Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Карацуба, О нижних оценках максимума модуля $\zeta(s)$ в малых областях критической полосы, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 5, 796–797

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm792>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 18:30:44

О НИЖНИХ ОЦЕНКАХ МАКСИМУМА МОДУЛЯ $\zeta(s)$ В МАЛЫХ ОБЛАСТЯХ КРИТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЫ

А. А. Карацуба

В статье автора [1] получены нижние оценки величины

$$\max_{T \leq t \leq T+\Delta} |\zeta(\sigma + it)|,$$

где $\zeta(s)$ – дзета-функция Римана, σ – фиксированное число с условием $0.5 \leq \sigma \leq 1$, $T \geq T_1 > 0$, $\Delta = \Delta(T) \rightarrow 0$ при $T \rightarrow +\infty$.

Здесь рассматривается ослабленный вариант этой проблемы, а именно, нижние оценки $|\zeta(s)|$ при условии, что $|s - s_1| = \Delta = \Delta(s_1) \rightarrow 0$, $|s_1| \rightarrow +\infty$, $0 < \operatorname{Re} s_1 < 1$. На основе теоремы Адамара о трех кругах и простейших оценок $|\zeta(s)|$ получается нижняя оценка соответствующей величины, подобная нижней оценке из [1]. Большой интерес, чем теорема, представляют сформулированные в конце статьи гипотезы, которые подобны гипотезам из [1], но несколько слабее последних.

Пусть, далее, $s = \sigma + it$, $s_1 = \sigma_1 + it_1$, где σ, σ_1, t, t_1 – вещественные числа, причем $0.5 \leq \sigma_1 \leq 1$, $t_1 \geq 4$; $i^2 = -1$; $0 < \Delta < 1/3$; $c_1, c_2, \dots$ – абсолютные положительные постоянные. Определим функцию $F(s_1; \Delta)$ равенством

$$F(s_1; \Delta) = \max_{|s - s_1| = \Delta} |\zeta(s)|.$$

ТЕОРЕМА. *Существует абсолютная постоянная $A > 0$ такая, что при $t_1 \geq A$ выполняется следующее неравенство:*

$$F(s_1; \Delta) \geq |s_1|^{6 \log \Delta}.$$

Для доказательства теоремы нужна лемма, известная в теории функций как *теорема Адамара о трех кругах*.

ЛЕММА. *Пусть $0 < r_1 < r_2$ и функция $f(s)$ однозначна и регулярна в области $r_1 \leq |s| \leq r_2$. Если*

$$M(r) = \max_{|s|=r} |f(s)|,$$

то при $r_1 \leq r \leq r_2$ имеет место оценка

$$M(r) \leq (M(r_1))^\alpha (M(r_2))^\beta, \quad (1)$$

где

$$\alpha \log \frac{r_2}{r_1} = \log \frac{r_2}{r}, \quad \beta \log \frac{r_2}{r_1} = \log \frac{r}{r_1}.$$

Доказательство этого утверждения см., например, в [2, с. 456].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Возьмем в лемме

$$f(s) = \zeta(s + s_1), \quad r_1 = \Delta, \quad r = 1.5, \quad r_2 = 2. \quad (2)$$

Из определения функции $M(r)$ следует, что

$$M(r_1) = F(s_1; \Delta), \quad M(r) \geq |\zeta(\sigma + 1.5 + it_1)| \geq 6\pi^{-2}.$$

В свою очередь, $M(r_2)$ не превосходит максимума $|\zeta(\sigma + it)|$, где $\sigma = \sigma_1 + 2 \cos \varphi$, $t = t_1 + 2 \sin \varphi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Из условий на σ_1 и t_1 получаем неравенства для σ и t : $-1.5 \leq \sigma \leq 3$, $t_1 - 2 \leq t \leq t_1 + 2$.

Полагая $x = \sqrt{t/(2\pi)}$, для $\zeta(\sigma + it)$ при $-3 \leq \sigma \leq 3$ имеем следующее приближенное равенство (приближенное функциональное уравнение Харди–Литтлвуда, см., например, [3, с. 73]):

$$\zeta(\sigma + it) = \sum_{n \leq x} n^{-\sigma - it} + h(\sigma; t) \sum_{n \leq x} n^{-1 + \sigma + it} + O(t^{-0.5\sigma}),$$

где

$$h(\sigma; t) = \pi^{\sigma - 0.5 + it} \Gamma\left(\frac{1 - \sigma}{2} - i\frac{t}{2}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{\sigma}{2} + i\frac{t}{2}\right).$$

При $t \geq t_1$ для $\Gamma(\sigma + it)$ справедлива асимптотическая формула

$$\Gamma(\sigma + it) = t^{\sigma - 1/2 + it} e^{-\pi t/2 - it + i\pi(\sigma - 1/2)/2} \sqrt{2\pi} (1 + O(t^{-1})).$$

Поэтому

$$|h(\sigma; t)| \leq c_1 t^{1/2 - \sigma}, \quad |\zeta(\sigma + it)| \leq \begin{cases} c_2 t^{(1 - \sigma)/2}, & \text{если } \sigma \leq 0.9, \\ c_2 t^{(1 - \sigma)/2} \log t, & \text{если } 0.9 \leq \sigma \leq 1 - (\log t)^{-1}, \\ c_2 \log t, & \text{если } \sigma > 1 - (\log t)^{-1}. \end{cases}$$

Отсюда следует нужная нам верхняя оценка $M(r_2)$:

$$M(r_2) \leq c_3 |s_1|^{5/4}. \quad (3)$$

Так как

$$\alpha = \frac{\log(4/3)}{\log(2/\Delta)}, \quad \beta = \frac{\log(3/(2\Delta))}{\log(2/\Delta)},$$

то из (1)–(3) находим

$$6\pi^{-2} \leq (F(s_1; \Delta))^\alpha (c_3 |s_1|^{5/4})^\beta, \quad F(s_1; \Delta) \geq |s_1|^{6 \log \Delta},$$

если только $t_1 \geq A > 0$, где A – абсолютная постоянная. Теорема доказана.

Каждая следующая из сформулированных гипотез сильнее предыдущей.

ГИПОТЕЗА 1. *Существуют абсолютные постоянные $c > 0$, $A > 0$ и функция $\Delta = \Delta(s_1)$, $\Delta(s_1) \rightarrow 0$ при $|s_1| \rightarrow +\infty$, такие, что при $t_1 \geq A$ выполняется оценка*

$$F(s_1; \Delta) \geq |s_1|^{-c}.$$

ГИПОТЕЗА 2. *Гипотеза 1 выполняется при*

$$\Delta = (\log \log |s_1|)^{-1}.$$

ГИПОТЕЗА 3. *Гипотеза 1 выполняется при*

$$\Delta = (\log |s_1|)^{-1}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карацуба А. А. // Докл. РАН. 2001. Т. 376. № 1. С. 15–16. 2. Прахар К. Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967. 3. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983.