Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Морозов, Об одном описании пространств дифференцируемых функций, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 5, 758–768

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm787>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 13:37:09

УДК 517.5

ОБ ОДНОМ ОПИСАНИИ ПРОСТРАНСТВ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

А. Н. Морозов

В статье развит результат С. Н. Бернштейна, характеризующий пространство $C^k[a, b]$ средствами локальных приближений. Отрезок $[a, b]$ разбивается на непесекающиеся полуинтервалы, и на них рассматриваются наилучшие приближения функции многочленами степени не выше $k - 1$, разделенные на длины этих полуинтервалов в степени k . При стремлении длин полуинтервалов к нулю, поведение этих частных является критерием существования k -й производной функции. Теорема доказана в более сильной формулировке, а также распространена на пространства $W_p^k[a, b]$.

Библиография: 11 названий.

1. Введение и основные обозначения. Будут обсуждаться пространства действительных функций одной переменной, принимающей значения на конечном отрезке. В качестве базовых для дальнейших рассуждений берутся пространства $L_p = L_p[a, b]$, $1 \leq p < \infty$, – пространства функций, интегрируемых в степени p по Лебегу на отрезке $[a, b]$, и (при $p = \infty$) $C = C[a, b]$ – пространство непрерывных на $[a, b]$ функций.

Пусть отрезок (полуинтервал) I содержится в $[a, b]$. Обозначим через $|I|$ его длину, а для данной функции f из L_p ($f \in C$ при $p = \infty$) через $E_k(f, I)_p$ наилучшее приближение функции f многочленами степени не больше $k - 1$ по норме пространства $L_p[I]$.

В статье будет развит следующий результат (подход к описанию пространства C^k) С. Н. Бернштейна [1, с. 306].

ТЕОРЕМА 1. *Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы непрерывная функция f имела непрерывную производную порядка k во всех точках отрезка $[a, b]$, заключается в том, что*

$$\frac{E_k(f; [\alpha, \beta])_\infty}{(\beta - \alpha)^k} \rightarrow \varphi(x), \quad a \leq \alpha < x < \beta \leq b,$$

равномерно по x при $\alpha \rightarrow x$, $\beta \rightarrow x$, где непрерывная функция φ определяется равенством

$$k! 2^{2k-1} \varphi(x) = |f^{(k)}(x)|.$$

Ранее уже хорошо было известно [2, с. 23], что если $f \in C$ и существует $f^{(k)}(x)$, то

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{E_k(f; [x-h, x+h])_\infty}{(2h)^k} = \frac{|f^{(k)}(x)|}{k! 2^{2k-1}}.$$

Поэтому теорему Бернштейна можно рассматривать как некоторое обратное утверждение к результату Чебышева, т.е. смотреть на нее как на заключение о гладкости функции на основании предельного поведения локальных приближений в точках отрезка (обсуждение и аналогию с другими результатами см. [3, гл. 2]). Однако такой взгляд ставит теорему в изолированное положение, не распространяемое на другие стандартные пространства дифференцируемых функций. В статье [4] была предложена несколько иная, можно сказать “глобальная”, трактовка обсуждаемого результата. Она позволяет сформулировать однообразно соответствующие утверждения для пространств W_p^k ($1 \leq p < \infty$) и C^k (в [4] подробно обсуждался случай $p = 1$, имеющий наиболее глубокие аналогии с теоремой Бернштейна), а также усилить в нескольких отношениях эту теорему.

Введем еще некоторые обозначения.

Через τ_m обозначим разбиение полуинтервала $[a, b)$ на m полуинтервалов $\{I_i\}_{i=1}^m$, т.е. τ_m определяется набором точек $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ и состоит из полуинтервалов $I_i = [x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, \dots, m$.

Пусть

$$\lambda(\tau_m) = \max\{|I_i| : I_i \in \tau_m, i = 1, \dots, m\}$$

– мелкость разбиения τ_m .

Скажем, что кусочно-полиномиальная функция *подчинена разбиению* τ_m , если ее след на любом интервале из разбиения есть многочлен.

Для заданных функции f из L_p и разбиения τ_m построим ступенчатую функцию $\varphi(f, \tau_m)_{k,p}$, подчиненную разбиению τ_m и задаваемую соотношениями

$$\varphi(f, \tau_m)_{k,p}|_{I_i} = c_{k,p}^{-1} \frac{E_k(f, I_i)_p}{|I_i|^{k+1/p}};$$

здесь $c_{k,p} = E_k(x^k/k!; [0, 1])_p$; в частности, $c_{k,\infty} = 1/(k! 2^{2k-1})$. Ряд свойств таких ступенчатых функций рассматривался в статьях [4] и [5].

