Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Галкина, О коэффициентах Фурье–Хаара функций
нескольких переменных с ограниченной вариацией Витали,
Матем. заметки, 2001, том 70, выпуск 6, 803–814

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm794>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 13:23:52

УДК 517.518.24+517.518.36+517.521.5

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ–ХААРА ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ С ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИЕЙ ВИТАЛИ

С. Ю. Галкина

Работа посвящена исследованию поведения коэффициентов $a_{m_1, \dots, m_n}(f)$ Фурье–Хаара функций f , интегрируемых по Лебегу на n -мерном кубе $D_n = [0, 1]^n$ и имеющих ограниченную вариацию Витали $V_{D_n} f$ на нем. Доказана оценка

$$\sum_{m_1=2}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=2}^{\infty} |a_{m_1, \dots, m_n}(f)| \leq \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{3} \right)^n \cdot V_{D_n} f$$

и показано, что она достигается на некоторой функции, имеющей конечную ненулевую вариацию Витали.

Библиография: 5 названий.

Введение. Пусть функция f имеет ограниченную вариацию $V_0^1 f$ на отрезке $[0, 1]$ и $\{a_m(f)\}_{m=1}^{\infty}$ – коэффициенты Фурье функции f по системе Хаара. Ульянов в работе [1, с. 372] установил следующую оценку:

$$\sum_{m=2}^{\infty} |a_m(f)| \leq \frac{3}{2 - \sqrt{2}} \cdot V_0^1 f.$$

Позднее, в спецкурсе, прочитанном в Московском университете, Ульянов улучшил константу $3/(2 - \sqrt{2})$, заменив ее на $2 + \sqrt{2}$.

В работе [2, с. 50] была получена оценка

$$\sum_{m=2}^{\infty} |a_m(f)| \leq \frac{2 + \sqrt{2}}{3} \cdot V_0^1 f$$

и установлено, что она достигается на некоторой имеющей ненулевую вариацию (и, значит, отличной от постоянной) функции f_0 .

В данной статье эти факты распространяются на случай n переменных. Для коэффициентов Фурье–Хаара $a_{m_1, \dots, m_n}(f)$ функции f , интегрируемой по Лебегу на n -мерном кубе $D_n = [0, 1]^n$ и имеющей ограниченную вариацию Витали $V_{D_n} f$ на нем, доказана оценка

$$\sum_{m_1=2}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=2}^{\infty} |a_{m_1, \dots, m_n}(f)| \leq \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{3} \right)^n \cdot V_{D_n} f.$$

Показано также, что эта оценка достигается на некоторой функции, имеющей конечную ненулевую вариацию Витали.

Основные определения. Пусть функция f интегрируема по Лебегу на n -мерном кубе $D_n = [0, 1]^n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда определены ее коэффициенты Фурье–Хаара

$$a_{m_1, \dots, m_n}(f) = \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_n) \cdot \chi_{m_1}(x_1) \cdots \chi_{m_n}(x_n) dx_n,$$

где $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$, а $\{\chi_m\}_{m=1}^\infty$ – система Хаара, которая определяется следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Системой Хаара* называется система функций, задаваемая следующим образом:

- а) $\chi_1(x) = 1$ при любом $x \in [0, 1]$;
 б) если $m = 2^k + i$, где $1 \leq i \leq 2^k$, $k = 0, 1, \dots$, и $x \in [0, 1]$, то

$$\chi_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \notin \left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right], \\ 2^{k/2} & \text{при } x \in \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}\right), \\ -2^{k/2} & \text{при } x \in \left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^k}\right), \\ \lim_{\delta \rightarrow +0} \chi_m(\delta) & \text{при } x = 0, \\ \lim_{\delta \rightarrow +0} \chi_m(1-\delta) & \text{при } x = 1, \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2} [\chi_m(x+\delta) + \chi_m(x-\delta)] & \text{при других } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Введем для каждого $i = 1, \dots, n$ разностный оператор

$$\Delta_{h_i}^{(i)} f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n).$$

Пусть $\Pi = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ – некоторый параллелепипед в пространстве $\mathbb{R}^n$, и пусть $\tau(\Pi)$ – семейство всех подмножеств T из Π вида

$$T = \{(x_1^{(k_1)}, x_2^{(k_2)}, \dots, x_n^{(k_n)}) \mid k_i = 0, 1, \dots, K_i, i = 1, \dots, n\}$$

