Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Туганбаев, Модули над кольцами эндоморфизмов,
Матем. заметки, 2004, том 75, выпуск 6, 895–908

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm79>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 12:44:07

УДК 512.55

МОДУЛИ НАД КОЛЬЦАМИ ЭНДОМОРФИЗМОВ

А. А. Туганбаев

Доказано, что A – дистрибутивное справа кольцо тогда и только тогда, когда все квазиинъективные правые A -модули являются левыми модулями Безу над своими кольцами эндоморфизмов тогда и только тогда, когда каждое прямое слагаемое N любого квазиинъективного правого A -модуля M , являющегося левым $\text{End}(M)$ -модулем Безу, является левым $\text{End}(N)$ -модулем Безу. Если A – совершенное справа или слева кольцо, то все правые A -модули являются левыми модулями Безу над своими кольцами эндоморфизмов тогда и только тогда, когда все правые A -модули являются дистрибутивными левыми модулями над своими кольцами эндоморфизмов тогда и только тогда, когда A – дистрибутивное кольцо.

Библиография: 6 названий.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей. Модуль, у которого все конечно порожденные подмодули являются циклическими, называется *модулем Безу*. Модуль M называется *дистрибутивным*, если решетка всех его подмодулей $\text{Lat}(M)$ дистрибутивна. Слова типа “дистрибутивное кольцо” означают, что соответствующие условия выполнены справа и слева. В теореме 8.12 из [1] доказано, что правая дистрибутивность кольца A равносильна тому, что инъективная оболочка любого простого правого A -модуля является левым модулем Безу над своим кольцом эндоморфизмов.

Основными результатами данной работы являются теоремы 1 и 2.

ТЕОРЕМА 1. *Для кольца A равносильны следующие условия:*

- (1) A – дистрибутивное справа кольцо;
- (2) каждый инъективный правый A -модуль M является левым $\text{End}(M)$ -модулем Безу;
- (3) каждый квазиинъективный правый A -модуль M является левым $\text{End}(M)$ -модулем Безу;
- (4) каждое прямое слагаемое N любого квазиинъективного правого A -модуля M , являющегося левым $\text{End}(M)$ -модулем Безу, является левым $\text{End}(N)$ -модулем Безу.

ТЕОРЕМА 2. *Для совершенного справа или слева кольца A равносильны следующие условия:*

- (1) *все правые A -модули являются левыми модулями Безу над своими кольцами эндоморфизмов;*
- (2) *все правые A -модули являются дистрибутивными левыми модулями над своими кольцами эндоморфизмов;*
- (3) *A – дистрибутивное кольцо.*

В связи с теоремой 1 в примере 1.9 показано, что существует инъективный правый модуль M , который является левым $\text{End}(M)$ -модулем Безу, причем M имеет свободное циклическое инъективное прямое слагаемое N , которое не является левым $\text{End}(N)$ -модулем Безу.

В связи с теоремой 2 заметим, что кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ является дистрибутивным кольцом, причем не все $\mathbb{Z}$ -модули являются дистрибутивными модулями над своими кольцами эндоморфизмов (см. пример 2.13).

Доказательства теорем 1 и 2 разбиты на ряд утверждений. Кольцо A называется *полусовершенным*, если фактор-кольцо кольца A по его радикалу Джекобсона $J(A)$ является артиновым кольцом. Кольцо A называется *совершенным справа*, если A – полусовершенное кольцо и для любой последовательности $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ элементов из $J(A)$ существует такое натуральное число n , что $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 = 0$. Модуль M называется *цепным*, если любые два его подмодуля сравнимы по включению (т.е. решетка $\text{Lat}(M)$ является цепью). Модуль M называется *полуцепным*, если M – прямая сумма цепных модулей. Модуль называется *равномерным*, если любые два его ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение. Пусть M – модуль. Модуль N называется *инъективным относительно M* (или *M -инъективным*), если для любого подмодуля M' модуля M каждый гомоморфизм $M' \rightarrow N$ продолжается до гомоморфизма $M \rightarrow N$. Модуль называется *квазиинъективным*, если он инъективен относительно себя. Правый модуль N над кольцом A называется *инъективным*, если N инъективен относительно всех правых A -модулей. Если N – инъективный модуль, являющийся существенным расширением своего подмодуля N' , то N называется *инъективной оболочкой* модуля N' . Инъективная оболочка определена однозначно с точностью до изоморфизма. Подмодуль фактор-модуля модуля M называется *подфактором* модуля M .

1. Доказательство теоремы 1.

ЛЕММА 1.1. *Пусть X и M – правые модули над кольцом A и левый $\text{End}(M)$ -модуль $\text{Hom}(X, M)$ является модулем Безу. Тогда*

- (1) *для любых двух гомоморфизмов f и g из X в M существует такой гомоморфизм $h: X \rightarrow M$, что $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g) = \text{Ker}(h)$;*
- (2) *если модуль M равномерен, то для любых двух гомоморфизмов f и g из X в M модули $\text{Ker}(f)$ и $\text{Ker}(g)$ сравнимы по включению;*
- (3) *для любого вполне инвариантного подмодуля N модуля M аддитивная группа $\text{Hom}(X, N)$ является левым $\text{End}(M)$ -модулем Безу;*
- (4) *если M – инъективный модуль и N – квазиинъективный существенный подмодуль модуля M , то левый $\text{End}(N)$ -модуль $\text{Hom}(X, N)$ является модулем Безу.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R \equiv \text{End}(M)$.

(1) По условию $Rf + Rg$ – циклический левый R -модуль. Поэтому существуют такие эндоморфизмы s, t, u и v модуля M , что

$$f = s(uf + vg) \quad \text{и} \quad g = t(uf + vg).$$

Тогда $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g) = \text{Ker}(uf + vg)$ и можно положить $h \equiv uf + vg$.