2. Описание пространств W_p^k . Пусть, как обычно, $W_p^k = \{f : f^{(k-1)} \text{ абсолютно непрерывна и } f^{(k)} \in L_p\}$ (при $p = \infty$ требуется существенная ограниченность $f^{(k)}$).

Необходимое и достаточное условие в теореме Бернштейна можно сформулировать как условие равномерной сходимости последовательности функций $\{\varphi(f, \tau_m)_{k,\infty}\}$ для любой последовательности разбиений $\{\tau_m\}$ с $\lambda(\tau_m) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Тогда эта теорема становится частью следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы функция f из L_p (из C при $p = \infty$) принадлежала пространству W_p^k (пространству C^k при $p = \infty$), необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности разбиений $\{\tau_m\}$ с $\lambda(\tau_m) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ последовательность функций $\{\varphi(f, \tau_m)_{k,p}\}$ сходилась по норме пространства L_p . При этом предельная функция совпадает с $|f^{(k)}|$ (находится в классе эквивалентных функций).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. В [4] соответствующее рассуждение проведено для случая $p = 1$. Совершенно очевидно, что оно пригодно для всех $1 \leq p \leq \infty$ (основные идеи содержатся в доказательстве необходимости условия теоремы 3 данной статьи).

Достаточность. В этом направлении рассуждение легче всего провести, используя известные факты о кусочно-полиномиальных приближениях на равномерных разбиениях. Обозначим через $U_m^k(f)_p = U_m^k(f; [a, b])_p$ наилучшее приближение функции f из L_p кусочно-полиномиальными функциями степени не больше $k - 1$, подчиненными равномерному разбиению полуинтервала $[a, b)$ на m частей, в норме пространства L_p . Пространство $k - 1$ раз непрерывно дифференцируемых функций, $(k - 1)$ -я производная которых имеет ограниченную (по Жордану) вариацию, обозначим через $C^{k-1}BV$.

Имеются следующие соотношения (см. [6]–[8]):

$$f \in L_1 \text{ и } U_m^k(f)_1 = O(m^{-k}) \iff f \in C^{k-1}BV, \quad (1)$$

$$f \in L_p \text{ (} f \in C \text{ при } p = \infty \text{) и } U_m^k(f)_p = O(m^{-k}) \iff f \in W_p^k \text{ (} 1 < p \leq \infty \text{)}. \quad (2)$$

Применимость этих фактов к нашему случаю обусловлена тем, что если обозначить через u_m разбиение полуинтервала $[a, b)$ на m одинаковых по длине полуинтервалов, то

$$\begin{aligned} \left(\frac{m}{b-a}\right)^k U_m^k(f)_p &= \frac{1}{(\lambda(u_m))^k} \left(\sum_{i=1}^m E_k(f, I_i)_p^p\right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{i=1}^m \left(\frac{E_k(f, I_i)_p}{|I_i|^{k+1/p}}\right)^p |I_i|\right)^{1/p} = c_{k,p} \|\varphi(f, u_m)_{k,p}\|_p, \end{aligned}$$

здесь $\{I_i\}_{i=1}^m$ – набор интервалов из разбиения u_m .

При $1 < p < \infty$ достаточность условия теоремы 2 сразу следует из (2), но случаи $p = 1$ и $p = \infty$ требуют дополнительного изучения. Это является следствием того, что пространства W_1^k и C^k не являются относительно полными (определение относительно (по Гальярдо) пополнения см. [9, с. 49]). Для $p = 1$ доказательство дано в статье [4]. Для $p = \infty$ заметим, что в данной статье (теорема 1*) будет сформулировано и доказано более общее относительно теоремы Бернштейна утверждение.

Как видно, в формулировке теоремы 2 можно ограничиться рассмотрением одной последовательности равномерных разбиений полуинтервала $[a, b)$. (Вместо нее можно было бы взять любую из последовательностей разбиений с так называемым “условием смешивания” (mixing condition); определение и наиболее важные результаты о них можно найти, например, в [10, гл. 6]; последовательность равномерных разбиений является самой простой и изученной из этого семейства.)

