Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Борисов, И. С. Мамаев, Гамильтоновость задачи Чаплыгина о качении шара, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 5, 793–795

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm791>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 18:34:30

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ГАМИЛЬТОНОВСТЬ ЗАДАЧИ ЧАПЛЫГИНА О КАЧЕНИИ ШАРА

А. В. Борисов, И. С. Мамаев

Уравнения движения и интегралы. Рассмотрим задачу о качении уравновешенного динамически несимметричного шара по горизонтальной шероховатой плоскости (скорость точки контакта равна нулю) в потенциальном поле сил. Движение шара в проекциях на главные оси, связанные с шаром, описывается системой

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + \gamma \times \frac{\partial V}{\partial \gamma}, & \dot{\gamma} &= \gamma \times \boldsymbol{\omega}, \\ \mathbf{M} &= \mathbf{I}_0 \boldsymbol{\omega} + D \gamma \times (\boldsymbol{\omega} \times \gamma), & D &= m a^2,\end{aligned}\quad (1)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости, γ – орт вертикали, $\mathbf{I}_0 = \text{diag}(I_1^0, I_2^0, I_3^0)$ – тензор инерции шара относительно его центра, m – масса шара, a – его радиус. Вектор $\mathbf{M}$ имеет смысл кинетического момента шара относительно точки контакта. При $V = 0$, как показал С. А. Чаплыгин в [1], уравнения (1) обладают интегрирующим множителем

$$\begin{aligned}\rho = \mu^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{1 - D(\gamma, (\mathbf{I}_0 + D\mathbf{E})^{-1}\gamma)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - D(\gamma, \mathbf{A}\gamma)}}, \\ \mathbf{A}\mathbf{I}^{-1} &= (\mathbf{I}_0 + D\mathbf{E})^{-1}, \quad \mathbf{E} = \|\delta_{ij}\|,\end{aligned}\quad (2)$$

и четырьмя независимыми интегралами

$$F_1 = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) \quad F_2 = (\mathbf{M}, \gamma), \quad F_3 = (\gamma, \gamma) = 1, \quad F_4 = (\mathbf{M}, \mathbf{M}), \quad (3)$$

что позволяет проинтегрировать систему по теореме Эйлера–Якоби. В работе [1] выполнено также интегрирование системы (1) в гиперэллиптических функциях.

В работе [2] показано, что задача остается интегрируемой при добавлении поля сил задачи Бруна $V = (k/2)(\mathbf{I}\gamma, \gamma)$, причем интегралы F_1, F_4 несколько модифицируются:

$$F_1 = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) + k(\mathbf{I}\gamma, \gamma), \quad F_4 = (\mathbf{M}, \mathbf{M}) - (\mathbf{C}\gamma, \gamma), \quad (4)$$

где $\mathbf{C} = \text{diag}(c_1, c_2, c_3)$, $c_i = k\varepsilon_{ijk}(I_j + D)(I_k + D)$, $i, j, k = 1, 2, 3$.

Аналогия с задачей Якоби. Уравнения (1) при $V = 0$ можно представить в угловых скоростях

$$\begin{aligned}\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + D\gamma \frac{(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}^{-1}\gamma)}{F}, \\ \dot{\gamma} &= \gamma \times \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{I} = \mathbf{I}_0 + D\mathbf{E}.\end{aligned}$$

На нулевом уровне интеграла площадей $(\mathbf{I}_0\boldsymbol{\omega}, \gamma) = 0$ они имеют интегралы в форме

$$(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) - D(\boldsymbol{\omega}, \gamma)^2 = 2h, \quad (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) - D^2(\boldsymbol{\omega}, \gamma)^2 = n, \quad (\gamma, \gamma) = 1.$$

Наше наблюдение состоит в том, что после замены

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \mu \mathbf{I}_0 \boldsymbol{\omega}, \quad \mu^2 = 1 - (\mathbf{I}^{-1} \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}_0^{-1} \boldsymbol{\gamma}) \quad (5)$$