(2) Пусть

$$\pi: X \rightarrow X/(\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g))$$

– естественный эпиморфизм. По (1) существует такой гомоморфизм $h: X \rightarrow M$, что

$$\text{Ker}(h) = \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g).$$

Гомоморфизм h индуцирует мономорфизм $\bar{h}: \pi(X) \rightarrow M$.

Допустим, что модули $\text{Ker}(f)$ и $\text{Ker}(g)$ не сравнимы по включению. Тогда $\pi(\text{Ker}(f))$ и $\pi(\text{Ker}(g))$ – ненулевые подмодули модуля $\pi(X)$ и

$$\pi(\text{Ker}(f)) \cap \pi(\text{Ker}(g)) = 0.$$

Так как $\bar{h}$ – мономорфизм, то $\bar{h}\pi(\text{Ker}(f))$ и $\bar{h}\pi(\text{Ker}(g))$ – ненулевые подмодули равномерного модуля M и

$$h\pi(\text{Ker}(f)) \cap h\pi(\text{Ker}(g)) = 0.$$

Получено противоречие.

(3) Так как N – вполне инвариантный подмодуль модуля M , то левый $\text{End}(N)$ -модуль $\text{Hom}(X, N)$ является левым $\text{End}(M)$ -модулем. Поэтому $\text{Hom}(X, N)$ – подмодуль левого $\text{End}(M)$ -модуля Безу. Следовательно, $\text{Hom}(X, N)$ – левый $\text{End}(M)$ -модуль Безу.

(4) Так как M – инъективный модуль и N – квазиинъективный существенный подмодуль модуля M , то M – инъективная оболочка квазиинъективного модуля N . Поэтому N – вполне инвариантный подмодуль модуля M (см. предложение 19.2 из [2]). По (3) $\text{Hom}(X, N)$ – левый $\text{End}(M)$ -модуль Безу. Кроме того, каждый эндоморфизм модуля N продолжается до эндоморфизма инъективного модуля M . Следовательно, $\text{Hom}(X, N)$ – левый $\text{End}(N)$ -модуль Безу.

ЛЕММА 1.2. Пусть A – кольцо, X – правый A -модуль, S – простой правый A -модуль и M – инъективная оболочка модуля S . Тогда равносильны следующие условия:

- (1) $\text{Hom}(X, M)$ – цепной левый $\text{End}(M)$ -модуль;
- (2) левый $\text{End}(M)$ -модуль $\text{Hom}(X, M)$ является модулем Безу;
- (3) для любых двух гомоморфизмов f и g из X в M модули $\text{Ker}(f)$ и $\text{Ker}(g)$ сравнимы по включению;
- (4) X не имеет таких подфакторов $S_1 \oplus S_2$, что $S_1 \cong S_2 \cong S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (1) $\implies$ (2) очевидна.

(2) $\implies$ (3) Так как M – инъективная оболочка простого модуля S , то M – равномерный модуль. Поэтому утверждение следует из леммы 1.1(2).

(3) $\implies$ (4) Допустим противное. Тогда модуль X имеет такие подмодули Y и Z , что $Y/(Y \cap Z) \cong Z/(Y \cap Z) \cong S$. Поэтому существуют такие эпиморфизмы $f_1, g_1: Y + Z \rightarrow S$, что $\text{Ker}(f_1) = Z$ и $\text{Ker}(g_1) = Y$. Так как S – подмодуль инъективного модуля M , то гомоморфизмы f_1 и g_1 продолжаются до гомоморфизмов $f, g: X \rightarrow M$. По условию модули $\text{Ker}(f)$ и $\text{Ker}(g)$ сравнимы по включению. Например, пусть $\text{Ker}(f) \subseteq \text{Ker}(g)$. Тогда $Z = \text{Ker}(f_1) \subseteq \text{Ker}(f) \subseteq \text{Ker}(g)$. Поэтому $S = g_1(Y + Z) = g_1(Z) = g(Z) = 0$. Получено противоречие.

(4) $\implies$ (3) Допустим противное. Тогда существуют такие гомоморфизмы $f, g: X \rightarrow S$ и подмодули $\bar{Y}$ и $\bar{Z}$ модуля X , что

$$f(\bar{Z}) = g(\bar{Y}) = 0, \quad f(\bar{Y}) \neq 0, \quad g(\bar{Z}) \neq 0.$$

Так как M – существенное расширение простого модуля S , то $S \subseteq f(\bar{Y}) \cap g(\bar{Z})$. Поэтому существуют такие подмодули $Y \subseteq \bar{Y}$ и $Z \subseteq \bar{Z}$, что $S = f(Y) = g(Z)$. Кроме того, $f(Y \cap Z) = g(Y \cap Z) = 0$. Поэтому существуют эпиморфизмы $Y/(Y \cap Z) \rightarrow S$ и $Z/(Y \cap Z) \rightarrow S$. Следовательно, модуль X имеет такой подфактор $S_1 \oplus S_2$, что $S_1 \cong S_2 \cong S$.

(3) $\implies$ (1) Пусть $R \equiv \text{End}(M)$ и $f, g \in \text{Hom}(X, M)$. По условию либо $\text{Ker}(f) \subseteq \text{Ker}(g)$, либо $\text{Ker}(g) \subseteq \text{Ker}(f)$. Допустим, что $\text{Ker}(f) \subseteq \text{Ker}(g)$. Тогда существует такой гомоморфизм $\bar{h}: f(X) \rightarrow g(X)$, что $\bar{h}f(x) = g(x)$. Так как M – инъективный модуль, то гомоморфизм $\bar{h}$ продолжается до эндоморфизма h модуля M . Поэтому $g = hf \in Rf$. Аналогично, если $\text{Ker}(g) \subseteq \text{Ker}(f)$, то $f \in Rg$. Поэтому $\text{Hom}(X, M)$ – цепной левый $\text{End}(M)$ -модуль.

