Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Овчинников, А. С. Титенков, Критерий родственности квазивогнутых функций, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 5, 780–786

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm789>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 18:12:54

КРИТЕРИЙ РОДСТВЕННОСТИ КВАЗИВОГНУТЫХ ФУНКЦИЙ

В. И. Овчинников, А. С. Титенков

Квазивогнутые функции ρ_0 и ρ_1 принадлежат одной шкале, если существуют квазивогнутые функции ψ_0 и ψ_1 и числа $0 < \theta_0 < 1$, $0 < \theta_1 < 1$ такие, что $\rho_0 = \psi_0^{1-\theta_0} \psi_1^{\theta_0}$, $\rho_1 = \psi_0^{1-\theta_1} \psi_1^{\theta_1}$. В работе установлен критерий принадлежности с точностью до эквивалентности функций к одной шкале. Этот критерий получен в терминах узлов соответствующих им линейно ступенчатых функций. Оказалось, что узлы должны быть эквивалентными последовательностями.

Библиография: 10 названий.

Как известно, функция $\varphi(t)$ на полуоси $[0, \infty)$ называется *квазивогнутой*, если $\varphi(0) = 0$, функция $\varphi(t)$ положительна и возрастает при $t > 0$, а функция $\varphi(t)/t$ убывает при $t > 0$. Любая возрастающая, положительная на $[0, \infty)$ вогнутая функция является квазивогнутой. Эти функции используются как обобщенные гладкости (см., например, [1]). Они также возникают в качестве функциональных параметров в конструкциях разного рода пространств в теории функций и теории приближений. При этом обычно эквивалентные функции оказываются взаимозаменяемыми. Положительные функции называются *эквивалентными*, если их отношение ограничено сверху и снизу положительными константами. Любая квазивогнутая функция эквивалентна возрастающей вогнутой функции. Этим пользуются в том смысле, что произвольную квазивогнутую функцию заменяют эквивалентной ей вогнутой, а ту, в свою очередь, можно заменить даже на эквивалентную ей лернеровскую гладкую функцию (см. [2]). Оказалось же, что в ряде вопросов разумнее идти в прямо противоположном направлении, т.е. заменять вогнутые гладкие функции на эквивалентные квазивогнутые “экстремально” невогнутые функции. Так возникают линейно ступенчатые функции, которые целиком определяются возрастающей последовательностью положительных чисел (узлов) на полуоси (см. [3]).

Через $\mathbb{Z}$, как обычно, обозначим множество целых чисел. *Интервалом* M будем называть множество целых чисел вида $\{n \in \mathbb{Z} \mid \alpha < n < \beta\}$, где $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$.

Монотонно возрастающую последовательность $\{r_n\}_{n \in M}$, где $r_n \in [0, \infty]$, занумерованную элементами из интервала M , будем называть *последовательностью узлов*, если $\sup_{n \in M} r_n = \infty$, а $\inf_{n \in M} r_n = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Непрерывная положительная функция φ на $[0, \infty)$ называется *линейно ступенчатой функцией*, если существует последовательность узлов $\{r_n\}_{n \in M}$

такая, что функция φ постоянна при $t \in [r_{2n}, r_{2n+1}]$ и линейная однородная при $t \in [r_{2n-1}, r_{2n}]$.

Один из основных результатов работы [3] – это теорема о том, что любая квазивоогнутая функция эквивалентна некоторой линейно ступенчатой функции. Нетрудно заметить связь этой простой теоремы с аналогичными результатами К. И. Осолокова [4], С. Янсона [5], Ю. А. Брудного и Н. Я. Кругляка [6] о дискретизации квазивоогнутых функций. Однако есть и существенные отличия, связанные с рассмотрением как четных, так и нечетных узлов (нечетные узлы ранее либо игнорировались, либо дискретизация строилась без них). Привлечение нечетных узлов оказалось очень продуктивным при вычислении индексов растяжения квазивоогнутых функций, а также при решении некоторых задач теории интерполяции линейных операторов (см. [7], [8]). В данной работе с помощью линейно ступенчатых функций найдено новое описание одной классификации квазивоогнутых функций, обнаруженной недавно Ю. А. Брудным и А. С. Штейнбергом [9].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Говорят, что две квазивоогнутые функции ρ_0 и ρ_1 принадлежат одной шкале, если существуют квазивоогнутые функции ψ_0 и ψ_1 и числа $0 < \theta_0 < 1$, $0 < \theta_1 < 1$ такие, что $\rho_0 = \psi_0^{1-\theta_0}\psi_1^{\theta_0}$, $\rho_1 = \psi_0^{1-\theta_1}\psi_1^{\theta_1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Две квазивоогнутые функции мы будем называть *родственными*, если они эквивалентны функциям из одной шкалы.