интегралы (4) перейдут в интегралы задачи Якоби о геодезических на двумерном эллипсоиде, которую можно представить на алгебре $e(3)$ в переменных $\widetilde{\mathbf{M}}, \boldsymbol{\gamma}$ [3]. Прямым вычислением несложно показать, что с использованием переменных $\widetilde{\mathbf{M}}, \boldsymbol{\gamma}$ интегралы при условии $(\mathbf{I}_0 \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = (\widetilde{\mathbf{M}}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$ могут быть преобразованы в следующие:

$$H = n - 2hD = \frac{(\mathbf{J}\widetilde{\mathbf{M}}, \widetilde{\mathbf{M}})}{(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\gamma})}, \quad K = n = \frac{(\mathbf{J}\widetilde{\mathbf{M}} \times \boldsymbol{\gamma})^2}{(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\gamma})}, \quad \mathbf{J} = \mathbf{I}_0^{-1},$$

где H и K представляют собой соответственно гамильтониан и интеграл Иохимсталя задачи Якоби. Таким образом, на нулевом уровне интеграла площадей задача Чаплыгина и задача Якоби имеют одни и те же инвариантные торы.

Нелинейная скобка, изоморфизм с системой Брадена. Уравнения (1) оказываются гамильтоновыми после замены времени

$$dt \rightarrow \frac{1}{\rho} dt,$$

где ρ определено соотношением (2). Действительно, путем достаточно длинных вычислений можно проверить, что уравнения (1) в новом времени можно записать в гамильтоновом виде с *нелинейной* скобкой Пуассона

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk} \rho (M_k - g \gamma_k), \quad \{M_i, \gamma_j\} = \varepsilon_{ijk} \rho \gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0 \quad (6)$$

и гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \mathbf{A}\mathbf{M}) + \frac{1}{2}g(\mathbf{A}\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) + V(\boldsymbol{\gamma}). \quad (7)$$

При этом, как обычно,

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\partial H}{\partial \widetilde{\mathbf{M}}}, \quad g = D(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = \frac{D(\mathbf{A}\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})}{1 - D(\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})}.$$

Отметим, что пуассонова структура (6) не связана с интегрируемостью шара Чаплыгина или его обобщений, она имеется при произвольном потенциале $V(\boldsymbol{\gamma})$.

Скобка (6) является вырожденной и обладает функциями Казимира $F_1 = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})$, $F_2 = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})$. После замены переменных $\mathbf{M} \rightarrow \rho \mathbf{M}$, $\boldsymbol{\gamma} \rightarrow \boldsymbol{\gamma}$ скобку (6), гамильтониан (7) и функции Казимира можно представить в виде

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk} \left(M_k - D \frac{(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})}{\rho^2} a_k \gamma_k \right), \quad \{M_i, \gamma_j\} = \varepsilon_{ijk} \gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0, \quad (8)$$

$$H = \frac{1}{2}(1 - D(\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}))(\mathbf{M}, \mathbf{A}\mathbf{M}) + \frac{1}{2}D(\mathbf{A}\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})^2 + V(\boldsymbol{\gamma}), \quad F_1 = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}), \quad F_2 = \rho(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}).$$

Для более подробного исследования структуры нелинейной скобки (8) вычислим “монополь” [4], т.е. интеграл $\int \boldsymbol{\omega}$ по приведенной двумерной сфере, аналогичной сфере Пуассона, где $\boldsymbol{\omega}$ – 2-форма гироскопических сил, соответствующая структуре (8).

