Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. И. Семенов, Г. А. Рудых, Точные неавтономные решения уравнения $u_t = \Delta \ln u$, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 5, 787–792

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm790>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 14:36:32

УДК 517.956

ТОЧНЫЕ НЕАВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ $u_t = \Delta \ln u$

Г. А. Рудых, Э. И. Семенов

В работе получены новые точные неавтономные решения уравнения нелинейной диффузии

$$u_t = \Delta \ln u,$$
$$u \triangleq u(\mathbf{x}, t) : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область, $\mathbb{R}^+ = \{t : 0 \leq t < +\infty\}$, $u(\mathbf{x}, t) \geq 0$ – температура среды.

Библиография: 14 названий.

Настоящая работа примыкает к исследованиям [1]–[11] и посвящена построению точных, неавтономных, анизотропных по пространственным переменным, явных неотрицательных решений уравнения нелинейной диффузии

$$u_t = \Delta \ln u, \tag{1}$$
$$u \triangleq u(\mathbf{x}, t) : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область; $\mathbb{R}^+ = \{t : 0 \leq t < +\infty\}$; $u(\mathbf{x}, t) \geq 0$ – температура среды.

Введем рассмотрение функции

$$Z_k(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_k(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, B_k(t)) + C_k(t),$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; $A_k(t) = [a_{kij}(t)]$ – $(n \times n)$ -матрицы; $B_k(t) = (b_{k1}(t), \dots, b_{kn}(t))'$ – вектор-столбцы; $C_k(t)$ – скалярные функции;

$$a_{kij}(t), b_{ki}(t), C_k(t) \in C^1(\mathbb{R}^+), \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2;$$

$(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

ТЕОРЕМА. Пусть $A_k(t)$ – вещественные симметричные матрицы. Тогда уравнение нелинейной теплопроводности (1) обладает точным решением

$$u(x, t) = [-Z_1^p(x, t) - Z_2(x, t)]_+^{-1}. \quad (2)$$

При этом функции $A_k(t), B_k(t), C_k(t)$ определяются из системы алгебро-дифференциальных уравнений (АДУ)

$$\begin{aligned} \dot{A}_2 &= 2A_2^2 - (\operatorname{tr} A_2)A_2, & \dot{B}_2 &= 2A_2B_2 - (\operatorname{tr} A_2)B_2, & \dot{C}_2 &= |B_2|^2 - (\operatorname{tr} A_2)C_2, \\ \dot{A}_1 &= 4A_1A_2 + \tau(\operatorname{tr} A_2)A_1 + \sigma(\operatorname{tr} A_1)A_2, \\ \dot{B}_1 &= 2(A_1B_2 + A_2B_1) + \tau(\operatorname{tr} A_2)B_1 + \sigma(\operatorname{tr} A_1)B_2, \\ \dot{C}_1 &= 2(B_1, B_2) + \tau(\operatorname{tr} A_2)C_1 + \sigma(\operatorname{tr} A_1)C_2, \\ 2A_1^2 &= (\operatorname{tr} A_1)A_1, & 2A_1B_1 &= (\operatorname{tr} A_1)B_1, & |B_1|^2 &= (\operatorname{tr} A_1)C_1, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\tau = -1/p$, $\sigma = -p$, $p \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$; $[\cdot]_+ = \max\{[\cdot], 0\}$; $\operatorname{tr} A_k = \sum_{i=1}^n a_{kii}(t)$ – след матрицы $A_k(t)$.

Покажем, что переопределенная система АДУ (3) разрешима в некоторых случаях.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $A_2(t)$ – вещественная симметричная матрица. Тогда уравнение нелинейной диффузии (1) обладает точным, анизотропным по пространственным переменным, неотрицательным решением

$$u(x, t) = [-0.5(x, A_2(t)x) - (x, B_2(t)) - C_2(t)]_+^{-1}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где

$$\begin{aligned} A_2(t) &= \dot{z}(t)\mathcal{S}Q(t)D(0)\mathcal{S}', & B_2(t) &= \dot{z}(t)\mathcal{S}Q(t)\mathcal{S}'B_2(0), \\ C_2(t) &= \frac{1}{2}\dot{z}(t)(B_2(0), D^{-1}(0)B_2(0)) + z(t)(B_2(0), B_2(t)). \end{aligned}$$