Введя обозначение $\varphi_m(f)_{k,p} = \varphi(f, u_m)_{k,p}$, теорему 2 можно переформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА 2*. Для того чтобы функция f из L_p ($1 \leq p < \infty$) принадлежала пространству W_p^k , необходимо и достаточно, чтобы последовательность функций $\{\varphi_m(f)_{k,p}\}$ сходилась в норме пространства L_p . При этом предельная функция совпадает с $|f^{(k)}|$.

3. Устойчивость сходимости. Рассмотрение последовательностей $\{\varphi_m(f)_{k,q}\}$ с переменным индексом q открывает интересную возможность перехода к пространствам с другой нормой, поскольку характер сходимости этих последовательностей, как будет видно, является одновременно и инвариантом относительно q и условием принадлежности функции f к соответствующему пространству: при сходимости в L_p ($1 \leq p < \infty$) – к W_p^k , при равномерной сходимости – к C^k . Для доказательства данного факта при $p = 1$ нам понадобится утверждение, близкое по формулировке и доказательству к классической теореме Лебега. Пусть $\mu(G)$ обозначает лебегову меру числового множества G .

ЛЕММА 1. Пусть последовательность неотрицательных функций $\{\varphi_m\}$ сходится п.в. на $A = [a, b]$ к функции f и при каждом m выполняется $\varphi_m \leq \psi_m$ п.в. Тогда если последовательность функций $\{\psi_m\}$ сходится в среднем на A , то последовательность $\{\varphi_m\}$ сходится в среднем на A к функции f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. Пусть $\{\psi_m\}$ сходится к функции g . Тогда при $m \geq m_1$ выполняется

$$\int_A \psi_m(t) dt \leq \int_A g(t) dt + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Из условия следует интегрируемость каждой функции φ_m . По теореме Фату функция f также является интегрируемой (здесь опосредованно используется теорема Лебега). В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега для заданного ε найдется $\delta > 0$ такое, что для любого множества B , $\mu(B) < \delta$, выполняется

$$\int_B f(t) dt < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \int_B g(t) dt < \frac{\varepsilon}{4}.$$

По теореме Егорова о связи сходимости п.в. и равномерной сходимости множество B можно выбрать так, что на множестве $D = A \setminus B$ последовательность $\{\varphi_m\}$ сходится к f равномерно. При $m \geq m_2$ будет

$$\|\varphi_m - f\|_{L^\infty(D)} < \frac{\varepsilon}{4\mu(D)}.$$

Следовательно, при $m \geq \max\{m_1, m_2\}$

$$\|\varphi_m - f\|_1 = \int_D |(\varphi_m - f)(t)| dt + \int_B |(\varphi_m - f)(t)| dt < \mu(D) \frac{\varepsilon}{4\mu(D)} + \int_B \varphi_m(t) dt + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon.$$

ТЕОРЕМА 3. Для того чтобы функция f из L_q , $1 \leq q < \infty$ (f из C при $q = \infty$), принадлежала пространству W_p^k , $1 \leq p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность функций $\{\varphi_m(f)_{k,q}\}$ сходилась по норме пространства L_p .

(Утверждение для случая $p = \infty$ совпадает с общей схемой, но ввиду громоздкости рассуждения будет рассмотрено отдельно.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $f \in W_p^k$. Применяя к функции f последовательно разложение с остаточным членом в интегральной форме и неравенство Гёльдера, получаем, что для произвольного отрезка I из $[a, b]$ есть оценка

$$E_k(f, I)_q \leq d_{k,q} \cdot |I|^{k-1+1/q} \cdot \|f^{(k)}\|_{L_1[I]} \leq d_{k,q} \cdot |I|^{k+1/q-1/p} \cdot \|f^{(k)}\|_{L_p[I]}.$$

Здесь постоянная $d_{k,q}$ не превосходит $1/(k-1)!$. Следовательно,

$$\int_I \left(\frac{E_k(f, I)_q}{|I|^{k+1/q}} \right)^p dt \leq d_{k,q}^p \|f^{(k)}\|_{L_p[I]}^p$$