В работе [9] было отмечено, что понятие родственности обладает свойством транзитивности, т.е. если f родственна g , а g родственна h , то f родственна h .

Тем самым возникает разбиение множества квазивоогнутых функций на классы родственных. Первым шагом такой классификации, в частности, является хорошо известное выделение класса квазистепенных функций, которые оказываются родственными друг другу.

Интерес к этому понятию связан с тем, что в терминах родственности формулируются критерии K -монотонности пар пространств Янсона с функциональными параметрами (см. [9]), а также условия на функциональные параметры в теореме о реитерации для интерполяционных конструкций типа Гальярдо (см. [10]).

Поскольку любая квазивоогнутая функция эквивалентна некоторой линейно ступенчатой функции, которая практически однозначно определяется своими узлами, то естественно, что понятие родственности каким-то образом выражается через узлы соответствующих линейно ступенчатых функций. Решению этого вопроса и посвящена данная работа. Оказалось, что родственность линейно ступенчатых функций непосредственно связана с эквивалентностью последовательностей их узлов.

1. Вспомогательные теоремы. Квазивоогнутая функция φ называется *невыврожденной*, если области значений функций $\varphi(t)$ и $t/\varphi(t)$ содержат полуось $(0, \infty)$. Для линейно ступенчатой функции это значит, что последовательность ее узлов является бесконечной двусторонней последовательностью. Только такие функции для простоты мы в дальнейшем и будем рассматривать.

Узлы $\{r_n\}$ линейно ступенчатой функции называются *разреженными*, если $r_{n+1}/r_n \geq q$ для некоторой константы $q > 1$ при всех n . В работе [3] доказано, что любая невырожденная квазивоогнутая функция эквивалентна линейно ступенчатой функции, узлы

которой разрежены, причем $q > 1$ можно взять любое. Поэтому мы будем рассматривать, если не оговорено иное, только такие линейно ступенчатые функции, у которых $q > 2$.

ТЕОРЕМА 1. *Если у линейно ступенчатых функций φ_0 и φ_1 четные узлы совпадают, а нечетные эквивалентны, то эти функции родственные.*

Доказательство опирается на следующие леммы.

ЛЕММА 1. *Пусть ψ_0 и ψ_1 – две линейно ступенчатые функции, а $\{\nu_n\}$ и $\{\omega_n\}$ – соответственно последовательности их узлов, которые разрежены. Пусть четные узлы этих последовательностей совпадают, $\nu_{2n} = \omega_{2n}$, а нечетные эквивалентны. Тогда при любом $\theta \in (0, 1)$ линейно ступенчатая функция $\bar{\psi}$ с узлами $t_n = \nu_n^{1-\theta} \omega_n^\theta$ эквивалентна функции $\psi = \psi_0^{1-\theta} \psi_1^\theta$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, можно полагать, что $\nu_{2n+1} \leq \omega_{2n+1}$. Обозначим на отрезках $[\nu_{2n}, \nu_{2n+1}]$ функцию $\psi_0(t) = c_n$. На отрезках $[\nu_{2n+1}, \nu_{2n+2}]$ функция $\psi_0(t) = k_n t$. Аналогично функция ψ_1 на отрезках $[\nu_{2n}, \omega_{2n+1}]$ постоянна, т.е. $\psi_1(t) = d_n$, где d_n – некоторая константа. На $[\omega_{2n+1}, \nu_{2n+2}]$ функция $\psi_1(t) = m_n t$. Очевидно, $\nu_{2n+1} = c_n/k_n$ и $\omega_{2n+1} = d_n/m_n$. Нетрудно видеть, что на отрезках $[\nu_{2n}, \nu_{2n+1}]$ функция $\psi_0^{1-\theta} \psi_1^\theta = c_n^{1-\theta} d_n^\theta$. На отрезках $[\nu_{2n+1}, \omega_{2n+1}]$ функция $\psi_0^{1-\theta} \psi_1^\theta = (k_n t)^{1-\theta} d_n^\theta$, а на отрезках $[\omega_{2n+1}, \nu_{2n+2}]$ функция $\psi_0^{1-\theta} \psi_1^\theta = c_n^{1-\theta} m_n^\theta t$. Теперь рассмотрим на каждом отрезке $[\nu_{2n}, \nu_{2n+2}]$ функцию $\bar{\psi}(t) = \max(c_n^{1-\theta} d_n^\theta, k_n^{1-\theta} m_n^\theta t)$. Обозначим через t_{2n+1} абсциссу точки пересечения прямой $y = k_n^{1-\theta} m_n^\theta t$ и прямой $y = c_n^{1-\theta} d_n^\theta$. Тогда