таких, что $a_i = x_i^{(0)} < x_i^{(1)} < \cdots < x_i^{(K_i)} = b_i$, $i = 1, \dots, n$. Каждое множество $T \in \tau(\Pi)$ определяет разбиение параллелепипеда Π на более мелкие n -мерные параллелепипеды гиперплоскостями $x_i = x_i^{(k_i)}$, $k_i = 0, \dots, K_i$, $i = 1, \dots, n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (см. [3]). *Вариацией Витали функции $f: \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ по параллелепипеду Π* называется величина

$$V_\Pi f = \sup_{T \in \tau(\Pi)} V[T, f],$$

где

$$V[T, f] = \sum_{k_1=0}^{K_1-1} \cdots \sum_{k_n=0}^{K_n-1} \left| \Delta_{h_1^{(k_1)}}^{(1)} \cdots \Delta_{h_n^{(k_n)}}^{(n)} f(x_1^{(k_1)}, \dots, x_n^{(k_n)}) \right|$$

и $h_i^{(k_i)} = x_i^{(k_i+1)} - x_i^{(k_i)}$, $k_i = 0, \dots, K_i - 1$, $i = 1, \dots, n$. Если $V_\Pi f < \infty$, то говорят, что функция f имеет ограниченную вариацию Витали на Π . Класс всех функций, имеющих ограниченную вариацию Витали на Π , обозначается через $V(\Pi)$. В частности, далее мы будем рассматривать функции класса $V(D_n)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. При $n = 1$ определение 2 совпадает с обычным определением функции ограниченной вариации на отрезке.

В дальнейшем нам понадобится понятие вариации функции одной переменной на произвольном подмножестве $\mathbb{R}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Разбиением* множества $E \subset \mathbb{R}$, состоящего более чем из одной точки, назовем произвольное конечное множество точек $T = \{t_i\}_{i=0}^m \subset E$, $m \in \mathbb{N}$, такое, что $t_{i-1} < t_i$, $i = 1, \dots, m$. Семейство всех разбиений множества E обозначим через $\tau(E)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 (см., например, [4, с. 686]). *Вариацией функции* $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ на множестве $E \subset \mathbb{R}$, состоящем более чем из одной точки, называется величина

$$V_E f = \sup_{T \in \tau(E)} V[T, f],$$

где

$$V[T, f] = \sum_{i=0}^{m-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|.$$

Если множество E пусто или состоит из одной точки, то положим $V_E f = 0$.

Если $V_E f < \infty$, то будем называть f *функцией ограниченной вариации на E* .

Вспомогательные утверждения. Приведем несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 1. *Для всякой точки α из множества E выполняется равенство*

$$V_E f = V_{(-\infty, \alpha] \cap E} f + V_{[\alpha, +\infty) \cap E} f.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 1 приведено в работе [5, предложение 2.1, с. 155].

ЛЕММА 2. *Пусть $E \subset [0, 1]$ и $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации на E . Определим функцию $g(x)$, $x \in [0, 1]$, равенством $g(x) = V_{[0, x] \cap E} f$. Тогда для любых $\alpha < \beta$ из множества E выполняется равенство*

$$V_{[\alpha, \beta] \cap E} f = g(\beta) - g(\alpha).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что $g(\beta) = g(\alpha) + V_{[\alpha, \beta] \cap E} f$.

Положим $E_1 = [0, \beta] \cap E$. Согласно лемме 1 имеем равенство

$$V_{E_1} f = V_{(-\infty, \alpha] \cap E_1} f + V_{[\alpha, +\infty) \cap E_1} f.$$

Так как

$$\begin{aligned} (-\infty, \alpha] \cap E_1 &= (-\infty, \alpha] \cap [0, \beta] \cap E = [0, \alpha] \cap E, \\ [\alpha, +\infty) \cap E_1 &= [\alpha, +\infty) \cap [0, \beta] \cap E = [\alpha, \beta] \cap E, \end{aligned}$$

то

$$V_{[0, \beta] \cap E} f = V_{[0, \alpha] \cap E} f + V_{[\alpha, \beta] \cap E} f.$$

Замечая, что $V_{[0, \beta] \cap E} f = g(\beta)$ и $V_{[0, \alpha] \cap E} f = g(\alpha)$, получаем требуемое равенство. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть множество $E \subset [0, 1]$ имеет меру Лебега, равную 1, и функция $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию на E . Тогда ее можно так продолжить до функции $\tilde{f}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, имеющей ограниченную вариацию на $[0, 1]$, что $V_E f = V_0^1 \tilde{f}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим на $[0, 1]$ функцию $g(x) = V_{[0, x] \cap E} f$. Тогда $g(1) = V_E f$. По лемме 2 эта функция является неубывающей на $[0, 1]$. Поэтому в каждой точке $x \in (0, 1)$ существуют конечные односторонние пределы $g(x - 0)$ и $g(x + 0)$, и, кроме того, существуют конечные пределы $g(0 + 0)$ и $g(1 - 0)$.