ЛЕММА 1.3. Для правого модуля X над кольцом A равносильны следующие условия:

- (1) X – дистрибутивный модуль;
- (2) модуль X не имеет таких подфакторов $S_1 \oplus S_2$, что S_1 и S_2 – изоморфные простые модули;
- (3) для любого равномерного инъективного A -модуля M левый $\text{End}(M)$ -модуль $\text{Hom}(X, M)$ является модулем Безу;
- (4) для любого равномерного инъективного A -модуля M левый $\text{End}(M)$ -модуль $\text{Hom}(X, M)$ является цепным модулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность условий (1) и (2) доказана в [3].

Эквивалентность условий (2), (3) и (4) следует из леммы 1.2.

ЛЕММА 1.4 [4, п. 16.2]. Пусть U – модуль и M – U -инъективный модуль. Тогда M инъективен относительно любого подфактора модуля U .

Кроме того, если V – модуль и M инъективен относительно V , то M – $(U \oplus V)$ -инъективный модуль.

ЛЕММА 1.5. Пусть M – квазиинъективный правый модуль над кольцом A .

(1) Если X – правый A -модуль, то левый $\text{End}(M)$ -модуль $\text{Hom}(X, M)$ является модулем Безу тогда и только тогда, когда для любых двух гомоморфизмов f и g из X в M существует такой гомоморфизм $h: X \rightarrow M$, что $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g) = \text{Ker}(h)$.

(2) M – левый $\text{End}(M)$ -модуль Безу тогда и только тогда, когда для любых двух элементов $u, v \in M$ существует такой элемент $w \in M$, что

$$r(u) \cap r(v) = r(w).$$

(3) Если модуль M содержит изоморфные копии всех циклических правых A -модулей, то M – левый $\text{End}(M)$ -модуль Безу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Достаточность следует из леммы 1.1(1).

Необходимость. Пусть $f, g \in \text{Hom}(X, M)$. По условию существует такой гомоморфизм $h: X \rightarrow M$, что

$$\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g) = \text{Ker}(h).$$

Так как M – M -инъективный модуль, то по лемме 1.4 модуль M инъективен относительно своих подмодулей $f(X)$ и $g(X)$. По лемме 1.4 модуль M инъективен относительно внешней прямой суммы $f(X) \oplus g(X)$. Так как $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g) = \text{Ker}(h)$, то существует такой мономорфизм

$$s: h(X) \rightarrow f(X) \oplus g(X),$$

что

$$s(h(x)) = (f(x), g(x)) \quad \text{для всех } x \in X.$$

Так как M инъективен относительно $f(X) \oplus g(X)$, то изоморфизм $s^{-1}: s(h(X)) \rightarrow h(X)$ продолжается до гомоморфизма

$$t: f(X) \oplus g(X) \rightarrow M.$$

Так как M инъективен относительно $f(X)$ и $g(X)$, то гомоморфизмы $t|_{f(X)}: f(X) \rightarrow M$ и $t|_{g(X)}: g(X) \rightarrow M$ продолжаются до эндоморфизмов u и v модуля M . Пусть $R \equiv \text{End}(M)$. Если $x \in X$, то

$$\begin{aligned} (uf + vg)(x) &= uf(x) + vg(x) = tf(x) + tg(x) \\ &= t((f(x), g(x))) = s^{-1}((f(x), g(x))) = h(x). \end{aligned}$$

Поэтому $h = uf + vg \in Rf + Rg$.

Так как $\text{Ker}(h) \subseteq \text{Ker}(f)$ и $\text{Ker}(h) \subseteq \text{Ker}(g)$, то существуют такие эпиморфизмы $w_1: h(X) \rightarrow f(X)$ и $w_2: h(X) \rightarrow g(X)$, что

$$w_1(h(x)) = f(x) \quad \text{и} \quad w_2(h(x)) = g(x) \quad \text{для всех } x \in X.$$

Так как M – квазиинъективный модуль, то гомоморфизмы w_1 и w_2 продолжаются до эндоморфизмов z_1 и z_2 модуля M . Тогда $f = z_1 h$ и $g = z_2 h$. Поэтому

$$Rf + Rg \subseteq Rh \subseteq Rf + Rg.$$

Так как $Rf + Rg = Rh$, то $\text{Hom}(X, M)$ – левый R -модуль Безу.

(2) По (1) $\text{Hom}(A_A, M)$ – левый $\text{End}(M)$ -модуль Безу тогда и только тогда, когда для любых двух элементов $u, v \in M$ существует такой элемент $w \in M$, что $r(u) \cap r(v) = r(w)$. Кроме того, существует естественный изоморфизм $M \cong \text{Hom}(A_A, M)$.

(3) По (2) достаточно показать, что для любых двух элементов $u, v \in M$ существует такой элемент $w \in M$, что

$$r(u) \cap r(v) = r(w).$$

Это следует из того, что по условию модуль M содержит изоморфную копию циклического модуля $A_A/(r(u) \cap r(v))$.

ЛЕММА 1.6. Пусть X – дистрибутивный правый модуль, $\overline{X}$ – подфактор модуля X , M – X -инъективный правый модуль и существуют такие гомоморфизмы $f, g \in \text{Hom}(\overline{X}, M)$, что $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g) = 0$.

Тогда существует мономорфизм $h: \overline{X} \rightarrow M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Модуль $\overline{X}$ содержит подмодуль $\text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(g)$. Существует такой подмодуль P модуля $\overline{X}$, что $P \cap (\text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(g)) = 0$ и $P \oplus \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(g)$ – существенный подмодуль в $\overline{X}$. Существует такой гомоморфизм

$$h': P \oplus \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(g) \rightarrow M,$$

что h' совпадает с g на модуле $P \oplus \text{Ker}(f)$ и h' совпадает с f на модуле $\text{Ker}(g)$. По лемме 1.4 M – $\overline{X}$ -инъективный модуль. Поэтому h' продолжается до гомоморфизма $h: \overline{X} \rightarrow M$ с ядром X .