Здесь $\mathcal{S}$ – произвольная вещественная ортогональная $(n \times n)$ -матрица, $\mathcal{S}\mathcal{S}' = I$, I – единичная матрица,

$$\begin{aligned} D(t) &= \operatorname{diag}[d_1(t), \dots, d_n(t)], & D(0) &= \operatorname{diag}[d_1(0), \dots, d_n(0)], \\ d_k(t) &= \frac{d_k(0)\dot{z}(t)}{1 - 2d_k(0)z(t)}, & k &= 1, 2, \dots, n, \\ Q(t) &= \operatorname{diag}\left[\frac{1}{1 - 2d_1(0)z(t)}, \dots, \frac{1}{1 - 2d_n(0)z(t)}\right], \end{aligned}$$

а функция $z(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ)

$$\dot{z}(t) = \prod_{k=1}^n (1 - 2d_k(0)z(t))^{1/2}, \quad z(0) = 0, \quad \dot{z}(t) = \frac{d}{dt}z(t).$$

ПРИМЕР 1. Если $n = 3$, то уравнение (1) описывает [7] эволюцию плотности электронного пучка, подчиненного распределению Максвелла, и имеет следующее точное решение:

$$u(x, y, z, t) = \left[\frac{2 \operatorname{sn}(\sqrt{c_2 - c_1}t, k) \operatorname{cn}(\sqrt{c_2 - c_1}t, k)}{\operatorname{dn}(\sqrt{c_2 - c_1}t, k)} \left[\sqrt{c_2 - c_1}x^2 - \frac{2c_3}{k}x \right. \right. \\ - \frac{\operatorname{sn}^2(\sqrt{c_2 - c_1}t, k)}{\operatorname{dn}^2(\sqrt{c_2 - c_1}t, k)} \left(\frac{c_1}{\sqrt{c_2 - c_1}}y^2 + 2c_4ky \right) \\ + \operatorname{sn}^2(\sqrt{c_2 - c_1}t, k) \left(\sqrt{c_2 - c_1}z^2 - \frac{2c_5}{k}z \right) \\ + \frac{1}{\sqrt{c_2 - c_1} \operatorname{cn}^2(\sqrt{c_2 - c_1}t, k)} \left(\frac{c_3^2}{k^2} - c_4^2 \frac{\operatorname{sn}^2(\sqrt{c_2 - c_1}t, k)}{\operatorname{dn}^2(\sqrt{c_2 - c_1}t, k)} \right. \\ \left. \left. - \frac{c_5^2}{k^2} \operatorname{sn}^4(\sqrt{c_2 - c_1}t, k) \right) - \frac{2c_6}{k} \frac{\operatorname{sn}^2(\sqrt{c_2 - c_1}t, k)}{\operatorname{cn}^2(\sqrt{c_2 - c_1}t, k)} \right]^{-1} \Bigg]_+; \quad (4)$$

здесь $\operatorname{sn}(\sqrt{c_2 - c_1}t, k)$, $\operatorname{cn}(\sqrt{c_2 - c_1}t, k)$, $\operatorname{dn}(\sqrt{c_2 - c_1}t, k)$ – эллиптические функции Якоби [12] с модулем $k = \sqrt{c_2/(c_2 - c_1)}$, где $c_2 > c_1$, $c_2 \geq 0$, c_3, c_4, c_5, c_6 – произвольные постоянные.

Рассмотрим случаи вырождения эллиптических функций в тригонометрические и гиперболические. Если $c_2 = 0$, то $k = 0$ и из формулы (4) получим точное решение с тригонометрическими функциями времени

$$u(x, y, z, t) = \left[2 \sin(\sqrt{-c_1}t) \cos(\sqrt{-c_1}t) \left[\sqrt{-c_1}x^2 - 2c_3x \right. \right. \\ + \sin^2(\sqrt{-c_1}t) \left(\frac{-c_1}{\sqrt{-c_1}}y^2 - 2c_4y + \sqrt{-c_1}z^2 - 2c_5z \right) \\ + \frac{c_3^2}{\sqrt{-c_1} \cos^2(\sqrt{-c_1}t)} - \frac{(c_4^2 + c_5^2)}{\sqrt{-c_1}} \frac{\sin^4(\sqrt{-c_1}t)}{\cos^2(\sqrt{-c_1}t)} - 2c_6 \operatorname{tg}^2(\sqrt{-c_1}t) \left. \right]^{-1} \Bigg]_+.$$