$$t_{2n+1} = \left(\frac{c_n}{k_n}\right)^{1-\theta} \left(\frac{d_n}{m_n}\right)^\theta = \nu_{2n+1}^{1-\theta} \omega_{2n+1}^\theta.$$

Очевидно, что функция $\bar{\psi}(t) = \max(c_n^{1-\theta} d_n^\theta, k_n^{1-\theta} m_n^\theta t)$ будет линейно ступенчатой, и ее узлы $t_{2n} = \nu_{2n} = \omega_{2n}$, а $t_{2n+1} = \nu_{2n+1}^{1-\theta} \omega_{2n+1}^\theta$ при любом $n \in \mathbb{Z}$. Покажем, что функция ψ эквивалентна $\bar{\psi}$. Действительно, при любом n и $t \in [\nu_{2n}, \nu_{2n+2}]$

$$\begin{aligned} 1 &\leq \frac{\psi(t)}{\bar{\psi}(t)} \leq \frac{\psi(t_{2n+1})}{\bar{\psi}(t_{2n+1})} = \frac{k_n^{1-\theta} t_{2n+1}^{1-\theta} d_n^\theta}{c_n^{1-\theta} d_n^\theta} = \left(\frac{k_n}{c_n}\right)^{1-\theta} \left(\left(\frac{c_n}{k_n}\right)^{1-\theta} \left(\frac{d_n}{m_n}\right)^\theta\right)^{1-\theta} \\ &= \left(\left(\frac{c_n}{k_n}\right)^{-\theta} \left(\frac{d_n}{m_n}\right)^\theta\right)^{1-\theta} = \left(\frac{\omega_{2n+1}}{\nu_{2n+1}}\right)^{(1-\theta)\theta} \leq M^{(1-\theta)\theta}, \end{aligned}$$

где M – константа в условии $\omega_{2n+1} \leq M \nu_{2n+1}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Пусть f_0 и f_1 – две линейно ступенчатые функции, а $\{\gamma_n\}$ и $\{\tau_n\}$ – соответственно последовательности их узлов, и у этих функций узлы разрежены. Пусть четные узлы этих последовательностей совпадают, $\gamma_{2n} = \tau_{2n}$, а нечетные узлы эквивалентны и $\gamma_{2n+1} \leq \tau_{2n+1}$ при любом $n \in \mathbb{Z}$. Тогда функции f_0 и f_1 родственные.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим две линейно ступенчатые функции ψ_0 и ψ_1 , у которых четные узлы совпадают с соответствующими четными узлами функций f_0 и f_1 , т.е. $\nu_{2n} = \omega_{2n} = \gamma_{2n} = \tau_{2n}$, а нечетные узлы ν_{2n+1} и ω_{2n+1} эквивалентны и $\nu_{2n+1}^{1-\theta_0} \omega_{2n+1}^{\theta_0} = \gamma_{2n+1}$, а $\nu_{2n+1}^{1-\theta_1} \omega_{2n+1}^{\theta_1} = \tau_{2n+1}$ для некоторых $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$. Последние два равенства подразумевают, что $\nu_{2n+1} \leq \gamma_{2n+1} \leq \tau_{2n+1} \leq \omega_{2n+1}$ при всех n . Покажем, как найти нечетные узлы функций ψ_0 и ψ_1 по данным узлам линейно ступенчатых функций f_0 и f_1 . За счет выбора начальных условий, т.е. узлов γ_1, τ_1, ν_1 и ω_1 , из уравнений $\nu_1^{1-\theta_0} \omega_1^{\theta_0} = \gamma_1$ и $\nu_1^{1-\theta_1} \omega_1^{\theta_1} = \tau_1$ находим θ_0 и θ_1 . При фиксированных θ_0 и θ_1 из двух уравнений $\nu_n^{1-\theta_0} \omega_n^{\theta_0} = \gamma_n$ и $\nu_n^{1-\theta_1} \omega_n^{\theta_1} = \tau_n$ получим формулы для узлов ν_n и ω_n , т.е.