Так как

$$g(\text{Ker}(h) \cap (P \oplus \text{Ker}(f))) = h(\text{Ker}(h) \cap (P \oplus \text{Ker}(f))) = 0,$$

то

$$\text{Ker}(h) \cap (P \oplus \text{Ker}(f)) \subseteq \text{Ker}(g) \cap (P \oplus \text{Ker}(f)) = 0.$$

Кроме того,

$$\text{Ker}(h) \cap \text{Ker}(g) \subseteq \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g) = 0.$$

Так как $\overline{X}$ – дистрибутивный модуль, то

$$\text{Ker}(h) \cap (P \oplus \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(g)) = \text{Ker}(h) \cap (P \oplus \text{Ker}(f)) + \text{Ker}(h) \cap \text{Ker}(g) = 0$$

и h – требуемый мономорфизм.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7. Пусть X – правый модуль над кольцом A . Тогда равносильны следующие условия:

- (1) для любого квазиинъективного правого A -модуля M левый $\text{End}(M)$ -модуль $\text{Hom}(X, M)$ является модулем Безу;
- (2) для любого инъективного правого A -модуля M левый $\text{End}(M)$ -модуль $\text{Hom}(X, M)$ является модулем Безу;
- (3) X – дистрибутивный модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (1) $\implies$ (2) очевидна.

Импликация (2) $\implies$ (1) следует из леммы 1.1(4) и того, что каждый модуль обладает инъективной оболочкой.

Импликация (2) $\implies$ (3) следует из леммы 1.3.

(3) $\implies$ (2) Пусть $f, g \in \text{Hom}(X, M)$. По лемме 1.5(1) достаточно доказать, что существует такой гомоморфизм $h: X \rightarrow M$, что

$$\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g) = \text{Ker}(h).$$

Обозначим через $\bar{X}$ дистрибутивный модуль $X/(\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g))$. Гомоморфизмы f и g индуцируют такие гомоморфизмы $\bar{f}, \bar{g} \in \text{Hom}(\bar{X}, M)$, что $\text{Ker}(\bar{f}) \cap \text{Ker}(\bar{g}) = 0$. По лемме 1.6 существует мономорфизм $\bar{h}: \bar{X} \rightarrow M$. Если $\pi: X \rightarrow \bar{X}$ – естественный эпиморфизм и $h \equiv \bar{h}\pi$, то h – требуемый гомоморфизм.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.8. Пусть A – кольцо, $\{B_i\}_{i \in I}$ – множество всех правых идеалов кольца A и M – инъективная оболочка модуля $\bigoplus_{i \in I} A/B_i$. Тогда равносильны следующие условия:

- (1) A – дистрибутивное справа кольцо;
- (2) все инъективные правые A -модули являются левыми модулями Безу над своими кольцами эндоморфизмов;
- (3) все квазиинъективные правые A -модули являются левыми модулями Безу над своими кольцами эндоморфизмов;
- (4) каждое прямое слагаемое N любого квазиинъективного правого A -модуля Безу M является левым $\text{End}(N)$ -модулем Безу;
- (5) все прямые слагаемые инъективного модуля M являются левыми модулями Безу над своими кольцами эндоморфизмов;
- (6) для каждого простого правого A -модуля S инъективная оболочка модуля S является левым модулем Безу над своим кольцом эндоморфизмов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого правого A -модуля N существует естественный изоморфизм $N \cong \text{Hom}(A_A, N)$. Поэтому эквивалентность условий (1), (2), (3) и (6) следует из предложения 1.7.

Импликация (3) $\implies$ (4) следует из того, что любое прямое слагаемое квазиинъективного модуля является квазиинъективным модулем.

Импликация (4) $\implies$ (5) следует из того, что по лемме 1.5(3) инъективный модуль M является левым $\text{End}(M)$ -модулем Безу.

Импликация (5) $\implies$ (6) следует из того, что все инъективные оболочки простых правых A -модулей изоморфны прямым слагаемым инъективного модуля M .

ОКОНЧАНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1. Теорема 1 следует из предложения 1.8.

ПРИМЕР 1.9. Существует инъективный правый модуль M , который является левым $\text{End}(M)$ -модулем Безу, причем M имеет свободное циклическое инъективное прямое слагаемое N , которое не является левым $\text{End}(N)$ -модулем Безу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F – поле из двух элементов, $\langle x \rangle$ и $\langle y \rangle$ – две циклические группы порядка 2 с образующими x и y , G – прямое произведение групп $\langle x \rangle$ и $\langle y \rangle$, $A = F[G]$ – групповое кольцо. Тогда A – коммутативное конечное самоинъективное кольцо и его 2-порожденный идеал $(1-x)A + (1-y)A$ не является главным. Поэтому $N \equiv A_A$ – свободный циклический инъективный правый модуль, который не является левым $\text{End}(N)$ -модулем Безу. Пусть $\{B_i\}_{i \in I}$ – множество всех правых идеалов кольца A и M – инъективная оболочка модуля $\bigoplus_{i \in I} A_A/B_i$. По лемме 1.5(3) M – левый $\text{End}(M)$ -модуль Безу. Кроме того, инъективный циклический модуль N изоморфен прямому слагаемому модуля M .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.10. (1) Если N – квазиинъективный правый модуль, то $\text{End}(N)$ – левое кольцо Безу тогда и только тогда, когда для любых двух эндоморфизмов f и g модуля N существует такой эндоморфизм h модуля N , что $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g) = \text{Ker}(h)$.

(2) Если N – дистрибутивный квазиинъективный правый модуль, то $\text{End}(N)$ – левое кольцо Безу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) следует из леммы 1.5(1) при $M = N$.

(2) следует из предложения 1.7 при $M = N$.

2. Доказательство теоремы 2.

ЛЕММА 2.1. Пусть R – кольцо и H – левый R -модуль.