Отметим, что при $c_1 = -1$, $c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0$ из последнего соотношения получим решение

$$u(x, y, z, t) = \left[\frac{2 \sin t \cos t}{x^2 + \sin^2 t (y^2 + z^2)} \right]_+,$$

приведенное в [7]. Полагая $c_1 = 0$, получим $k = 1$ и из выражения (4) вытекает точное решение с гиперболическими функциями времени

$$u(x, y, z, t) = \left[\operatorname{th}(\sqrt{c_2}t) \left[\sqrt{c_2}x^2 - 2c_3x - 2c_4 \operatorname{sh}^2(\sqrt{c_2}t)y + \operatorname{th}^2(\sqrt{c_2}t)(\sqrt{c_2}z^2 - 2c_5z) \right. \right. \\ + \frac{c_3^2}{\sqrt{c_2}} \operatorname{ch}^2(\sqrt{c_2}t) - \frac{c_4^2}{\sqrt{c_2}} \operatorname{sh}^2(\sqrt{c_2}t) \operatorname{ch}^2(\sqrt{c_2}t) \\ \left. \left. - \frac{c_5^2}{\sqrt{c_2}} \frac{\operatorname{sh}^4(\sqrt{c_2}t)}{\operatorname{ch}^2(\sqrt{c_2}t)} - 2c_6 \operatorname{sh}^2(\sqrt{c_2}t) \right]^{-1} \right]_+,$$

которое является довольно интересным, так как при $c_4 = 0$ оно вырождается в двумерное. Например, при $c_2 = 1$, $c_3 = c_4 = c_5 = 0$, $c_6 = -1/2$ имеем точное решение двумерного уравнения нелинейной диффузии (1)

$$u(x, y, t) = \left[\frac{2 \operatorname{th} t}{x^2 + y^2 \operatorname{th}^2 t + \operatorname{sh}^2 t} \right]_+.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $A_k(t)$ – вещественные симметричные матрицы, то уравнение нелинейной диффузии (1) имеет точное, неавтономное, анизотропное по пространственным переменным, явное неотрицательное решение (2) при $p = 1/2$. В этом случае функции $A_k(t)$, $B_k(t)$, $C_k(t)$ определяются из системы (АДУ) (3) и имеют вид

$$\begin{aligned} A_1(t) &= \beta \exp(-\alpha t) \mathcal{S} E_2 \mathcal{S}', & A_2(t) &= \alpha \mathcal{S} E_2 \mathcal{S}', \\ B_1(t) &= \exp(-2\alpha t) \left[\frac{\beta}{\alpha} (\exp(\alpha t) - 1) B_2^0 + B_1^0 \right], & B_2(t) &= B_2^0, \\ C_1(t) &= \frac{1}{2\beta} \exp(-3\alpha t) \left| \frac{\beta}{\alpha} (\exp(\alpha t) - 1) B_2^0 + B_1^0 \right|^2, \\ C_2(t) &= \frac{1}{2\alpha} |B_2^0|^2 - \frac{\alpha}{2\beta^2} \exp(-2\alpha t) \left| \frac{\beta}{\alpha} B_2^0 - B_1^0 \right|^2, \end{aligned}$$

причем

$$B_1^0 = \mathcal{S} E_2 \mathcal{S}' B_1^0, \quad B_2^0 = \mathcal{S} E_2 \mathcal{S}' B_2^0.$$

Здесь $\mathcal{S}' \mathcal{S} = I$, т.е. $\mathcal{S}$ – произвольная вещественная ортогональная $(n \times n)$ -матрица; $E_2 = \operatorname{diag}[1, 1, 0, \dots, 0]$ – диагональная матрица, в которой $n - 2$ нулевых элемента; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$; $B_1^0, B_2^0 \in \mathbb{R}^n$ – произвольные постоянные векторы.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если $n = 2$ и $p = 2$, то уравнение (1) описывает процесс растекания свертонкой пленки жидкости под действием сил Ван-дер-Ваальса и обладает точным неавтономным решением [11]

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \left[\alpha \exp\{0.5\psi(t)\} (x^2 + y^2)^2 + \frac{1}{8} (\dot{\psi}(t) + 4\mu \exp\{-0.5\psi(t)\}) x^2 \right. \\ &\quad \left. + \gamma \exp\{-0.5\psi(t)\} xy + \frac{1}{8} (\dot{\psi}(t) - 4\mu \exp\{-0.5\psi(t)\}) y^2 + \sigma \exp\{0.5\psi(t)\} \right]_+^{-1}, \end{aligned}$$

при этом функция $\psi(t)$ удовлетворяет ОДУ

$$\ddot{\psi} = 128\alpha\sigma \exp\{\psi\} - 8(\gamma^2 + \mu^2) \exp\{-\psi\},$$

где $\alpha, \sigma, \gamma, \mu \in \mathbb{R}$.