Определим функцию $\tilde{f}(x)$, $x \in [0, 1]$, следующим образом.

а) Если $x \in E$, то положим $\tilde{f}(x) = f(x)$.

б) Пусть $x \in [0, 1] \setminus E$. Тогда так как $\mu(E) = 1$, при любом натуральном n в интервале $(x, x + 1/n)$ найдется точка $x_n \in E$. Таким образом, получим последовательность $\{x_n\}$ точек из E таких, что $x_n > x$ и $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$). Из определения вариации следует, что при $x_m \leq x_n$ выполнена оценка

$$|f(x_m) - f(x_n)| \leq V_{[x_m, x_n] \cap E} f,$$

а согласно лемме 2 вариация $V_{[x_m, x_n] \cap E} f = |g(x_m) - g(x_n)|$, поэтому $|f(x_m) - f(x_n)| \leq |g(x_m) - g(x_n)|$. Отсюда, учитывая, что

$$|g(x_m) - g(x_n)| \leq |g(x_m) - g(x + 0)| + |g(x_n) - g(x + 0)| \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty),$$

получаем, что $|f(x_m) - f(x_n)| \rightarrow 0$ ($m, n \rightarrow \infty$). Таким образом, последовательность $\{f(x_n)\}$ фундаментальна в $\mathbb{R}$ и, значит, имеет предел. Остается положить

$$\tilde{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

в) Если $x = 1 \notin E$, то положим

$$\tilde{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n),$$

где $x_n \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$), $x_n < 1$, $x_n \in E$ при $n \in \mathbb{N}$ (существование такой последовательности x_n и предела $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ доказывается аналогично п. б)).

Итак, функция $\tilde{f}(x)$ определена. Покажем, что $V_0^1 \tilde{f}(x) = V_E f$.

Неравенство $V_E f \leq V_0^1 \tilde{f}(x)$ очевидно. Докажем, что $V_0^1 \tilde{f}(x) \leq V_E f$. Возьмем произвольное разбиение $T = \{t_k\}_{k=0}^N \in \tau([0, 1])$. Тогда по определению функции $\tilde{f}(x)$ для любого $k = 0, 1, \dots, N$ существует последовательность $\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^\infty$ точек из E таких, что $x_n^{(k)} \rightarrow t_k$ ($n \rightarrow \infty$) и $\tilde{f}(t_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^{(k)})$. Поэтому

$$V[T, f] = \sum_{k=0}^{N-1} |\tilde{f}(t_{k+1}) - \tilde{f}(t_k)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} |f(x_n^{(k+1)}) - f(x_n^{(k)})| \leq V_E f.$$

Переходя здесь к супремуму по $T \in \tau([0, 1])$, получаем неравенство $V_0^1 \tilde{f}(x) \leq V_E f$, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 4. Пусть функция f интегрируема по Лебегу на $[0, 1]$, $\{a_m(f)\}_{m=1}^\infty$ — ее коэффициенты Фурье-Хаара. Тогда если $m = 2^k + i$, $i = 1, \dots, 2^k$, $k = 0, 1, \dots$, то

$$a_m(f) = -2^{k/2} \int_{(i-1)/2^k}^{(2i-1)/2^{k+1}} \Delta_{1/2^{k+1}} f(t) dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения функций Хаара следует цепочка равенств

$$\begin{aligned} a_m(f) &= \int_0^1 f(t) \chi_m(t) dt = 2^{k/2} \int_{(i-1)/2^k}^{(2i-1)/2^{k+1}} f(t) dt - 2^{k/2} \int_{(2i-1)/2^{k+1}}^{i/2^k} f(t) dt \\ &= 2^{k/2} \int_{(i-1)/2^k}^{(2i-1)/2^{k+1}} \left(f(t) - f\left(t + \frac{1}{2^{k+1}}\right) \right) dt \\ &= -2^{k/2} \int_{(i-1)/2^k}^{(2i-1)/2^{k+1}} \Delta_{1/2^{k+1}} f(t) dt, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Пусть $f \in L_1(D_n)$, $n \geq 2$. Обозначим через E_f множество тех чисел x_1 , для которых функция $f_{x_1}(x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определена и принадлежит по $(x_2, \dots, x_n)$ классу $L_1(D_{n-1})$. По теореме Фубини мера Лебега множества E_f равна 1.