$$\nu_n = \gamma_n^{\theta_1/(\theta_1-\theta_0)} \tau_n^{-\theta_0/(\theta_1-\theta_0)}, \quad \omega_n = \gamma_n^{-(1-\theta_1)/(\theta_1-\theta_0)} \tau_n^{(1-\theta_0)/(\theta_1-\theta_0)}.$$

Для завершения доказательства нужно подобрать теперь $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$ так, чтобы полученные последовательности $\{\nu_n\}$ и $\{\omega_n\}$ были разрежены, т.е. $\nu_{n+1}/\nu_n \geq \beta > 2$ и $\omega_{n+1}/\omega_n \geq \beta > 2$. В самом деле,

$$\frac{\omega_{2n+1}}{\omega_{2n}} = \frac{\gamma_{2n+1}^{-(1-\theta_1)/(\theta_1-\theta_0)} \tau_{2n+1}^{(1-\theta_0)/(\theta_1-\theta_0)}}{\gamma_{2n}} = \left(\frac{\tau_{2n+1}}{\gamma_{2n+1}} \right)^{(1-\theta_0)/(\theta_1-\theta_0)} \frac{\gamma_{2n+1}}{\gamma_{2n}} \geq \beta > 2,$$

поскольку $\gamma_{2n+1} \leq \tau_{2n+1} \leq k\gamma_{2n+1}$ и $\gamma_{2n+1}/\gamma_{2n} \geq \beta > 2$ по условию леммы.

Также имеем, что

$$\frac{\nu_{2n}}{\nu_{2n-1}} = \frac{\nu_{2n}}{(\gamma_{2n-1}^{\theta_1} \tau_{2n-1}^{-\theta_0})^{1/(\theta_1-\theta_0)}} = \frac{\tau_{2n}}{\tau_{2n-1}} \left(\frac{\tau_{2n-1}}{\gamma_{2n-1}} \right)^{\theta_1/(\theta_1-\theta_0)} \geq \beta > 2.$$

Теперь найдем отношение

$$\begin{aligned} \frac{\nu_{2n+1}}{\nu_{2n}} &= \frac{\gamma_{2n+1}^{\theta_1/(\theta_1-\theta_0)} \tau_{2n+1}^{-\theta_0/(\theta_1-\theta_0)}}{\gamma_{2n}} = \frac{\gamma_{2n+1}}{\gamma_{2n}} \left(\frac{\gamma_{2n+1}}{\tau_{2n+1}} \right)^{\theta_0/(\theta_1-\theta_0)} \\ &\geq \beta \left(\frac{1}{k} \right)^{\theta_0/(\theta_1-\theta_0)} \geq \beta - \varepsilon > 2, \end{aligned}$$

где ε достаточно мало. Здесь мы используем разреженность узлов и неравенство $1 \geq \gamma_{2n+1}/\tau_{2n+1} \geq k^{-1}$, а также то, что при $\theta_0 \rightarrow 0$ выражение $(1/k)^{\theta_0/(\theta_1-\theta_0)} \rightarrow 1$. Аналогично,

$$\frac{\omega_{2n}}{\omega_{2n-1}} = \frac{\omega_{2n}}{(\gamma_{2n-1}^{-1+\theta_1} \tau_{2n-1}^{1-\theta_0})^{1/(\theta_1-\theta_0)}} = \frac{\tau_{2n}}{\tau_{2n-1}} \left(\frac{\tau_{2n-1}}{\gamma_{2n-1}} \right)^{-(1-\theta_1)/(\theta_1-\theta_0)} \geq \beta - \varepsilon > 2,$$

поскольку при $\theta_1 \rightarrow 0$ имеем $(\tau_{2n-1}/\gamma_{2n-1})^{(\theta_1-1)/(\theta_1-\theta_0)} \rightarrow 1$.