Известно [1, с. 114–120], [3], [4], что уравнение (1) при $n = 2$ является особым с точки зрения групповой теории [13], [14], так как группа Ли допустимых преобразований бесконечномерна.

ПРИМЕР 2. Уравнение нелинейной диффузии (1) при $x \in \mathbb{R}^2$ имеет следующее точное, анизотропное по пространственным переменным x и y решение:

$$u(x, y, t) = \left[4 \operatorname{cn}(\Omega t, k) \left[\frac{\gamma^2 + \mu^2}{4\sigma} (1 + \operatorname{sn}(\Omega t, k))(x^2 + y^2)^2 + (\Omega + 2\mu(1 - \operatorname{sn}(\Omega t, k)))x^2 + 4\gamma(1 - \operatorname{sn}(\Omega t, k))xy + (\Omega - 2\mu(1 - \operatorname{sn}(\Omega t, k)))y^2 + 4\sigma(1 + \operatorname{sn}(\Omega t, k)) \right]^{-1} \right]_+ \quad (5)$$

Здесь $\operatorname{sn}(\Omega t, k)$, $\operatorname{cn}(\Omega t, k)$ – соответственно эллиптический синус и эллиптический косинус Якоби с модулем

$$k = \sqrt{\frac{A^2 - 32(\gamma^2 + \mu^2)}{A^2 + 32(\gamma^2 + \mu^2)}}, \quad A^2 \geq 32(\gamma^2 + \mu^2), \quad \Omega = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + 32(\gamma^2 + \mu^2)},$$

где A, σ, γ, μ – произвольные постоянные.

При $A^2 = 32(\gamma^2 + \mu^2)$ эллиптические синус и косинус Якоби вырождаются в тригонометрические. В этом случае из (5) получим

$$u(x, y, t) = \left[4 \cos(\omega t) \left[\frac{\omega^2}{16\sigma} (1 + \sin(\omega t))(x^2 + y^2)^2 + (\omega^2 + 2\mu(1 - \sin(\omega t)))x^2 + 4\gamma(1 - \sin(\omega t))xy + (\omega^2 - 2\mu(1 - \sin(\omega t)))y^2 + 4\sigma(1 + \sin(\omega t)) \right]^{-1} \right]_+,$$

где $\omega = 4\sqrt{\gamma^2 + \mu^2}$, $\sigma, \gamma, \mu \in \mathbb{R}$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если $n = 2$, то уравнение нелинейной теплопроводности (1) обладает точным неавтомоделным решением (2) при $p = 1/2$. При этом $A_k(t)$, $B_k(t)$, $C_k(t)$ определяются формулами:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad A_1(t) &= \varphi(t)I, \quad \varphi(t) = \alpha e^{-\gamma t}, \quad A_2(t) = \gamma I, \\ B_1(t) &= \frac{1}{\gamma} \varphi(t) B_2^0 + e^{-2\gamma t} B_1^0, \quad B_2(t) = B_2^0, \\ C_1(t) &= \frac{1}{2\gamma^2} \varphi(t) |B_2^0|^2 + \frac{1}{\gamma} e^{-2\gamma t} (B_1^0, B_2^0) + \frac{1}{2\alpha} e^{-3\gamma t} |B_1^0|^2, \\ C_2(t) &= \frac{1}{2\gamma} |B_2^0|^2 - \frac{\gamma}{2\alpha^2} e^{-2\gamma t} |B_1^0|^2, \\ \text{(II)} \quad A_1(t) &= \varphi(t)I, \quad \varphi(t) = \alpha e^{\gamma t}, \quad A_2(t) = -\gamma I, \\ B_1(t) &= -\frac{1}{\gamma} \varphi(t) B_2^0 + e^{2\gamma t} B_1^0, \quad B_2(t) = B_2^0, \\ C_1(t) &= \frac{1}{2\gamma^2} \varphi(t) |B_2^0|^2 - \frac{1}{\gamma} e^{2\gamma t} (B_1^0, B_2^0) + \frac{1}{2\alpha} e^{3\gamma t} |B_1^0|^2, \\ C_2(t) &= -\frac{1}{2\gamma} |B_2^0|^2 + \frac{\gamma}{2\alpha^2} e^{2\gamma t} |B_1^0|^2, \end{aligned}$$