ЛЕММА 5. Пусть функция f имеет ограниченную вариацию Витали на D_n и интегрируема по Лебегу на D_n , $n \geq 2$. Тогда для любого набора $m_2, \dots, m_n$ натуральных чисел не меньших 2 функция

$$f_{m_2, \dots, m_n}(x_1) = a_{m_2, \dots, m_n}(f(x_1, \cdot))$$

определена на E_f , имеет на этом множестве ограниченную вариацию, и ее можно продолжить на $[0, 1]$ до функции ограниченной вариации $\tilde{f}_{m_2, \dots, m_n}$ такой, что

$$V_0^1 \tilde{f}_{m_2, \dots, m_n} = V_{E_f} f_{m_2, \dots, m_n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Фубини функция $f_{m_2, \dots, m_n}$ определена и интегрируема по Лебегу на множестве E_f . Поскольку $\mu(E_f) = 1$, то, учитывая лемму 3, достаточно доказать, что функция $f_{m_2, \dots, m_n}$ имеет ограниченную вариацию на E_f .

Возьмем произвольное разбиение $T = \{t_s\}_{s=0}^N \in \tau(E_f)$. Оценим величину

$$\begin{aligned} V[T, f_{m_2, \dots, m_n}] &= \sum_{s=0}^{N-1} |a_{m_2, \dots, m_n}(f(t_{s+1}, \cdot)) - a_{m_2, \dots, m_n}(f(t_s, \cdot))| \\ &= \sum_{s=0}^{N-1} |a_{m_2, \dots, m_n}(\Delta_{h_s}^{(1)} f(t_s, \cdot))|, \end{aligned}$$

где $h_s = t_{s+1} - t_s$, $s = 0, \dots, N-1$.

Пусть $m_p = 2^{k_p} + i_p$, где $i_p = 1, \dots, 2^{k_p}$, $k_p = 0, 1, \dots$, $p = 2, \dots, n$. Тогда по лемме 4 для любого $s = 0, 1, \dots, N-1$ имеем

$$\begin{aligned} |a_{m_2, \dots, m_n}(\Delta_{h_s}^{(1)} f(t_s, \cdot))| &\leq 2^{(k_2 + \dots + k_n)/2} \cdot \int_{(i_2-1)/2^{k_2}}^{(2i_2-1)/2^{k_2+1}} dx_2 \dots \\ &\times \int_{(i_n-1)/2^{k_n}}^{(2i_n-1)/2^{k_n+1}} |\Delta_{h_s}^{(1)} \Delta_{1/2^{k_2+1}}^{(2)} \dots \Delta_{1/2^{k_n+1}}^{(n)} f(t_s, x_2, \dots, x_n)| dx_n. \end{aligned}$$

Просуммировав по s , найдем, что

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{N-1} |a_{m_2, \dots, m_n}(\Delta_{h_s}^{(1)} f(t_s, \cdot))| &\leq 2^{(k_2 + \dots + k_n)/2} \cdot \int_{(i_2-1)/2^{k_2}}^{(2i_2-1)/2^{k_2+1}} dx_2 \dots \\ &\times \int_{(i_n-1)/2^{k_n}}^{(2i_n-1)/2^{k_n+1}} \sum_{s=0}^{N-1} |\Delta_{h_s}^{(1)} \Delta_{1/2^{k_2+1}}^{(2)} \dots \Delta_{1/2^{k_n+1}}^{(n)} f(t_s, x_2, \dots, x_n)| dx_n \\ &\leq 2^{(k_2 + \dots + k_n)/2} \cdot \int_{(i_2-1)/2^{k_2}}^{(2i_2-1)/2^{k_2+1}} dx_2 \dots \int_{(i_n-1)/2^{k_n}}^{(2i_n-1)/2^{k_n+1}} V_{D_n} f dx_n \leq V_{D_n} f. \end{aligned}$$

Таким образом, получили неравенство

$$V[T, f_{m_2, \dots, m_n}] \leq V_{D_n} f.$$

Переходя в этом неравенстве к супремуму по $T \in \tau(E_f)$, видим, что $V_{E_f} f_{m_2, \dots, m_n} \leq V_{D_n} f$, т.е. функция $f_{m_2, \dots, m_n}$ имеет ограниченную вариацию на множестве E_f , что и требовалось доказать.

ЛЕММА 6. Пусть функция f имеет ограниченную вариацию Витали на D_n и интегрируема по Лебегу на D_n , $n \geq 2$. Тогда для всех $\alpha, \beta \in E_f$ функция $F_{\alpha, \beta} = f(\beta, \cdot) - f(\alpha, \cdot)$ имеет ограниченную вариацию Витали на D_{n-1} и интегрируема по Лебегу на D_{n-1} , причем

$$V_{D_{n-1}} F_{\alpha, \beta} \leq V_{[\alpha, \beta] \times D_{n-1}} f.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрируемость функции $F_{\alpha, \beta}$ по Лебегу на D_{n-1} следует из определения множества E_f . Покажем, что $F_{\alpha, \beta}$ имеет ограниченную вариацию Витали на D_{n-1} .