и

$$c_{k,q} \|\varphi_m(f)_{k,q}\|_p \leq d_{k,q} \|f^{(k)}\|_p. \quad (3)$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. В пространстве C^k найдется функция g такая, что

$$\|(f - g)^{(k)}\|_p < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Используем ее:

$$\|\varphi_m(f)_{k,q} - |f^{(k)}|\|_p \leq \|\varphi_m(f)_{k,q} - \varphi_m(g)_{k,q}\|_p + \|\varphi_m(g)_{k,q} - |g^{(k)}|\|_p + \||g^{(k)}| - |f^{(k)}|\|_p.$$

Поскольку

$$|\varphi_m(f)_{k,q} - \varphi_m(g)_{k,q}| \leq \varphi_m(f - g)_{k,q},$$

то, подставляя в формулу (3) функцию $f - g$, получаем для первого слагаемого из правой части оценку $d_{k,q} \cdot (\varepsilon/3) \cdot c_{k,q}^{-1}$.

Третье слагаемое, очевидно, меньше $\varepsilon/3$. Осталось оценить второе слагаемое.

Согласно результату Филлипса [11], если $g \in C^{(k)}[I]$, то найдется точка $\xi \in I$ такая, что

$$E_k(g, I)_q = c_{k,q} \cdot |I|^{k+1/q} \cdot |g^{(k)}(\xi)|.$$

Поэтому последовательность $\{\varphi_m(g)_{k,q}\}$ сходится равномерно к функции $|g^{(k)}|$, т.е., начиная с некоторого номера m_ε , второе слагаемое также будет меньше $\varepsilon/3$.

Значит, $\{\varphi_m(f)_{k,q}\}$ сходится к $|f^{(k)}|$ в пространстве L_p .

Достаточность. Здесь случаи $p \leq q$ и $q \leq p$ существенно различаются при крайних значениях параметра p .

Пусть $p \leq q$, $f \in L_q$ и $\{\varphi_m(f)_{k,q}\}$ сходится в L_p .

Из неравенства Гёльдера с показателями $q/(1-p)$, q/p и свойств наилучшего приближения следует, что

$$E_k(f, I)_p \leq |I|^{1/p-1/q} E_k(f, I)_q,$$

т.е.

$$\frac{E_k(f, I)_p}{|I|^{k+1/p}} \leq \frac{E_k(f, I)_q}{|I|^{k+1/q}}.$$

Поэтому из сходимости последовательности $\{\varphi_m(f)_{k,q}\}$ в L_p следует ограниченность в этом пространстве последовательности $\{\varphi_m(f)_{k,p}\}$. Из соотношений (1), (2) получается, что $f \in W_p^k$, если $p > 1$, и $f \in C^{k-1}BV$, если $p = 1$. Только в последнем случае нужно провести дополнительное рассуждение о принадлежности f к W_1^k .

Это рассуждение сведется к доказательству достаточности в [4], если показать, что из сходимости в среднем последовательности $\{\varphi_m(f)_{k,q}\}$ следует сходимость в среднем последовательности $\{\varphi_m(f)_{k,1}\}$.

Заметим, что поскольку $f^{(k-1)}$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию, то п.в. на $[a, b]$ функцию f можно разложить в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Для произвольного интервала I при каждом $1 \leq p \leq \infty$ получаем

$$\frac{E_k(f, I)_p}{|I|^{k+1/p}} = \frac{E_k(f^{(k)}(\xi) \cdot (x^k/k!) + \varepsilon(x), I)_p}{|I|^{k+1/p}},$$

где точка ξ из I такова, что существует $f^{(k)}(\xi)$, а функция $\varepsilon(x) = o(|x - \xi|^k)$ при $x \rightarrow \xi$. Поэтому

$$\left| c_{k,p}^{-1} \frac{E_k(f, I)_p}{|I|^{k+1/p}} - f^{(k)}(\xi) \right| \leq c_{k,p}^{-1} \frac{E_k(\varepsilon, I)_p}{|I|^{k+1/p}} \leq c_{k,p}^{-1} \cdot |I|^{-k} \cdot E_k(\varepsilon, I)_\infty = c_{k,p}^{-1} \cdot |I|^{-k} \cdot o(|I|^k),$$

т.е. последовательность $\{\varphi_m(f)_{k,p}\}$ сходится п.в. к $|f^{(k)}|$. Осталось воспользоваться леммой 1 для последовательностей $\{\varphi_m(f)_{k,1}\}$ и $\{\varphi_m(f)_{k,q}\}$. На этом разбор случая $p \leq q$ завершен.