Из леммы 1 сразу следует, что функция f_0 эквивалентна функции $\psi_0^{1-\theta_0} \psi_1^{\theta_0}$, а функция f_1 эквивалентна $\psi_0^{1-\theta_1} \psi_1^{\theta_1}$. Поэтому функция f_0 и f_1 будут родственными. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Обозначим через $\{r_n\}$ и $\{u_n\}$ последовательности узлов соответственно для функций φ_0 и φ_1 . Введем в рассмотрение линейно ступенчатую функцию $\tilde{\psi}$, у которой четные узлы $c_{2n} = r_{2n} = u_{2n}$, а нечетные $c_{2n+1} = \max(r_{2n+1}, u_{2n+1})$. Очевидно, что $r_{2n+1} \leq c_{2n+1}$ и узлы c_{2n+1} эквивалентны узлам r_{2n+1} . Также $c_{2n+1} \geq u_{2n+1}$ и узлы c_{2n+1} эквивалентны узлам u_{2n+1} . Поэтому сразу из леммы 2 следует, что функции $\tilde{\psi}$ и φ_0 родственные и функции $\tilde{\psi}$ и φ_1 родственные. Следовательно, функции φ_0 и φ_1 будут родственными. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Если у линейно ступенчатых функций φ_0 и φ_1 нечетные узлы совпадают, а четные узлы эквивалентны, то эти функции родственные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Этот результат следует из теоремы 1, если применить ее к линейно ступенчатым функциям $\varphi_0^*(t) = 1/\varphi_0(1/t)$ и $\varphi_1^*(t) = 1/\varphi_1(1/t)$, у которых четные узлы совпадают, а нечетные эквивалентны. В самом деле, пусть $\{r_n^*\}$ и $\{u_n^*\}$ – последовательности узлов соответственно для функций φ_0^* и φ_1^* . Заметим, что узлы функций φ_0^* и φ_0 связаны формулой $r_{-n}^* = 1/r_{n+1}$. Узлы φ_1 и φ_1^* связаны также формулой $u_{-n}^* = 1/u_{n+1}$. Теорема доказана.

2. Основная теорема.

ТЕОРЕМА 3. Невырожденные квазивогнутые функции ρ_0 и ρ_1 родственны тогда и только тогда, когда можно построить эквивалентные им линейно ступенчатые функции φ_0 и φ_1 , у которых последовательности узлов эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть квазивогнутые функции ρ_0 и ρ_1 родственные. Согласно утверждению, доказанному Брудным и Штейнбергом (см. [9]), эти функции имеют общую “балансирующую” последовательность $\{t_k\}$. Одним из свойств этой последовательности является то, что функция $\rho_j(t)$ эквивалентна функции

$$\varphi_j(t) = \sup_k \rho_j(t_k) \min\left(1, \frac{t}{t_k}\right), \quad j = 0, 1.$$

Легко видеть, что функции φ_0 и φ_1 будут линейно ступенчатыми. Обозначим соответственно через u_n и r_n узлы этих функций. Общая “балансирующая” последовательность является последовательностью четных узлов для каждой из этих функций, т.е. $t_k = u_{2k} = r_{2k}$.

Поскольку функции φ_0 и φ_1 с точностью до эквивалентности принадлежат одной шкале, то для некоторого $q \geq 2$ должны выполняться следующие импликации (см. [9]):

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_j(t)}{\varphi_j(s)} \leq 2 &\implies \frac{\varphi_{1-j}(t)}{\varphi_{1-j}(s)} \leq q, & j = 0, 1, \\ \frac{t\varphi_j(s)}{\varphi_j(t)s} \leq 2 &\implies \frac{t\varphi_{1-j}(s)}{\varphi_{1-j}(t)s} \leq q, & j = 0, 1, \end{aligned}$$

где $0 < s < t < \infty$.