(1) H – дистрибутивный R -модуль тогда и только тогда, когда для любых элементов $f, g \in H$ существует такой элемент $s \in R$, что $sf, (1-s)g \in Rf \cap Rg$.

(2) Если S – унитарное подкольцо кольца R и естественный S -модуль H дистрибутивен, то H – дистрибутивный R -модуль.

(3) Если H – дистрибутивный R -модуль и e – ненулевой идемпотент кольца R , то eH – дистрибутивный eRe -модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Докажем достаточность. Так как

$$f + g \in R(f + g) \cap R(f + g) = R(f + g) \cap Rf + R(f + g) \cap Rg,$$

то существуют такие элементы $s, t \in R$, что $f + g = t(f + g) + s(f + g)$, $t(f + g) \in Rf$ и $s(f + g) \in Rg$. Тогда $tg = t(f + g) - tf \in Rf \cap Rg$ и $sf = s(f + g) - sg \in Rf \cap Rg$. Так как $(1 - s - t)(f + g) = 0$, то

$$(1 - s)g = (1 - s - t)(f + g) - (1 - s - t)f + tg = (s + t - 1)f + tg \in Rf \cap Rg.$$

Необходимость. Пусть F, G и Z – подмодули модуля H , $f \in F$, $g \in G$, $z \in Z$ и $z = f + g \in (F + G) \cap Z$. Достаточно доказать включение

$$z \in Rf \cap Rz + Rg \cap Rz.$$

По условию существует такой элемент $s \in R$, что $sf, (1-s)g \in Rf \cap Rg$. Тогда

$$(1-s)z = (1-s)f + (1-s)g \in Rf \cap Rz, \quad sz = sf + sg \in Rg \cap Rz$$

и $z = (1-s)z + sz \in Rf \cap Rz + Rg \cap Rz$.

(2) Утверждение следует из (1).

(3) Пусть $ef, eg \in eH$. По (1) существует такой элемент $s \in R$, что $sef, (1-s)eg \in \text{Ref} \cap \text{Reg}$. Тогда $ese \cdot f, (e - ese) \cdot eg \in eRe \cdot ef \cap eRe \cdot eg$. Кроме того, e – единица кольца eRe . Применяя (1) к eRe -модулю eH , получаем, что eH – дистрибутивный eRe -модуль.

ЛЕММА 2.2. Пусть R – прямое произведение колец R_i , $i \in I$, и пусть для каждого $i \in I$ дан левый R_i -модуль H_i . Кроме того, пусть H и K – соответственно прямое произведение и прямая сумма всех аддитивных групп H_i , рассматриваемые как естественный левый R -модуль.

(1) Если все левые R_i -модули H_i являются модулями Безу, то H – R -модуль Безу.

(2) Если все левые R_i -модули H_i дистрибутивны, то H – дистрибутивный R -модуль.

(3) Если все левые R_i -модули H_i являются модулями Безу, то K – R -модуль Безу.

(4) Если все левые R_i -модули H_i дистрибутивны, то K – дистрибутивный R -модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $f, g \in H$, $f = (f_i)_{i \in I}$, $g = (g_i)_{i \in I}$, где $f_i, g_i \in H_i$. Так как все R_i -модули H_i являются модулями Безу, то для каждого $i \in I$ существуют такие элементы $s_i, t_i, u_i, v_i \in R_i$, что $f_i = s_i(u_i f_i + v_i g_i)$ и $g_i = t_i(u_i f_i + v_i g_i)$. Пусть $s \equiv (s_i)_{i \in I} \in R$, $t \equiv (t_i)_{i \in I} \in R$, $u \equiv (u_i)_{i \in I} \in R$ и $v \equiv (v_i)_{i \in I} \in R$. Тогда $f = s(uf + vg)$ и $g = t(uf + vg)$. Поэтому $Rf + Rg = R(uf + vg)$ и H – R -модуль Безу.

(2) Пусть $f, g \in H$, $f = (f_i)_{i \in I}$, $g = (g_i)_{i \in I}$, где $f_i, g_i \in H_i$. Для каждого $i \in I$ обозначим через 1_i единицу кольца R_i . Так как все R_i -модули H_i дистрибутивны, то по лемме 2.1(1) для каждого $i \in I$ существуют такие элементы $s_i, t_i, u_i, v_i \in R_i$, что $s_i f_i = t_i g_i$ и $(1 - s_i)g_i = u_i f_i$. Пусть $s \equiv (s_i)_{i \in I} \in R$, $t \equiv (t_i)_{i \in I} \in R$ и $u \equiv (u_i)_{i \in I} \in R$. Тогда $sf = tg \in Rf \cap Rg$ и $(1 - s)g = uf \in Rf \cap Rg$. По лемме 2.1(1) H – дистрибутивный R -модуль.

(3) и (4) Доказательство аналогично доказательству утверждений (1) и (2).

ЛЕММА 2.3. Пусть A – кольцо, $\{H_i\}_{i \in I}$ – некоторое множество правых A -модулей, $H \equiv \prod_{i \in I} H_i$ и $K \equiv \prod_{i \in I} H_i$.

(1) Если все H_i являются левыми $\text{End}(H_i)$ -модулями Безу, то H и K – левые $\text{End}(H)$ -модули Безу.

(2) Если все левые $\text{End}(H_i)$ -модули H_i дистрибутивны, то H и K – дистрибутивные левые $\text{End}(H)$ -модули.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S – прямое произведение всех колец $\text{End}(H_i)$. Кольцо S может рассматриваться естественным образом как унитарное подкольцо кольца $\text{End}(H)$.

(1) По лемме 2.2(1) и лемме 2.2(3) H и K – левые модули Безу над подкольцом S кольца $\text{End}(H)$. Поэтому H и K – левые $\text{End}(H)$ -модули Безу.

(2) По лемме 2.2(2) и лемме 2.2(4) H и K – дистрибутивные левые модули над унитарным подкольцом S кольца $\text{End}(H)$. По лемме 2.1(2) H и K – дистрибутивные левые $\text{End}(H)$ -модули.