Пусть $q \leq p$, $f \in L_q$ и $\{\varphi_m(f)_{k,q}\}$ сходится в L_p . Используя теорему 2*, получаем из условия, что $f \in W_q^k$ и

$$|f^{(k)}| = \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m(f)_{k,q}.$$

Поскольку $\{\varphi_m(f)_{k,q}\}$ сходится в L_p , то $|f^{(k)}| \in L_p$.

Таким образом, нужное утверждение доказано во всех случаях, кроме $p = \infty$ (здесь доказана принадлежность функции f к пространству W_∞^k). Случай $p = \infty$, как уже отмечалось, будет рассмотрен отдельно.

Чтобы избежать излишней громоздкости в построениях, докажем утверждение при $p = \infty$ в следующей формулировке.

ТЕОРЕМА 1*. *Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы функция f из L_q , $1 \leq q < \infty$ (f из C при $q = \infty$), имела непрерывную производную порядка k во всех точках отрезка $[a, b]$, заключается в том, что*

$$c_{k,q}^{-1} \frac{E_k(f; [c, d])_q}{(d-c)^{k+1/q}} \rightarrow \varphi(x), \quad a \leq c < x < d \leq b,$$

равномерно по x при $c \rightarrow x$, $d \rightarrow x$, где непрерывная функция φ определяется равенством

$$\varphi(x) = |f^{(k)}(x)|.$$

Сформулируем некоторые вспомогательные предложения.

ЛЕММА 2. *Пусть функция φ такова, что для любой последовательности разбиений $\{\tau_m\}$ с $\lambda(\tau_m) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ существует последовательность подчиненных им ступенчатых функций $\{\varphi_m\}$, сходящаяся равномерно к φ . Тогда φ — непрерывная функция.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидным образом получается методом от противного. Очевидно и обратное утверждение.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Легко увидеть, что всевозможные последовательности разбиений в условии леммы 2 можно заменить одной последовательностью равномерных разбиений.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Содержание леммы 2 и замечания 1 полностью переносятся на пространства L_p ($1 \leq p < \infty$), т.е. имеем характеристику пространств L_p и C в терминах соответствующим образом сходящейся последовательности ступенчатых функций (например, наилучшего приближения), подчиненной последовательности равномерных разбиений.

ЛЕММА 3. *Если $g^{(k-1)}(x) = |x|$ и a — некоторое положительное число, то*

$$\frac{E_k(g; [-a, a])_q}{(2a)^{k+1/q}} < \gamma \cdot c_{k,q},$$

где $\gamma < 1$ и зависит только от параметров k и q ($1 \leq q \leq \infty$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Несложно убедиться, что

$$\begin{aligned} E_1(|x|; [-a, a])_q &\leq \left\| |x| - \frac{a}{2} \right\|_q \leq \frac{1}{2} \left(\int_{-a}^a |x|^q dx \right)^{1/q} \\ &= \frac{1}{2} E_1(x; [-a, a])_q = \frac{1}{2} (2a)^{1+1/q} \cdot c_{1,q}. \end{aligned}$$

Пусть $k > 1$ и точки $t_1, \dots, t_k$ таковы, что

$$\left\| \prod_{i=1}^k (x - t_i) \right\|_{L_q[-1,1]}$$

принимает наименьшее значение. Хорошо известно, что все эти точки различны (см. [11]) и их набор симметричен относительно нуля. Для доказательства, впрочем, будет достаточно того, что среди них найдутся две точки, расположенные по разные стороны от нуля.

Пусть многочлен π степени $k - 1$ интерполирует функцию g в точках $s_i = a \cdot t_i$, $i = 1, \dots, k$. Тогда

$$\begin{aligned} E_k(g; [-a, a])_q &\leq \|g - \pi\|_{L_q[-a, a]} = \left(\int_{-a}^a \left| [s_1, \dots, s_k, x] g \cdot \prod_{i=1}^k (x - s_i) \right|^q dx \right)^{1/q} \\ &\leq \left\| \prod_{i=1}^k (x - s_i) \right\|_{L_q[-a, a]} \cdot \max_{-a \leq x \leq a} |[s_1, \dots, s_k, x] g|. \end{aligned}$$

Здесь $[y_1, \dots, y_{k+1}]g$ обозначает разделенную разность функции g порядка $k + 1$, вычисленную по точкам $y_1, \dots, y_{k+1}$.

Рассмотрим подробно каждый из полученных множителей.