Пусть T – произвольное множество из $\tau(D_{n-1})$,

$$T = \{(x_2^{(k_2)}, x_3^{(k_3)}, \dots, x_n^{(k_n)}) \mid k_i = 0, 1, \dots, K_i, i = 2, \dots, n\},$$

и $h_i^{(k_i)} = x_i^{(k_i+1)} - x_i^{(k_i)}$, $i = 2, \dots, n$. Так как $F_{\alpha, \beta}(x_2, \dots, x_n) = \Delta_{\beta-\alpha}^{(1)} f(\alpha, x_2, \dots, x_n)$, то

$$\begin{aligned} V[T, F_{\alpha, \beta}] &= \sum_{k_2=0}^{K_2-1} \cdots \sum_{k_n=0}^{K_n-1} |\Delta_{h_2^{(k_2)}}^{(2)} \cdots \Delta_{h_n^{(k_n)}}^{(n)} F_{\alpha, \beta}(t_2^{(k_2)}, \dots, t_n^{(k_n)})| \\ &= \sum_{k_2=0}^{K_2-1} \cdots \sum_{k_n=0}^{K_n-1} |\Delta_{\beta-\alpha}^{(1)} \Delta_{h_2^{(k_2)}}^{(2)} \cdots \Delta_{h_n^{(k_n)}}^{(n)} f(\alpha, t_2^{(k_2)}, \dots, t_n^{(k_n)})|. \end{aligned}$$

Поэтому

$$V[T, F_{\alpha, \beta}] \leq V_{[\alpha, \beta] \times D_{n-1}} f.$$

Переходя в последнем неравенстве к супремуму по $T \in \tau(D_{n-1})$, получим, что

$$V_{D_{n-1}} F_{\alpha, \beta} \leq V_{[\alpha, \beta] \times D_{n-1}} f.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Пусть $D_{n-1} = [0, 1]^{n-1}$, $D_n = [0, 1]^n$, $n \geq 2$, и

$$0 = x^{(0)} < x^{(1)} < \dots < x^{(i)} < x^{(i+1)} < \dots < x^{(I)} = 1$$

– произвольное разбиение отрезка $[0, 1]$. Тогда

$$\sum_{i=0}^{I-1} V_{[x^{(i)}, x^{(i+1)}] \times D_{n-1}} f = V_{D_n} f.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Покажем, что

$$\sum_{i=0}^{I-1} V_{[x^{(i)}, x^{(i+1)}] \times D_{n-1}} f \leq V_{D_n} f.$$

Возьмем для каждого $i = 0, \dots, I-1$ разбиение $T^{(i)}$ из класса $\tau([x^{(i)}, x^{(i+1)}] \times D_{n-1})$. Тогда множество T , являющееся объединением всех разбиений $T^{(i)}$, $i = 0, \dots, I-1$, будет элементом семейства $\tau(D_n)$, т.е. разбиением куба D_n , и будет выполняться равенство

$$\sum_{i=0}^{I-1} V[T^{(i)}, f] = V[T, f].$$

Отсюда, поскольку $V[T, f] \leq V_{D_n} f$, получаем, что

$$\sum_{i=0}^{I-1} V[T^{(i)}, f] \leq V_{D_n} f.$$

Переходя в этом неравенстве последовательно при каждом $i = 0, \dots, I-1$ к супремумам по $T^{(i)} \in \tau([x^{(i)}, x^{(i+1)}] \times D_{n-1})$, получим, что

$$\sum_{i=0}^{I-1} V_{[x^{(i)}, x^{(i+1)}] \times D_{n-1}} f \leq V_{D_n} f.$$

2) Покажем, что верно и обратное неравенство. Возьмем произвольное разбиение

$$T = \{(x_1^{(k_1)}, x_2^{(k_2)}, \dots, x_n^{(k_n)}) \mid k_j = 0, 1, \dots, K_j, j = 1, \dots, n\}$$

из класса $\tau(D_n)$. Если какие-то из точек $x^{(i)}$, $i = 0, \dots, I-1$, не попали в множество $x_1^{(0)}, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(K_1)}$, то присоединим их и получим более мелкое разбиение T' . Поскольку при измельчении разбиения величина $V[T, f]$ не уменьшается, то

$$V[T, f] \leq V[T', f] = \sum_{i=0}^{I-1} V[T^{(i)}, f],$$

где множества $T^{(i)} = T' \cap ([x^{(i)}, x^{(i+1)}] \times D_{n-1})$, $i = 0, \dots, I-1$, являются элементами семейств $\tau([x^{(i)}, x^{(i+1)}] \times D_{n-1})$ соответственно. Так как $V[T^{(i)}, f] \leq V_{[x^{(i)}, x^{(i+1)}] \times D_{n-1}}$, то получаем оценку

$$V[T^{(i)}, f] \leq \sum_{i=0}^{I-1} V_{[x^{(i)}, x^{(i+1)}] \times D_{n-1}} f,$$

которая верна для произвольного разбиения $T \in \tau(D_n)$. Беря супремум по $T \in \tau(D_n)$, приходим к неравенству

$$\sum_{i=0}^{I-1} V_{[x^{(i)}, x^{(i+1)}] \times D_{n-1}} f \geq V_{D_n} f,$$

что и требовалось доказать.