ЛЕММА 2.4. Пусть X и M – такие правые модули над кольцом A , что левый $\text{End}(M)$ -модуль $\text{Hom}(X, M)$ дистрибутивен.

(1) Если N – ненулевое прямое слагаемое модуля M , то левый $\text{End}(N)$ -модуль $\text{Hom}(X, N)$ дистрибутивен.

(2) Если $X = Y \oplus Z$ и существуют такие гомоморфизмы $f, g: X \rightarrow M$, что $\text{Ker}(f) = Z$ и $\text{Ker}(g) = Y$, то гомоморфизм $f - g: X \rightarrow M$ является мономорфизмом.

(3) Если модуль M равномерен и $X = Y \oplus Z$, где $Y \cong Z \neq 0$, то любой ненулевой гомоморфизм $Y \rightarrow M$ имеет ненулевое ядро.

(4) Для любого вполне инвариантного подмодуля N модуля M аддитивная группа $\text{Hom}(X, N)$ является дистрибутивным левым $\text{End}(M)$ -модулем.

(5) Если M – инъективный модуль и N – квазиинъективный существенный подмодуль модуля M , то левый $\text{End}(N)$ -модуль $\text{Hom}(X, N)$ дистрибутивен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $R \equiv \text{End}(M)$.

(1) Существует такой идемпотент e кольца R , что $N = eM$. Тогда $eRe = \text{End}(N)$ и

$$\text{Hom}(X, N) = e \cdot \text{Hom}(X, M).$$

Поэтому утверждение следует из леммы 2.1(3).

(2) По лемме 2.1(1) существуют такие эндоморфизмы s, t и v модуля M , что $sf = tg$ и $(1-s)g = vf$. Тогда $X = \text{Ker}(f) + \text{Ker}(g) \subseteq \text{Ker}(sf)$ и $X \subseteq \text{Ker}((1-s)g)$. Поэтому $sf \equiv 0$ и $(1-s)g \equiv 0$. Поэтому $f \equiv (1-s)f$ и $g \equiv sg$. Пусть $x \in \text{Ker}(f-g)$. Тогда $f(x) = g(x)$ и $g(x) = sg(x) = sf(x) = 0$ и $x \in \text{Ker}(g) = 0$. Поэтому $f-g$ – мономорфизм.

(3) Допустим, что существует мономорфизм $f': Y \rightarrow M$. Так как $Y \cong Z$, то существует мономорфизм $g': Z \rightarrow M$. Полагая $f(y+z) = f'(z)$ и $g(y+z) = g'(z)$, мы продолжим гомоморфизмы f' и g' до гомоморфизмов $f, g: X \rightarrow M$, где $\text{Ker}(f) = Z$ и $\text{Ker}(g) = Y$. По (2) гомоморфизм $f-g: X \rightarrow M$ является мономорфизмом. Поэтому равномерный модуль M содержит подмодуль $(f-g)(Y) \oplus (f-g)(Z)$, где $(f-g)(Y)$ и $(f-g)(Z)$ – ненулевые модули. Получено противоречие.

(4) Так как N – вполне инвариантный подмодуль модуля M , то левый $\text{End}(N)$ -модуль $\text{Hom}(X, N)$ является левым $\text{End}(M)$ -модулем. Поэтому $\text{Hom}(X, N)$ – подмодуль левого R -модуля Безу. Следовательно, $\text{Hom}(X, N)$ – дистрибутивный R -модуль.

(5) Так как M – инъективный модуль и N – квазиинъективный существенный подмодуль модуля M , то M – инъективная оболочка квазиинъективного модуля N . Поэтому N – вполне инвариантный подмодуль модуля M (см. предложение 19.2 из [2]). По (4) $\text{Hom}(X, N)$ – левый R -модуль Безу. Кроме того, каждый эндоморфизм модуля N продолжается до эндоморфизма инъективного модуля M . Следовательно, $\text{Hom}(X, N)$ – дистрибутивный левый $\text{End}(N)$ -модуль.

ЛЕММА 2.5. Пусть X – правый модуль над кольцом A и M – такой X -инъективный правый A -модуль, что левый $\text{End}(M)$ -модуль $\text{Hom}(X, M)$ дистрибутивен.

(1) Если X' – подмодуль модуля X и существуют такие гомоморфизмы $f', g': X' \rightarrow M$, что

$$X' = \text{Ker}(f') + \text{Ker}(g'),$$

то ядро гомоморфизма

$$f' - g': X' \rightarrow M$$

равно $\text{Ker}(f') \cap \text{Ker}(g')$.

(2) Если модуль M равномерен и X_1 – подмодуль модуля X , то для любых двух гомоморфизмов $f_1, g_1: X_1 \rightarrow M$ верно, что либо $\text{Ker}(f_1) \subseteq \text{Ker}(g_1)$, либо $\text{Ker}(g_1) \subseteq \text{Ker}(f_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как M – X -инъективный правый A -модуль, то для любого подмодуля X' правого A -модуля X существует естественный эпиморфизм дистрибутивного левого $\text{End}(M)$ -модуля $\text{Hom}(X, M)$ на левый $\text{End}(M)$ -модуль $\text{Hom}(X', M)$. Поэтому $\text{Hom}(X', M)$ – дистрибутивный левый $\text{End}(M)$ -модуль. Так как для любого фактор-модуля $\overline{X}$ правого A -модуля X' существует естественный мономорфизм левого $\text{End}(M)$ -модуля $\text{Hom}(\overline{X}, M)$ в дистрибутивный левый $\text{End}(M)$ -модуль $\text{Hom}(X', M)$, то $\text{Hom}(\overline{X}, M)$ – дистрибутивный левый $\text{End}(M)$ -модуль.