Используя замену переменной, получаем для первого из них

$$\left\| \prod_{i=1}^k (x - s_i) \right\|_{L_q[-a, a]} = (2a)^{k+1/q} \cdot k! \cdot c_{k,q}.$$

Для разделенной разности дифференцируемых функций есть представление (см., например, [10, с. 128])

$$[y_1, \dots, y_{k+1}]g = \int_{y_1}^{y_{k+1}} \frac{Q_k(t)}{(k-1)!} dg^{(k-1)}(t),$$

где Q_k — кусочно-полиномиальная функция степени $k - 1$, дифференцируемая во всех узлах по $k - 2$ раза (узлы ее расположены в точках y_i , $i = 1, \dots, k + 1$), положительная на $(y_1, \dots, y_{k+1})$, равная нулю вне этого интервала и имеющая величину

$$\|Q_k\|_{L_1[y_1, y_{k+1}]} = \frac{1}{k}$$

(функция Q_k носит название *В-сплайна*).

Заметим, что поскольку точки $\{s_i\}$, $i = 1, \dots, k + 1$, расположены по обе стороны от нуля, а приращение функции $g^{(k-1)}$ изменяет знак в нуле, то

$$\max_{-a \leq x \leq a} |[s_1, \dots, s_k, x]g| < \frac{\gamma}{k!},$$

где положительное число γ меньше 1.

Легко убедиться, что γ не зависит от a .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1*. *Необходимость.* Доказательство этой стороны утверждения содержится в соответствующей части доказательства теоремы 3.

Достаточность. Из условия теоремы 1* и результата теоремы 3 следует принадлежность функции f пространству W_∞^k и существование предельной функции φ , к которой на любой последовательности разбиений $\{\tau_m\}$ с $\lambda(\tau_m) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ ступенчатые функции $\{\varphi_m(f, \tau_m)_{k,q}\}$ сходятся равномерно. По лемме 2 φ — непрерывная функция. С другой стороны, в тех точках, где существует $f^{(k)}$,

$$|f^{(k)}(x)| = \varphi(x), \quad (4)$$

т.е. получается, что это равенство выполняется почти всюду на $[a, b]$.

Убедимся, что $f^{(k)} \in C[a, b]$. Достаточно показать, что исключена ситуация с неопределенностью $f^{(k)}$ в какой-то точке x_0 (следовательно, исключены и разрывы первого рода). Будем считать, что $x_0 = 0$ и $\varphi(0) = 1$.

Рассмотрим сначала случай, когда существуют обе односторонние производные $f_-^{(k)}(0)$ и $f_+^{(k)}(0)$. Используя односторонние разложения Тейлора в нуле с остаточным членом в форме Пеано, получаем из условия, что они равны по абсолютной величине числу $\varphi(0)$ и требуется доказать их совпадение по знаку.

Определим функцию g условиями

$$g^{(k)}(x) = \begin{cases} f_+^{(k)}(0), & x > 0, \\ f_-^{(k)}(0), & x < 0, \end{cases}$$

$$g^{(i)}(0) = f^{(i)}(0), \quad i = 0, 1, \dots, k-1,$$

т.е. g определяется двумя “односторонними” многочленами Тейлора степени k . Тогда для отрезка I с серединой в нуле имеем

$$\left| \frac{E_k(f, I)_q}{|I|^{k+1/q}} - \frac{E_k(g, I)_q}{|I|^{k+1/q}} \right| \leq \frac{E_k(f-g, I)_q}{|I|^{k+1/q}} \leq \frac{\|f-g\|_\infty}{|I|^k} = \frac{o(|I|^k)}{|I|^k}.$$

Таким образом, значения выражений

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{E_k(\cdot; [-a, a])_q}{(2a)^{k+1/q}}$$

для функций f и g должны быть равны между собой. Этот предел для функции f равен $c_{k,q} \cdot \varphi(0) = c_{k,q}$. Для функции g , как следует из леммы 3, такое соотношение может выполняться, лишь когда $g_-^{(k)}(0) = g_+^{(k)}(0)$. Значит, $f_-^{(k)}(0) = f_+^{(k)}(0)$.

