Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Чешкова, О конформном отображении ортогональных поверхностей в E^{2n} , *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 5, 798–800

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm793>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 15:59:41

О КОНФОРМНОМ ОТОБРАЖЕНИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В E^{2n}

М. А. Чешкова

Введение. В евклидовом пространстве E^{2n} рассматриваются две гладкие n -поверхности M , $\overline{M}$ и диффеоморфизм $f: M \rightarrow \overline{M}$. Исследуется случай, когда касательные n -плоскости в соответствующих точках $p \in M$, $f(p) \in \overline{M}$ ортогональны.

ТЕОРЕМА 1. Если $f: M \rightarrow \overline{M}$ – конформное отображение ортогональных n -поверхностей M , $\overline{M}$ в E^{2n} , то тензоры Риччи поверхностей в соответствующих точках совпадают.

ТЕОРЕМА 2. Конформное отображение $f: M \rightarrow \overline{M}$ двух неминимальных ортогональных n -поверхностей M , $\overline{M}$ в E^{2n} сохраняет линии кривизны относительно вектора средней нормали.

1. Основные формулы. Пусть M , $\overline{M}$ – две гладкие n -поверхности в евклидовом пространстве E^{2n} , $f: M \rightarrow \overline{M}$ – диффеоморфизм, $F(M)$ – R -алгебра дифференцируемых на M функций, $T_s^q(M)$ – F -модуль дифференцируемых на M тензорных полей типа (q, s) , ∂ – дифференцирование в E^{2n} .

Формулы Гаусса–Вейнгартена поверхности M имеют вид

$$\partial_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y), \quad \partial_X \xi = -A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi, \quad (1)$$

где $X, Y \in T_0^1(M)$, ∇ – связность Леви–Чивита метрики $g(X, Y) = \langle X, Y \rangle$, α – вторая фундаментальная форма поверхности M , $\nabla^\perp$ – нормальная связность, $A_\xi \in T_1^1(M)$ – симметричный оператор, соответствующий полю $\xi \in TM^\perp$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в E^{2n} , причем

$$\langle A_\xi X, Y \rangle = \langle \alpha(X, Y), \xi \rangle.$$

Выполняются уравнения Гаусса–Кодацци

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, U) &= \langle \alpha(Y, Z), \alpha(X, U) \rangle - \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, U) \rangle, \\ \langle R^\perp(X, Y)\xi, \nu \rangle &= g([A_\xi, A_\nu]X, Y), \quad X, Y, Z, U \in TM, \quad \xi, \nu \in T^\perp M, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

– кривизна связности ∇ ,

$$R^\perp(X, Y)\xi = \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi - \nabla_{[X, Y]}^\perp \xi$$

– кривизна нормальной связности $\nabla^\perp$, $[\cdot, \cdot]$ – коммутатор.

Обозначим через r – радиус-вектор точки $p \in M$, через $\bar{r}$ – радиус-вектор точки $f(p) \in \overline{M}$. Тогда отображение $f: M \rightarrow \overline{M}$ запишется в виде

$$\bar{r} = f(r).$$

Дифференциал отображения f определится из равенства

$$df(X) = df(\partial_X r) = \partial_X \bar{r}.$$

Так как касательные плоскости поверхностей $\overline{M}, \overline{M}$ в соответствующих точках ортогональны, то определено отображение $\Omega: TM \rightarrow T^\perp M$, где $\Omega X = dfX$, $X \in TM$. Связность $\overline{\nabla}$ Леви-Чивита метрики

$$\overline{g}(X, Y) = \langle dfX, dfY \rangle = \langle \Omega X, \Omega Y \rangle \quad (3)$$

имеет вид [1]

$$\overline{\nabla}_X Y = \Omega^{-1} \nabla_X^\perp \Omega Y. \quad (4)$$

Если β – вторая фундаментальная форма поверхности $\overline{M}$, то

$$\overline{\alpha}(X, Y) = \beta(\Omega X, \Omega Y) = \partial_X dfY - df \overline{\nabla}_X Y.$$

Имеем [1]

$$\overline{\alpha}(X, Y) = -A_{\Omega X} Y = -A_{\Omega Y} X, \quad (5)$$

откуда следует, что трилинейная форма

$$\psi(X, Y, Z) = \langle \overline{\alpha}(X, Y), Z \rangle = -\langle A_{\Omega X} Y, Z \rangle = -\langle \alpha(Y, Z), \Omega X \rangle \quad (6)$$

симметрична.

2. Доказательство теоремы 1. Пусть $f: M \rightarrow \overline{M}$ – конформное отображение. Тогда

$$\overline{g}(X, Y) = \langle \Omega X, \Omega Y \rangle = k^2 g(X, Y) = k^2 \langle X, Y \rangle, \quad k \in F(M).$$

В силу (6) имеем

$$\langle \overline{\alpha}(X, Y), Z \rangle = -\langle \Omega \Omega^{-1} \alpha(X, Y), \Omega Z \rangle = -k^2 \langle \Omega^{-1} \alpha(X, Y), Z \rangle.$$