Основной результат. Обозначим символом $V_L(D_n)$ класс всех функций, имеющих ограниченную вариацию Витали на D_n и интегрируемых по Лебегу на D_n . Справедлива

ТЕОРЕМА. 1) Для коэффициентов Фурье–Хаара $a_{m_1, \dots, m_n}(f)$ произвольной функции f из класса $V_L(D_n)$, $n \in \mathbb{N}$, верна оценка

$$\sum_{m_1=2}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=2}^{\infty} |a_{m_1, \dots, m_n}(f)| \leq \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{3} \right)^n \cdot V_{D_n} f.$$

2) Найдется функция $g_0 \in V_L(D_n)$ с отличной от нуля вариацией Витали, для которой в оценке из утверждения 1) достигается равенство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство утверждения 1) теоремы проведем методом математической индукции по числу переменных n .

Для случая $n = 1$ теорема доказана в работе [2]. Пусть теперь $n \geq 2$. Предположим, что теорема верна для функций от $n - 1$ переменных. Покажем, что тогда она верна и для функций от n переменных.

По лемме 5 функция $f_{m_2, \dots, m_n}(x_1) = a_{m_2, \dots, m_n}(f(x_1, \cdot))$ определена на множестве $E_f \subset [0, 1]$ лебеговой меры 1, имеет на этом множестве ограниченную вариацию и ее можно продолжить на $[0, 1]$ до функции ограниченной вариации $\tilde{f}_{m_2, \dots, m_n}$ такой, что $V_0^1 \tilde{f}_{m_2, \dots, m_n} = V_{E_f} f_{m_2, \dots, m_n}$. Очевидно, что коэффициенты Фурье-Хаара функций $f_{m_2, \dots, m_n}$ и $\tilde{f}_{m_2, \dots, m_n}$ также совпадают. Применяя к функции $\tilde{f}_{m_2, \dots, m_n}$ теорему 1 из [2, с. 50], видим, что выполняется неравенство

$$\sum_{m_1=2}^{\infty} |a_{m_1}(\tilde{f}_{m_2, \dots, m_n})| \leq c \cdot V_0^1 \tilde{f}_{m_2, \dots, m_n},$$

где $c = (2 + \sqrt{2})/3$. Из этого неравенства получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sum_{m_1, \dots, m_n=2}^{\infty} |a_{m_1, \dots, m_n}(f)| &= \sum_{m_2, \dots, m_n=2}^{\infty} \sum_{m_1=2}^{\infty} |a_{m_1}(\tilde{f}_{m_2, \dots, m_n})| \\ &\leq \sum_{m_2, \dots, m_n=2}^{\infty} c \cdot V_0^1 \tilde{f}_{m_2, \dots, m_n} \\ &= c \cdot \sum_{m_2, \dots, m_n=2}^{\infty} V_{E_f} f_{m_2, \dots, m_n}. \end{aligned} \quad (1)$$

Далее зафиксируем натуральные числа $M_2, \dots, M_n$ не меньшие 2 и рассмотрим сумму

$$\begin{aligned} &\sum_{m_2=2}^{M_2} \cdots \sum_{m_n=2}^{M_n} V_{E_f} f_{m_2, \dots, m_n} \\ &= \sum_{m_2=2}^{M_2} \cdots \sum_{m_n=2}^{M_n} \sup_{T(m_2, \dots, m_n)} \sum_{i(m_2, \dots, m_n)=0}^{I(m_2, \dots, m_n)} |f_{m_2, \dots, m_n}(x_{m_2, \dots, m_n}^{(i(m_2, \dots, m_n)+1)}) \\ &\quad - f_{m_2, \dots, m_n}(x_{m_2, \dots, m_n}^{(i(m_2, \dots, m_n))})|, \end{aligned} \quad (2)$$

где $T(m_2, \dots, m_n) = \{x_{m_2, \dots, m_n}^{(0)} < x_{m_2, \dots, m_n}^{(1)} < \cdots < x_{m_2, \dots, m_n}^{(I(m_2, \dots, m_n))}\}$ – произвольное разбиение множества E_f , соответствующее функции $f_{m_2, \dots, m_n}(x_1)$, $m_k = 2, 3, \dots, M_k$, $k = 2, \dots, n$.