Докажем существование всюду односторонних производных у функции f . Например, $f_+^{(k)}(0)$. По условию

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{E_k(f; [0, a])_q}{a^{k+1/q}} = c_{k,q}. \quad (5)$$

С другой стороны (см. обозначения и рассуждения леммы 3),

$$\frac{E_k(f; [0, a])_q}{a^{k+1/q}} \leq c_{k,q} \left\| \int_0^a Q(x, t) f^{(k)}(t) dt \right\|_{L_\infty[0, a]},$$

где $Q(x, t) = k \cdot Q_k(x, t)$ – неотрицательная функция, интеграл от которой по $[0, a]$ равен 1. Чтобы выполнялось равенство (5), абсолютная величина выражения под знаком нормы должна стремиться к 1, а это, как будет показано, равносильно существованию $f_+^{(k)}(0) = 1$.

Введем обозначения:

$$G_+^a = \{t \in [0, a] : f^{(k)}(t) > 0\}, \quad G_-^a = \{t \in [0, a] : f^{(k)}(t) < 0\},$$

$$D(f, x) = \frac{f^{(k-1)}(x) - f^{(k-1)}(0)}{x}, \quad x > 0.$$

Поскольку п.в. на $[0, a]$ есть равенство (4), где φ – непрерывная функция и $\varphi(0) = 1$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для п.в. значений t , $0 \leq t < \delta$, выполняется $-1 - \varepsilon < f^{(k)}(t) < -1 + \varepsilon$ либо $1 - \varepsilon < f^{(k)}(t) < 1 + \varepsilon$. Так как

$$D(f, x) = \frac{\int_0^x f^{(k)}(t) dt}{x} = \frac{1}{\mu(G_+^x) + \mu(G_-^x)} \left(\int_{G_+^x} f^{(k)}(t) dt + \int_{G_-^x} f^{(k)}(t) dt \right),$$

то при любом $\varepsilon > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon)$ и $0 < x < \delta$ имеем

$$D(f, x) \leq \frac{(1 + \varepsilon)\mu(G_+^x) + (-1 + \varepsilon)\mu(G_-^x)}{\mu(G_+^x) + \mu(G_-^x)} = \frac{\mu(G_+^x) - \mu(G_-^x)}{\mu(G_+^x) + \mu(G_-^x)} + \varepsilon$$

$$= 1 - 2 \cdot \left(\frac{\mu(G_+^x)}{\mu(G_-^x)} + 1 \right)^{-1} + \varepsilon.$$

Аналогично для $D(f, x)$ получается оценка снизу ($+\varepsilon$ заменится всюду на $-\varepsilon$). Рассмотрим

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow 0+} D(f, x) = \overline{\sigma}, \quad \underline{\lim}_{x \rightarrow 0+} D(f, x) = \underline{\sigma}.$$

Из приведенных выше соотношений легко получается, что

а) $-1 \leq \underline{\sigma} \leq \overline{\sigma} \leq 1$;

б) знак и величина чисел $\overline{\sigma}$ и $\underline{\sigma}$ определяются отношением мер множеств G_+^x и G_-^x для значений x , на которых реализуются $\overline{\sigma}$ и $\underline{\sigma}$; в частности,

$$\overline{\sigma} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \iff \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\mu(G_+^x)}{\mu(G_-^x)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \infty \end{bmatrix};$$

в) $\overline{\sigma} = \pm 1 \iff \underline{\sigma} = \pm 1$.

Если $f_+^{(k)}(0)$ существует, то ее абсолютная величина равна 1. Отсутствие $f_+^{(k)}(0)$ равносильно тому, что $-1 < \underline{\sigma} < \overline{\sigma} < 1$. Покажем, что из условия $\overline{\sigma} < 1$ следует

$$\overline{\lim}_{a \rightarrow 0} \int_0^a Q(x, t) f^{(k)}(t) dt < 1 - \beta,$$

где положительное число β зависит только от $\bar{\sigma}$ и k , а так как при этом $\underline{\sigma} > -1$, то аналогично выводится, что

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^a Q(x, t) f^{(k)}(t) dt > -1 + \beta,$$

т.е.