Таким образом,

$$\alpha(X, Y) = -\frac{1}{k^2} \Omega \overline{\alpha}(X, Y). \quad (7)$$

Итак,

$$\begin{aligned} \overline{R}(X, Y, Z, U) &= \langle \overline{\alpha}(Y, Z), \overline{\alpha}(X, U) \rangle - \langle \overline{\alpha}(X, Z), \overline{\alpha}(Y, U) \rangle, \\ R(X, Y, Z, U) &= \langle \alpha(Y, Z), \alpha(X, U) \rangle - \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, U) \rangle \\ &= \frac{1}{k^4} (\langle \Omega \overline{\alpha}(Y, Z), \Omega \overline{\alpha}(X, U) \rangle - \langle \Omega \overline{\alpha}(X, Z), \Omega \overline{\alpha}(Y, U) \rangle) \\ &= \frac{1}{k^2} (\langle \overline{\alpha}(Y, Z), \overline{\alpha}(X, U) \rangle - \langle \overline{\alpha}(X, Z), \overline{\alpha}(Y, U) \rangle) = \frac{1}{k^2} \overline{R}(X, Y, Z, U). \end{aligned}$$

Откуда следует, что тензоры Риччи $S_{ij} = g^{ks} R_{ikjs}$, $\overline{S}_{ij} = \overline{g}^{ks} \overline{R}_{ikjs}$ равны.

3. Доказательство теоремы 2. Операторы Вейнгартена $\overline{A}_X$ для поверхности $\overline{M}$ определяются из равенства

$$\langle \overline{A}_X \Omega Y, \Omega Z \rangle = \langle X, \overline{\alpha}(Y, Z) \rangle. \quad (8)$$

Тогда

$$\langle \overline{A}_X \Omega Y, \Omega Z \rangle = -\langle X, A_{\Omega Z} Y \rangle = -\langle \alpha(X, Y), \Omega Z \rangle,$$

откуда

$$\overline{A}_X \Omega Y = -\alpha(X, Y), \quad \overline{A}_X \Omega Y = \overline{A}_Y \Omega X. \quad (9)$$

Пусть X_i ($i = 1, \dots, n$) – базис $T_p M$, ΩX_i ($i = 1, \dots, n$) – базис $T_p M^\perp$, $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$, $\overline{g}_{ij} = \langle \Omega X_i, \Omega X_j \rangle = k^2 g_{ij}$. Определим квадратичные формы $h, \overline{h}$ [2, с. 206] – аналог третьих квадратичных форм поверхности в E^3 :

$$h(X, Y) = g^{ij} \langle \alpha(X_i, X), \alpha(X_j, Y) \rangle, \quad \overline{h}(X, Y) = \overline{g}^{ij} \langle \overline{\alpha}(X_i, X), \overline{\alpha}(X_j, Y) \rangle, \quad (10)$$

где $g_{ij}g^{ij} = \delta_i^j$, $\bar{g}_{ij}\bar{g}^{ij} = \delta_i^j$; $h(\bar{h})$ – метрика на грасмановом образе поверхности $M(\bar{M})$ [3]. Из (2) имеем

$$\bar{h}(X, Y) = h(X, Y). \quad (11)$$

Если $\eta, \bar{\eta}$ – векторы средних кривизн поверхностей $M, \bar{M}$, то для неминимальных поверхностей рассмотрим квадратичные формы $b, \bar{b}$ – аналог вторых квадратичных форм поверхности в E^3 [2, с. 207]:

$$b(X, Y) = \langle \alpha(X, Y), \eta \rangle, \quad \bar{b}(X, Y) = \langle \bar{\alpha}(X, Y), \bar{\eta} \rangle. \quad (12)$$

Имеют место формулы [2, с. 212], [3]

$$S(X, Y) = 2b(X, Y) - h(X, Y), \quad \bar{S}(X, Y) = 2\bar{b}(X, Y) - \bar{h}(X, Y), \quad (13)$$

где $S, \bar{S}$ – тензоры Риччи связностей $\nabla, \bar{\nabla}$. В силу теоремы 1 и равенств (8), (11) получим

$$\begin{aligned} b(X, Y) &= \langle \alpha(X, Y), \eta \rangle = \bar{b}(X, Y) = \langle \bar{\alpha}(X, Y), \bar{\eta} \rangle. \\ \langle A_\eta X, Y \rangle &= \langle \bar{A}_{\bar{\eta}} \Omega X, \Omega Y \rangle = k^2 \langle \Omega^{-1} \bar{A}_{\bar{\eta}} \Omega X, Y \rangle, \end{aligned}$$

или

$$k^2 \bar{A}_{\bar{\eta}} \Omega X = \Omega A_\eta X.$$

Отсюда следует, что если X – собственный вектор оператора A_η , то ΩX – собственный вектор оператора $\bar{A}_{\bar{\eta}}$. Следовательно, линии кривизны относительно вектора η при отображении $f: M \rightarrow \bar{M}$ перейдут в линии кривизны относительно вектора $\bar{\eta}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чешкова М. А. // Сиб. матем. ж. 1995. № 1. С. 228–232.
2. Базылев В. Т. Геометрия дифференцируемых многообразий. М.: Высшая школа, 1989.
3. Obata Y. // J. Diff. Geom. 1968. V. 2. № 2. P. 217–223.

Алтайский государственный университет, г. Барнаул
E-mail: cma@math.dcn-asu.ru

Поступило
13.02.1998
Исправленный вариант
13.03.2001