Пусть $T = \{x^{(0)} < x^{(1)} < \cdots < x^{(I)}\}$ – объединение разбиений $T(m_2, \dots, m_n)$ по всем наборам $(m_2, \dots, m_n)$, $m_k = 2, 3, \dots, M_k$, $k = 2, \dots, n$. Оно получается измельчением каждого из разбиений $T(m_2, \dots, m_n)$. Поскольку при измельчении разбиения суммы вида (2) не уменьшаются, то

$$\begin{aligned} &\sum_{m_2=2}^{M_2} \cdots \sum_{m_n=2}^{M_n} V_{E_f} f_{m_2, \dots, m_n} \\ &\leq \sup_{T \in \tau[0, 1]} \sum_{m_2=2}^{M_2} \cdots \sum_{m_n=2}^{M_n} \sum_{i=0}^{I-1} |f_{m_2, \dots, m_n}(x^{(i+1)}) - f_{m_2, \dots, m_n}(x^{(i)})|. \end{aligned}$$

Меняя порядок суммирования, получим

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m_2=2}^{M_2} \cdots \sum_{m_n=2}^{M_n} V_{E_f} f_{m_2, \dots, m_n} \\
 & \leq \sup_{T \in \tau[0,1]} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{m_2=2}^{M_2} \cdots \sum_{m_n=2}^{M_n} |f_{m_2, \dots, m_n}(x^{(i+1)}) - f_{m_2, \dots, m_n}(x^{(i)})| \\
 & = \sup_{T \in \tau[0,1]} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{m_2=2}^{M_2} \cdots \sum_{m_n=2}^{M_n} |a_{m_2, \dots, m_n}(f(x^{(i+1)}, \cdot) - f(x^{(i)}, \cdot))|,
 \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m_2=2}^{M_2} \cdots \sum_{m_n=2}^{M_n} V_{E_f} f_{m_2, \dots, m_n} \\
 & \leq \sup_{T \in \tau[0,1]} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{m_2, \dots, m_n=2}^{\infty} |a_{m_2, \dots, m_n}(f(x^{(i+1)}, \cdot) - f(x^{(i)}, \cdot))|. \quad (3)
 \end{aligned}$$

По лемме 6 функция $F_{x^{(i)}, x^{(i+1)}}$ от $n-1$ переменных, определяемая равенством

$$F_{x^{(i)}, x^{(i+1)}} = f(x^{(i+1)}, \cdot) - f(x^{(i)}, \cdot),$$

принадлежит классу $V_L(D_{n-1})$, причем

$$V_{D_{n-1}} F_{x^{(i)}, x^{(i+1)}} \leq V_{[x^{(i)}, x^{(i+1)}] \times D_{n-1}} f.$$

Применив к функции $F_{x^{(i)}, x^{(i+1)}}$ предположение индукции, получаем неравенство

$$\begin{aligned}
 & \sup_{T \in \tau[0,1]} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{m_2, \dots, m_n=2}^{\infty} |a_{m_2, \dots, m_n}(f(x^{(i+1)}, \cdot) - f(x^{(i)}, \cdot))| \\
 & \leq \sup_{T \in \tau[0,1]} \sum_{i=0}^{I-1} c^{n-1} V_{D_{n-1}} F_{x^{(i)}, x^{(i+1)}} \\
 & \leq \sup_{T \in \tau[0,1]} \sum_{i=0}^{I-1} c^{n-1} V_{[x^{(i)}, x^{(i+1)}] \times D_{n-1}} f.
 \end{aligned}$$

Учитывая, что по лемме 7 выполнено соотношение

$$\sum_{i=0}^{I-1} V_{[x^{(i)}, x^{(i+1)}] \times D_{n-1}} f = V_{D_n} f,$$

приходим к неравенству

$$\sup_T \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{m_2, \dots, m_n=2}^{\infty} |a_{m_2, \dots, m_n}(f(x^{(i+1)}, \cdot) - f(x^{(i)}, \cdot))| \leq c^{n-1} V_{D_n} f. \quad (4)$$

Таким образом, из (3) и (4) имеем

$$\sum_{m_2=2}^{M_2} \cdots \sum_{m_n=2}^{M_n} V_{E_f} f_{m_2, \dots, m_n} \leq c^{n-1} V_{D_n} f.$$

Устремляя $M_2, \dots, M_n$ к бесконечности, приходим к оценке

$$\sum_{m_2=2}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=2}^{\infty} V_{E_f} f_{m_2, \dots, m_n} \leq c^{n-1} V_{D_n} f.$$

Комбинируя последнее неравенство с неравенством (1), получаем соотношение

$$\sum_{m_2, \dots, m_n=2}^{\infty} |a_{m_1, \dots, m_n}(f)| \leq c^n V_{D_n} f,$$

которое требовалось доказать в утверждении 1) теоремы.