(1) Положим

$$\begin{aligned}\overline{X} &\equiv X' / (\text{Ker}(f') \cap \text{Ker}(g')), & \overline{Y} &= \text{Ker}(g') / (\text{Ker}(f') \cap \text{Ker}(g')), \\ \overline{Z} &\equiv \text{Ker}(f') / (\text{Ker}(f') \cap \text{Ker}(g')).\end{aligned}$$

Так как $X' = \text{Ker}(f') + \text{Ker}(g')$, то $\overline{X} = \overline{Y} \oplus \overline{Z}$. Гомоморфизмы f' и g' индуцируют такие гомоморфизмы $\bar{f}, \bar{g}: \overline{X} \rightarrow M$, что

$$\text{Ker}(\bar{f}) = \overline{Z} \quad \text{и} \quad \text{Ker}(\bar{g}) = \overline{Y}.$$

Применим лемму 2.4(2) к модулю $\overline{X} = \overline{Y} \oplus \overline{Z}$ и гомоморфизмам $\bar{f}, \bar{g}: \overline{X} \rightarrow M$. По этой лемме гомоморфизм $\bar{f} - \bar{g}: \overline{X} \rightarrow M$ является мономорфизмом. Поэтому

$$\text{Ker}(f' - g') = \text{Ker}(f') \cap \text{Ker}(g').$$

(2) Положим

$$X' \equiv \text{Ker}(f_1) + \text{Ker}(g_1) \subseteq X_1.$$

Обозначим через f' и g' сужение гомоморфизмов f_1 и g_1 на модуль X' . Тогда $\text{Ker}(f') = \text{Ker}(f_1)$ и $\text{Ker}(g') = \text{Ker}(g_1)$. По (1) ядро гомоморфизма $f' - g': X' \rightarrow M$ равно $\text{Ker}(f') \cap \text{Ker}(g')$. Пусть

$$\begin{aligned}\overline{X} &\equiv X' / (\text{Ker}(f') + \text{Ker}(g')) \overline{Y} \equiv \text{Ker}(g') / (\text{Ker}(f') \cap \text{Ker}(g')), \\ \overline{Z} &\equiv \text{Ker}(f') / (\text{Ker}(f') \cap \text{Ker}(g')).\end{aligned}$$

Тогда $\overline{X} = \overline{Y} \oplus \overline{Z}$ и гомоморфизм $f' - g'$ индуцирует мономорфизм $\bar{h}: \overline{Y} \oplus \overline{Z}$ в равномерный модуль M . Поэтому либо $\overline{Y} = 0$, либо $\overline{Z} = 0$. Следовательно, либо $\text{Ker}(g') \subseteq \text{Ker}(f')$, либо $\text{Ker}(f') \subseteq \text{Ker}(g')$.

ЛЕММА 2.6. Пусть A – кольцо, X – правый A -модуль, S – простой правый A -модуль и M – инъективная оболочка модуля S . Тогда равносильны следующие условия:

- (1) $\text{Hom}(X, M)$ – дистрибутивный левый $\text{End}(M)$ -модуль;
- (2) $\text{Hom}(X, M)$ – цепной левый $\text{End}(M)$ -модуль;
- (3) X не имеет подфакторов $S_1 \oplus S_2$ таких, что $S_1 \cong S_2 \cong S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (2) $\implies$ (1) очевидна.

Эквивалентность условий (2) и (3) следует из леммы 1.2.

(1) $\implies$ (2) По лемме 1.2 достаточно показать, что для любых двух гомоморфизмов f и g из X в M модули $\text{Ker}(f)$ и $\text{Ker}(g)$ сравнимы по включению. Это следует из леммы 2.5(2) и того, что инъективная оболочка простого модуля S является равномерным модулем.

ЛЕММА 2.7. Пусть M – правый модуль над кольцом A . Тогда существует такое множество $\{S_i\}_{i \in I}$ простых правых A -модулей, что модуль M изоморфен подмодулю прямого произведения инъективных оболочек простых модулей S_i .

Следовательно, каждый инъективный модуль изоморфен прямому слагаемому прямого произведения инъективных оболочек простых модулей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{M_i\}_{i \in I}$ – множество всех ненулевых циклических подмодулей модуля M . Для каждого модуля M_i существует эпиморфизм $f_i: M_i \rightarrow S_i$ на некоторый простой модуль S_i . Пусть E_i – инъективная оболочка модуля S_i и $E = \prod_{i \in I} E_i$. Гомоморфизмы f_i продолжаются до гомоморфизмов $g_i: M \rightarrow E_i$, которые индуцируют гомоморфизм $g = (g_i)_{i \in I}: M \rightarrow E$. Так как $g(M_i) = f_i(M_i) \neq 0$, то $\text{Ker}(g) = 0$.

ЛЕММА 2.8. Для правого модуля X над кольцом A равносильны следующие условия:

- (1) X – дистрибутивный модуль;
- (2) для любого простого правого A -модуля S с инъективной оболочкой E левый $\text{End}(E)$ -модуль $\text{Hom}(X, E)$ является цепным модулем;
- (3) для любого простого правого A -модуля S с инъективной оболочкой E левый $\text{End}(E)$ -модуль $\text{Hom}(X, E)$ дистрибутивен;
- (4) для любого инъективного правого A -модуля M левый $\text{End}(M)$ -модуль $\text{Hom}(X, M)$ дистрибутивен;
- (5) для любого квазиинъективного правого A -модуля M левый $\text{End}(M)$ -модуль $\text{Hom}(X, M)$ дистрибутивен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность условий (1) и (2) следует из леммы 1.3.

Эквивалентность условий (2) и (3) следует из леммы 2.6.