где $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $\gamma > 0$; $B_1^0, B_2^0 \in \mathbb{R}^2$ – произвольные постоянные векторы.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если $n = 3$, то уравнение нелинейной теплопроводности (1) обладает точным неавтономным решением (2) при $p = 1/2$. При этом функции $A_k(t), B_k(t), C_k(t)$, определяемые из системы АДУ (3), имеют вид

$$\begin{aligned} A_1(t) &= \alpha e^{-\gamma t} \Lambda, & B_1(t) &= \alpha e^{-\gamma t} B_2^0 + e^{-2\gamma t} (B_1^0 - \alpha B_2^0), \\ C_1(t) &= \frac{\alpha}{2} e^{-\gamma t} |B_2^0|^2 + e^{-2\gamma t} [(B_1^0, B_2^0) - \alpha |B_2^0|^2] + \frac{1}{2\alpha} e^{-3\gamma t} |B_1^0 - \alpha B_2^0|^2, \\ A_2(t) &= \gamma \Lambda, & B_2(t) &= \gamma B_2^0, & C_2(t) &= \frac{\gamma}{2} |B_2^0|^2 - \frac{\gamma}{2\alpha^2} e^{-2\gamma t} |B_1^0 - \alpha B_2^0|^2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} B_1^0 &= \begin{pmatrix} \sin \xi (b_{11} \cos \omega + b_{12} \sin \omega) \\ \cos \xi (b_{11} \cos \omega + b_{12} \sin \omega) \\ -b_{11} \sin \omega + b_{12} \cos \omega \end{pmatrix}, & B_2^0 &= \begin{pmatrix} \sin \xi (b_{21} \cos \omega + b_{22} \sin \omega) \\ \cos \xi (b_{21} \cos \omega + b_{22} \sin \omega) \\ -b_{21} \sin \omega + b_{22} \cos \omega \end{pmatrix}, \\ \Lambda &= \begin{pmatrix} \sin^2 \xi & \sin \xi \cos \xi & 0 \\ \sin \xi \cos \xi & \cos^2 \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \alpha, \gamma, b_{ij} &\in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0, \quad i, j = 1, 2. \end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Галактионов В. А., Дородницын В. А., Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Самарский А. А. Квазилинейное уравнение теплопроводности: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры // Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Итоги науки и техники. Т. 28. М.: ВИНТИ, 1986. С. 95–205.
- [2] Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
- [3] Галактионов В. А., Посашков С. А. О новых точных решениях параболических уравнений с квадратичными нелинейностями // ЖВМиМФ. 1989. Т. 29. № 4. С. 497–506.
- [4] Galaktionov V. A. On new exact blow-up solutions for nonlinear heat conduction equations with source and applications // Differential Integral Equations. 1990. V. 3. № 5. P. 863–874.
- [5] Galaktionov V. A. Invariant subspaces and new explicit solution to evolution equations with quadratic nonlinearities. School of Mathematics. Report № AM-91-11. Univ. Bristol; Bristol, 1991.
- [6] Рудых Г. А., Семенов Э. И. Построение точных решений многомерного квазилинейного уравнения теплопроводности // ЖВМиМФ. 1993. Т. 33. № 8. С. 1228–1239.
- [7] Пухначев В. В. Многомерные точные решения уравнения нелинейной диффузии // Прикл. мех. и тех. физика. 1995. Т. 36. № 2. С. 23–31.
- [8] Косыгина Е. Р. Об анизотропных точных решениях многомерного уравнения нестационарной фильтрации // ЖВМиМФ. 1995. Т. 35. № 2. С. 241–259.
- [9] Рудых Г. А., Семенов Э. И. Новые точные решения одномерного уравнения нелинейной диффузии // Сиб. матем. ж. 1997. Т. 38. № 5. С. 1130–1139.
- [10] Рудых Г. А., Семенов Э. И. О новых точных решениях одномерного уравнения нелинейной диффузии с источником (стоком) // ЖВМиМФ (принята к публикации)..
- [11] Рудых Г. А., Семенов Э. И. Точные неотрицательные решения многомерного уравнения нелинейной диффузии // Сиб. матем. ж. 1998. № 5. С. 1131–1141.
- [12] Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Гостехиздат, 1948.
- [13] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
- [14] Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.