Если $u_{2n+1} \in [r_{2n+1}, r_{2n+2}]$, то запишем первую импликацию для $j = 1$, взяв s началом, а t концом отрезка постоянства $[r_{2n}, u_{2n+1}]$ функции φ_1 :

$$\frac{\varphi_1(u_{2n+1})}{\varphi_1(r_{2n})} = 1 \leq 2 \implies \frac{\varphi_0(u_{2n+1})}{\varphi_0(r_{2n})} = \frac{\varphi_0(u_{2n+1})}{\varphi_0(r_{2n+1})} = \frac{u_{2n+1}}{r_{2n+1}} \leq q.$$

Если же $r_{2n+1} \in [u_{2n+1}, r_{2n+2}]$, то записываем эту импликацию для $j = 0$, взяв s началом и t концом отрезка постоянства $[r_{2n}, r_{2n+1}]$ функции φ_0 :

$$\frac{\varphi_0(r_{2n+1})}{\varphi_0(r_{2n})} = 1 \leq 2 \implies \frac{\varphi_1(r_{2n+1})}{\varphi_1(r_{2n})} = \frac{\varphi_1(r_{2n+1})}{\varphi_1(u_{2n+1})} = \frac{r_{2n+1}}{u_{2n+1}} \leq q.$$

Поэтому в зависимости от расположения нечетных узлов выполняется неравенство $r_{2n+1} \leq u_{2n+1} \leq qr_{2n+1}$ или $u_{2n+1} \leq r_{2n+1} \leq qu_{2n+1}$ при любом n . Это значит, что нечетные узлы функций φ_0 и φ_1 эквивалентны.

Таким образом, линейно ступенчатые функции φ_0 и φ_1 эквивалентны квазивогнутым функциям ρ_0 и ρ_1 , и четные узлы этих функций совпадают, а нечетные эквивалентны.

Достаточность. Рассмотрим две линейно ступенчатые функции φ_0 и φ_1 . Пусть последовательности узлов $\{r_n\}$ и $\{u_n\}$ этих функций эквивалентны, т.е. $h \leq u_n/r_n \leq H$ при всех $n \in \mathbb{Z}$. Докажем, что функции φ_0 и φ_1 родственные.

Рассмотрим семейство линейно ступенчатых функций, порожденных узлами $\omega_n(\alpha) = r_n^{1-\alpha} u_n^\alpha$. Эти узлы разрежены при каждом $\alpha \in (0, 1)$, поскольку мы предполагаем, что у исходных функций узлы таковы. Найдем отношение

$$\frac{\omega_n(\alpha_1)}{\omega_n(\alpha_0)} = \frac{r_n^{1-\alpha_1} u_n^{\alpha_1}}{r_n^{1-\alpha_0} u_n^{\alpha_0}} = \left(\frac{u_n}{r_n} \right)^{\alpha_1 - \alpha_0}.$$

Поскольку узлы эквивалентны, то при $\alpha_1 > \alpha_0$

$$h^{\alpha_1 - \alpha_0} \leq \frac{\omega_n(\alpha_1)}{\omega_n(\alpha_0)} \leq H^{\alpha_1 - \alpha_0}.$$

Таким образом, если параметры α_0 и α_1 близки, то константы эквивалентности между узлами $\omega_n(\alpha_1)$ и $\omega_n(\alpha_0)$ как угодно близки к единице. Поэтому при доказательстве мы можем считать, что константы эквивалентности между узлами исходных функций φ_0 и φ_1 как угодно близки к единице. В самом деле, если это не так, то разобьем отрезок $[0, 1]$, где меняется параметр α , на равные мелкие части так, чтобы в соседних точках разбиения константы эквивалентности узлов были близки к единице. Тогда функции, порожденные узлами $\omega_n(\alpha)$ с соседними α , родственны. В силу транзитивности родственными будут и функции, порожденные узлами $\omega_n(0) = r_n$ и $\omega_n(1) = u_n$.