(3) $\implies$ (4) По лемме 2.7 существует такое множество $\{E_i\}_{i \in I}$ инъективных оболочек простых правых A -модулей, что инъективный модуль M изоморфен прямому слагаемому модуля $E \equiv \prod_{i \in I} E_i$. По условию $\text{Hom}(X, E_i)$ – дистрибутивный левый $\text{End}(E_i)$ -модуль для каждого $i \in I$. Так как

$$\text{Hom}(X, E) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}(X, E_i),$$

то по лемме 2.3(2) $\text{Hom}(X, E)$ – дистрибутивный левый $\text{End}(E)$ -модуль. По лемме 2.4(1) $\text{Hom}(X, M)$ – дистрибутивный левый $\text{End}(M)$ -модуль.

Импликация (4) $\implies$ (3) и (5) $\implies$ (4) очевидны.

Импликация (4) $\implies$ (5) следует из леммы 2.4(5) и того, что каждый модуль обладает инъективной оболочкой.

ЛЕММА 2.9. Для кольца A равносильны следующие условия:

- (1) A – дистрибутивное справа кольцо;
- (2) для любого простого правого A -модуля S с инъективной оболочкой M левый $\text{End}(M)$ -модуль M дистрибутивен;
- (3) для любого квазиинъективного правого A -модуля M левый $\text{End}(M)$ -модуль M дистрибутивен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого правого A -модуля M существует естественный изоморфизм $M \cong \text{Hom}(A_A, M)$. Поэтому утверждение следует из леммы 2.8.

ЛЕММА 2.10. (1) A – дистрибутивное справа полусовершенное кольцо тогда и только тогда, когда A – конечное прямое произведение цепных справа колец.

(2) A – совершенное справа или слева дистрибутивное справа кольцо тогда и только тогда, когда A – конечное прямое произведение цепных справа артиновых справа колец.

(3) Если A – дистрибутивное справа кольцо и M – правый A -модуль, являющийся прямой суммой или прямым произведением квазинъективных модулей M_i , то M – дистрибутивный левый $\text{End}(M)$ -модуль Безу.

(4) Пусть A – полусовершенное кольцо, каждый неразложимый инъективный правый A -модуль M является либо дистрибутивным левым $\text{End}(M)$ -модулем, либо левым $\text{End}(M)$ -модулем Безу и каждый неразложимый проективный правый A -модуль N является либо дистрибутивным левым $\text{End}(N)$ -модулем, либо левым $\text{End}(N)$ -модулем Безу. Тогда A – конечное прямое произведение цепных колец.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения (1) и (2) доказаны в [5].

(3) По лемме 2.9 и предложению 1.8 каждый модуль M_i является дистрибутивным левым $\text{End}(M)$ -модулем Безу. По лемме 2.3 M – дистрибутивный левый $\text{End}(M)$ -модуль Безу.

(4) По лемме 2.9 и предложению 1.8 A – дистрибутивное справа кольцо. По (1) A – конечное прямое произведение цепных справа колец $A_1, \dots, A_n$. Так как все кольца A_i являются неразложимыми проективными правыми A -модулями с кольцами эндоморфизмов A_i , то по условию все локальные кольца A_i дистрибутивны слева. По симметричному аналогу утверждения (1) все кольца A_i являются цепными слева.

ЛЕММА 2.11. Пусть A – совершенное справа или слева кольцо. Тогда равносильны следующие условия:

- (1) каждый правый A -модуль M является дистрибутивным левым $\text{End}(M)$ -модулем Безу и каждый левый A -модуль N является дистрибутивным правым $\text{End}(N)$ -модулем Безу;
- (2) каждый неразложимый инъективный правый A -модуль M является либо дистрибутивным левым $\text{End}(M)$ -модулем, либо левым $\text{End}(M)$ -модулем Безу и каждый неразложимый проективный правый A -модуль N является либо дистрибутивным левым $\text{End}(N)$ -модулем, либо левым $\text{End}(N)$ -модулем Безу;
- (3) A – дистрибутивное кольцо;
- (4) A – конечное прямое произведение цепных артиновых колец.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (1) $\implies$ (2) очевидна.

Импликация (2) $\implies$ (3) следует из леммы 2.10(4).

Импликация (3) $\implies$ (4) следует из леммы 2.10(1) и леммы 2.10(2).

(4) $\implies$ (1) Так как A – полупервичное артиново кольцо, то каждый A -модуль является прямой суммой квазинъективных модулей (см., например, [4, п. 55.16]). Кроме того, A – дистрибутивное кольцо. Поэтому утверждение следует из леммы 2.10(3).

ОКОНЧАНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 2. Теорема 2 следует из леммы 2.11.

ПРИМЕР 2.12. Пусть $\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел. Тогда $\mathbb{Z}$ – дистрибутивное кольцо, над которым не все модули являются дистрибутивными модулями над своими кольцами эндоморфизмов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дистрибутивность кольца $\mathbb{Z}$ хорошо известна и проверяется непосредственно. По теореме 88.4 из [6] существует такая абелева группа M , что M – неразложимая группа без кручения ранга 2 и все эндоморфизмы группы M являются умножениями на целые числа. Тогда множество всех $\text{End}(M)$ -подмодулей группы M совпадает со множеством всех ее $\mathbb{Z}$ -подмодулей. Группа M не является дистрибутивным $\mathbb{Z}$ -модулем, поскольку M содержит прямую сумму двух изоморфных ненулевых подгрупп. Поэтому M не является дистрибутивным $\text{End}(M)$ -модулем.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Tuganbaev A. A. Semidistributive Modules and Rings. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [2] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. II. М.: Мир, 1979.
- [3] Camillo V. Distributive modules // J. Algebra. 1975. V. 36. № 1. P. 16–25.
- [4] Wisbauer R. Foundations of Module and Ring Theory. Philadelphia: Gordon and Breach Science Publishers, 1991.
- [5] Stephenson W. Modules whose lattice of submodules is distributive // Proc. London Math. Soc. 1974. V. 28. № 2. P. 291–310.
- [6] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. II. М.: Мир, 1977.

Московский энергетический институт
(технический университет)
E-mail: askar@tuganbaev.mccme.ru

Поступило
20.12.2001