \sum_{n=0}^{\infty} K_n(\beta, \gamma; c) \frac{\alpha^n}{n!}, \quad (31)$$

где $K_n(\beta, \gamma; c)$ определены равенством (12).

Асимптотические ряды при $\alpha \downarrow 0$ для первых двух слагаемых в (31) построены нами в лемме 3. Используя (23)–(25), получаем из (31) обобщенный асимптотический ряд

$$F_c^\alpha(\beta, \gamma) \sim \sum_{n=0}^{\infty} B_n(\beta|\gamma; c) \frac{\alpha^n}{n!} \quad (32)$$

на функциях $\varphi(\beta) \in K(-b, a)$.

Перемножая асимптотические ряды (32) и (25) (лемма 4) и собирая коэффициенты при α^n , мы приходим к утверждению теоремы. Эта операция законна, так как перемножаются ряды по степеням α и так как только один из них является обобщенным асимптотическим рядом.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мирошин Р. Н. Асимптотическая оценка интеграла от произведения двух модифицированных бесселевых функций и степенной функции // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 3. С. 456–458.
- [2] Magnus W., Oberhettinger F., Soni R. P. Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics. New York: Springer, 1966.
- [3] Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
- [4] Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 2. М.: Наука, 1970.
- [5] Мирошин Р. Н. Convergence of the Longuet–Higgins series for Gaussian stationary Markov process of the first order // Теория вероятн. и ее прим. 1981. Т. 26. № 1. С. 101–120.
- [6] Мирошин Р. Н. Пересечения кривых гауссовскими процессами. Л.: Изд-во ЛГУ, 1981.
- [7] Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир, 1978.

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступило

26.01.1999

Исправленный вариант

03.03.2001