Итак, пусть узлы r_n и u_n эквивалентны, и константы эквивалентности близки к единице, т.е. $1 - \varepsilon \leq u_n/r_n \leq 1 + \varepsilon$, где ε достаточно мало. Напомним также, что узлы функций φ_0 и φ_1 разрежены, т.е. $r_{n+1}/r_n \geq \beta > 2$ и $u_{n+1}/u_n \geq \beta > 2$. Рассмотрим последовательность $\{c_n\}$ такую, что $c_n = r_n$ при $n = 2k$ и $c_n = u_n$ при $n = 2k+1$. Выберем ε так, чтобы последовательность $\{c_n\}$ была разрежена. Последовательности $\{c_n\}$ и $\{r_n\}$ имеют одинаковые четные узлы, а их нечетные узлы эквивалентны. Поэтому соответствующие им линейно ступенчатые функции в силу теоремы 1 будут родственные. Последовательности $\{c_n\}$ и $\{u_n\}$ имеют одинаковые нечетные узлы, а их четные узлы эквивалентны. Значит, линейно ступенчатые функции, порожденные этими последовательностями узлов, в силу теоремы 2 будут родственные. Поэтому в силу транзитивности наши функции φ_0 и φ_1 будут родственны. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Одним из прямых приложений доказанной теоремы является новое доказательство результата Брудного и Штейнберга об условиях K -монотонности пар пространств Янсона. Напомним, что они установили, что пара пространств $\{\overline{X}_{\rho_0, p_0}, \overline{X}_{\rho_1, p_1}\}$ является K -монотонной для любой исходной пары $\overline{X}$ тогда и только тогда, когда функции ρ_0 и ρ_1 являются родственными. Здесь наиболее громоздкой является доказательство необходимости этого условия. Новое доказательство получается, если применить найденное в [8] описание пространств $(l_{q_0}, l_{q_1}(2^{-n}))_{\rho, p}$ как весовых пар пространств со смешанной L_p -нормой, построенной на основе разбиения множества индексов координат. При этом если последовательности узлов функций ρ_0 и ρ_1 неэквивалентны, то в паре $\{(l_{q_0}, l_{q_1}(2^{-n}))_{\rho_0, p_0}, (l_{q_0}, l_{q_1}(2^{-n}))_{\rho_1, p_1}\}$ возникают дополняемые подпары вида $\{l_{p_0}(l_{q_0}), l_{p_1}(l_{q_1})\}$, которые, как известно, не являются K -монотонными, если $q_0 \neq q_1$ и $p_0 \neq q_0$ или $p_1 \neq q_1$. То есть пара $\{(l_{q_0}, l_{q_1}(2^{-n}))_{\rho_0, p_0}, (l_{q_0}, l_{q_1}(2^{-n}))_{\rho_1, p_1}\}$ не будет K -монотонной.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Лизоркин П. И. Пространства обобщенной гладкости // Х. Трибель. Теория функциональных пространств. М.: Мир, 1986. С. 381–415.
- [2] Овчинников В. И. Интерполяционные теоремы, вытекающие из неравенства Гротендика // Функцион. анализ и его прилож. 1976. Т. 10. № 4. С. 45–54.
- [3] Титенков А. С. О показателях растяжения квазивогнутых функций // Математические науки и информационные образовательные технологии. Курск, 1997. С. 39–46.
- [4] Осколков К. И. Аппроксимативные свойства суммируемых функций на множествах полной меры // Матем. сб. 1977. Т. 32. С. 480–517.
- [5] Janson S. Minimal and maximal method of interpolation // J. Func. Anal. 1981. V. 44. P. 50–73.
- [6] Brudnyi Ju. A., Krugliak N. Ja. Interpolation Functors and Interpolation Spaces, I. Amsterdam: North Holland, 1991.
- [7] Титенков А. С. Показатели растяжения линейно ступенчатой функции. Деп. в ВИНТИ 25.11.98, № 3478–В98. М.: ВИНТИ, 1998.
- [8] Овчинников В. И., Титенков А. С. Конструкция С. Янсона для пар пространств L_p // Тр. матем. факультета. № 3. Воронеж, 1998. С. 52–56.
- [9] Brudnyi Ju. A., Shteinberg A. Calderon couples of Lipschitz spaces // J. Func. Anal. 1995. V. 131. P. 459–498.
- [10] Ovchinnikov V. I. On reiteration theorems // Amer. Math. Soc. Transl. (2). 1998. V. 184. P. 185–198.

(В. И. Овчинников) Воронежский государственный университет

(А. С. Титенков) Курский государственный педагогический университет

Поступило

03.04.2000