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{E_k(f; [0, a])_q}{a^{k+1/q}} < c_{k,q} \cdot (1 - \beta),$$

– получается противоречие с (5). Заметим предварительно, что

$$\text{supp } Q(x, t) = \{t : Q(x, t) > 0\}$$

зависит от x , но составляет не меньше, чем фиксированную часть отрезка $[0, a]$: от $s_1 = \frac{a}{2} \cdot (t_1 + 1)$ до $s_k = \frac{a}{2} \cdot (t_k + 1)$, где $t_1, \dots, t_k$ – точки, определенные в доказательстве леммы 3; т.е.

$$\frac{\text{supp } Q(x, t)}{a} \geq \frac{s_k - s_1}{a} \geq \theta.$$

Пусть $\bar{\sigma} < 1$. Из этого следует, что

$$0 < \eta = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\mu(G_+^x)}{\mu(G_-^x)} < \infty.$$

Значит,

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\mu(G_-^x)}{\mu(G_+^x)} = \frac{1}{\eta} = \alpha.$$

Тогда при $0 < a < \delta_1$ для любого отрезка $[c, d] \subset [0, a]$ такого, что $(d - c)/a \geq \theta$, выполняется

$$\mu([c, d]_-) > \frac{\alpha}{2} \mu([c, d]_+).$$

Здесь через $[c, d]_-$ и $[c, d]_+$ обозначены точки отрезка $[c, d]$, в которых $f^{(k)}$ соответственно отрицательна и положительна. Следовательно,

$$\int_{G_+^a} Q(x, t) dt < \beta_1 \int_{G_-^a} Q(x, t) dt,$$

где β_1 определяется только числом $\bar{\sigma}$ и порядком k . Для любого $\varepsilon > 0$ при $0 < a < \delta(\varepsilon)$ имеем

$$\int_0^a Q(x, t) f^{(k)}(t) dt < (1 + \varepsilon) \int_{G_+^a} Q(x, t) dt - (1 - \varepsilon) \int_{G_-^a} Q(x, t) dt.$$

Поскольку интеграл от $Q(x, t)$ по отрезку $[0, a]$ равен 1, то при $a < \min\{\delta_1, \delta(\varepsilon)\}$

$$\begin{aligned} \int_0^a Q(x, t) f^{(k)}(t) dt &< \frac{\int_{G_+^a} Q(x, t) dt - \int_{G_-^a} Q(x, t) dt}{\int_{G_+^a} Q(x, t) dt + \int_{G_-^a} Q(x, t) dt} + \varepsilon \\ &= 1 - 2 \cdot \left(\frac{\int_{G_+^a} Q(x, t) dt}{\int_{G_-^a} Q(x, t) dt} + 1 \right)^{-1} + \varepsilon \\ &< 1 - 2 \cdot (\beta_1 + 1)^{-1} + \varepsilon < 1 - \beta + \varepsilon. \end{aligned}$$

Переход к доказательству аналогичного утверждения только для последовательности равномерных разбиений отрезка (в предположениях теоремы 2*) идейных трудностей не имеет – всегда можно выбрать подходящую подпоследовательность таких разбиений.

В заключение хочу выразить большую благодарность профессору Ю.А. Брудному за весьма полезные обсуждения вопросов, касающихся локальных приближений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бернштейн С. Н. Собрание сочинений. Т. 2. М.–Л.: Изд. АН СССР, 1954.
- [2] Чебышев П. Л. Собрание сочинений. Т. 2. М.–Л.: Изд. АН СССР, 1948.
- [3] Брудный Ю. А. Исследование свойств функций многих переменных методами теории локальных приближений. Дисс. . . . д. ф.-м. н. Л.: ЛОМИ АН СССР, 1977.
- [4] Морозов А. Н. Аналог теоремы Бернштейна в пространстве L_1 // Матем. заметки. 1995. Т. 57. № 5. С. 699–703.
- [5] Морозов А. Н. Точные асимптотические формулы для кусочно-полиномиального приближения дифференцируемых функций // Архитектура и программное обеспечение вычислительных систем. Сб. научных статей. Ярославль, 1992. С. 147–163.
- [6] Брудный Ю. А. Критерий существования производных в L_p // Матем. сб. 1967. Т. 73. № 1. С. 43–71.
- [7] Брудный Ю. А. Пространства, определяемые с помощью локальных приближений // Тр. ММО. 1971. Т. 24. С. 69–132.
- [8] Иродова И. П. Свойства функций, заданных скоростью убывания кусочно-полиномиальной аппроксимации // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. Ярославль, 1980. С. 92–118.
- [9] Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
- [10] Schumaker L. L. Spline Functions: Basic Theory. New York: Wiley, 1981.
- [11] Phillips G. M. Error estimates for best approximation // Approximation Theory. London: Acad. Press, 1970. P. 1–6.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

Поступило

18.11.1996

Исправленный вариант

25.01.2000