Действительно, уровень функций Казимира

$$(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1, \quad \rho(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) = c \quad (9)$$

приводится при помощи преобразования

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{M} - \frac{c}{\rho} \boldsymbol{\gamma} \quad (10)$$

к кокасательному расслоению двумерной сферы

$$(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1, \quad (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}) = 0. \quad (11)$$

Параметризуем многообразие (11) координатами, которые в классической динамике твердого тела соответствуют углам Эйлера θ , φ на сфере Пуассона и соответствующим им (для структуры $e(3)$) каноническим импульсам p_θ , p_φ :

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \sin \theta \sin \varphi, & \gamma_2 &= \sin \theta \cos \varphi, & \gamma_3 &= \cos \theta, \\ \sigma_1 &= -\operatorname{ctg} \theta \sin \varphi p_\varphi + \cos \varphi p_\theta, & \sigma_2 &= -\operatorname{ctg} \theta \cos \varphi p_\varphi - \sin \varphi p_\theta, & \sigma_3 &= p_\varphi. \end{aligned} \quad (12)$$

Выражая из (12) на уровне (9) компоненты φ , θ , p_φ , p_θ через $\mathbf{M}$, $\boldsymbol{\gamma}$ и применяя коммутационные соотношения (8), получим

$$\{\theta, \varphi\} = \{p_\varphi, \theta\} = \{p_\theta, \varphi\} = 0, \quad \{p_\theta, \theta\} = \{p_\varphi, \varphi\} = 1, \quad \{p_\varphi, p_\theta\} = \frac{c \sin \theta}{\rho^3}. \quad (13)$$

Интенсивность “монополя” задает интеграл

$$Q = \int_{S^2} \frac{c \sin \theta}{\rho^3} d\theta d\varphi = \frac{2\pi c}{\sqrt{(1 - Da_1)(1 - Da_2)(1 - Da_3)}}, \quad (14)$$

т.е., как и в классической динамике твердого тела [4], неустранимое магнитное поле ($Q \neq 0$) возникает при ненулевой постоянной площадей.

При $c = 0$ структура (8) сводится к линейной структуре, определяемой алгеброй $e(3)$. Дополнительный интеграл F_4 уравнений (1) при потенциале Бруна $V = (\varepsilon/2)(\mathbf{I}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})$ может быть представлен в новых переменных $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})$ в виде

$$\begin{aligned} F_4 &= (\mathbf{M}, \mathbf{M})(1 - D(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma})) - \frac{\varepsilon}{\det \mathbf{A}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}), \\ \mathbf{A} &= \operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3), \end{aligned} \quad (15)$$

или

$$\begin{aligned} F_4 &= (\mathbf{M}, \mathbf{M})(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{A}^* \boldsymbol{\gamma}) + \frac{\varepsilon D^2}{(1 - a_1^*)(1 - a_2^*)(1 - a_3^*)}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{A}^* \boldsymbol{\gamma}), \\ \mathbf{A} &= \operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3), \quad \mathbf{A}^* = \mathbf{E} - D\mathbf{A}. \end{aligned} \quad (16)$$

На уровне $F_4 = c_4$ система (16) эквивалентна следующей:

$$H^* = (\mathbf{M}, \mathbf{M}) + \frac{c}{(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{A}^* \boldsymbol{\gamma})}, \quad c = \operatorname{const}. \quad (17)$$

Именно такой гамильтониан возник в работе Брадена [5] в связи с изучением потенциалов на двумерной сфере, допускающих разделение переменных. Более общие результаты о рациональных потенциалах на сфере, допускающих разделение переменных, содержатся в [6].

Отметим, что разделяющие переменные для системы (6) при $V = 0$, указанные в [5], совпадают с разделяющими переменными, исследованными в работе [1], что делает преобразования в негोलомной системе более естественными – сводит их к обычному методу Гамильтона–Якоби.

Вопрос о гамильтоновости уравнений (1) без дополнительной замены времени поставлен в [2] и до сих пор не является решенным. Он связан с приводимостью динамической системы с интегральным инвариантом на торе к квазипериодическому потоку [3].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чаплыгин С. А. // Собр. соч. Т. 1. М.–Л.: ОГИЗ, 1948. С. 76–101.
2. Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 1995.
3. Борисов А. В., Мамаев И. С. Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во РХД, 1999.
4. Новиков С. П. // УМН. 1982. Т. 37. №5. С. 3–49.
5. Braden H. W. // Lett. in Math. Phys. 1982. V. 6. P. 449–452.
6. Wojciechowski S. // Phys. Lett. A. 1984. V. 107. № 3. P. 106–111.