Докажем утверждение 2). Для этого подберем функцию $g_0 \in V_L(D_n)$, имеющую конечную отличную от нуля вариацию Витали на D_n и интегрируемую по Лебегу на D_n , для которой выполняется равенство

$$\sum_{m_1=2}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=2}^{\infty} |a_{m_1, \dots, m_n}(g_0)| = \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{3} \right)^n \cdot V_{D_n} g_0.$$

Положим

$$g_0(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{при } x_i \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \text{ для всех } i = 1, \dots, n, \\ 0 & \text{в остальных точках } D_n. \end{cases}$$

Вычислим

$$\sum_{m_1=2}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=2}^{\infty} |a_{m_1, \dots, m_n}(g_0)|.$$

Для этого определим функцию $f_0(t)$, $t \in [0, 1]$, равенством

$$f_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in \left[0, \frac{1}{3}\right], \\ 0 & \text{при других } t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Тогда, очевидно, $g_0(x_1, \dots, x_n) = f_0(x_1) f_0(x_2) \cdots f_0(x_n)$; следовательно,

$$\begin{aligned} |a_{m_1, \dots, m_n}(g_0)| &= \left| \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 g_0(x_1, \dots, x_n) \cdot \chi_{m_1}(x_1) \cdots \chi_{m_n}(x_n) dx_n \right| \\ &= \left| \int_0^1 f_0(x_1) \chi_{m_1}(x_1) dx_1 \cdots \int_0^1 f_0(x_n) \chi_{m_n}(x_n) dx_n \right| \\ &= |a_{m_1}(f_0)| \cdots |a_{m_n}(f_0)|. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{m_1=2}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=2}^{\infty} |a_{m_1, \dots, m_n}(g_0)| &= \sum_{m_1=2}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=2}^{\infty} |a_{m_1}(f_0)| \cdots |a_{m_n}(f_0)| \\ &= \left(\sum_{m=2}^{\infty} |a_m(f_0)| \right)^n. \end{aligned} \quad (5)$$

В теореме 1 работы [2] доказано равенство

$$\sum_{m=2}^{\infty} |a_m(f_0)| = \frac{2 + \sqrt{2}}{3} V_0^1 f_0,$$

из которого с учетом (5) получаем, что

$$\sum_{m_1=2}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=2}^{\infty} |a_{m_1, \dots, m_n}(g_0)| = \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{3} \right)^n \cdot (V_0^1 f_0)^n. \quad (6)$$

Теперь вычислим вариацию Витали функции g_0 :

$$\begin{aligned} V_{D_n} g_0 &= \sup_{T \in \tau(D_n)} \sum_{r_1=0}^{l_1-1} \cdots \sum_{r_n=0}^{l_n-1} |\Delta_{h_1}^{(1)} \cdots \Delta_{h_n}^{(n)} g_0(x_1^{(r_1)}, \dots, x_n^{(r_n)})| \\ &= \sup_{T \in \tau(D_n)} \sum_{r_1=0}^{l_1-1} |\Delta_{h_1}^{(1)} f_0(x_1^{(r_1)})| \cdots \sum_{r_n=0}^{l_n-1} |\Delta_{h_n}^{(n)} f_0(x_n^{(r_n)})| = (V_0^1 f_0)^n. \end{aligned}$$

Наконец, из последнего равенства и формулы (6) получаем требуемое равенство

$$\sum_{m_1=2}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=2}^{\infty} |a_{m_1, \dots, m_n}(g_0)| = \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{3} \right)^n \cdot V_{D_n} g_0.$$

Теорема доказана.

Автор выражает глубокую благодарность П. Л. Ульянову за ценные советы и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ульянов П. Л. О рядах по системе Хаара // Матем. сб. 1964. Т. 63 (105). № 1. С. 356–391.
- [2] Галкина С. Ю. О коэффициентах Фурье–Хаара от функций с ограниченной вариацией // Матем. заметки. 1992. Т. 51. № 1. С. 42–54.
- [3] Vitali G. Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reale // Atti. Accad. Sci. Torino. 1908. V. 43. P. 75–92.
- [4] Шварц Л. Анализ. Т. 1. М.: Мир, 1972.
- [5] Чистяков В. В. К теории многозначных отображений ограниченной вариации одной вещественной переменной // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 5. С. 153–176.