Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Джеффрис, Г. В. Джонсон, Операторное исчисление
Фейнмана для семейств некоммутирующих операторов:
тензорные произведения, упорядоченные носители и выпу-
тывание экспоненциального множителя, *Матем. заметки*,
2001, том 70, выпуск 6, 815–838

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm795>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-
зумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 13:52:30

УДК 517.983

ОПЕРАТОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФЕЙНМАНА ДЛЯ СЕМЕЙСТВ НЕКОММУТИРУЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ: ТЕНЗОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ, УПОРЯДОЧЕННЫЕ НОСИТЕЛИ И ВЫПУТЫВАНИЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО МНОЖИТЕЛЯ

Б. Джеффрис, Г. В. Джонсон

В недавно появившейся работе авторы изложили основные идеи, используемые в их подходе к фейнмановскому операторному исчислению систем некоммутирующих линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве. Центральным объектом этой теории является выпутывающая алгебра (коммутативная банахова алгебра) и выпутывающее отображение коммутативной структуры в алгебру некоммутирующих операторов. Цель настоящей статьи состоит в изучении свойств выпутывающего отображения с акцентом на (i) формулу Фейнмана для выпутывания экспоненциального множителя и (ii) зависимость выпутывающего отображения от упорядоченных носителей мер, управляющих выпутыванием.

Библиография: 13 названий.

Введение. Для ряда разделов математики и приложений важно иметь возможность вычислять функции от операторов. При наличии единственного самосопряженного оператора или нескольких коммутирующих операторов спектральная теорема обеспечивает чрезвычайно богатые возможности для функционального исчисления. Однако, как только мы имеем два или более некоммутирующих оператора, функциональное исчисление становится значительно более сложным даже для самосопряженных операторов. Однозначность упорядочения операторов является одним из принципиальных обстоятельств, с которыми приходится иметь дело.

Операторное исчисление Фейнмана [1] возникло как следствие интереса к эволюционирующим квантовым системам и, в частности, нашло отражение в его знаменитой работе по квантовой электродинамике [2]. Операторное исчисление Фейнмана возникло также под влиянием его ранней работы по функциональному интегрированию [3]; в действительности он рассматривал операторное исчисление как некоторое обобщение функционального интегрирования.

Мы начнем с очень краткого изложения идей Фейнмана о конструкции функций от некоммутирующих операторов. Более подробное рассмотрение эвристических идей Фейнмана содержится в [4], значительно больше деталей читатель может найти в [5, гл. 14].

Индексы времени используются для того, чтобы установить порядок действия операций в произведениях. Операторы с меньшими индексами времени действуют раньше

операторов с большими индексами независимо от того, как они стоят в формулах. Функции от операторов, снабженных временным индексом, строятся так же, как и в случае коммутирующих операторов. Соотношения, полученные после такой процедуры, обычно оказываются неправильными, если их интерпретировать обычным образом. Наконец, операторные выражения могут быть приведены к естественному порядку, иначе говоря, “распутаны”. Последний шаг обычно оказывается трудным. Грубо говоря, этот шаг состоит в последовательности преобразований операторных выражений до тех пор, пока порядок операций в формулах не будет соответствовать временному упорядочению.

В силу своего особого интереса к эволюционирующим квантовым системам Фейнман интересовался экспонентами сумм некоммутирующих операторов. Во многих случаях один из операторов часто играет доминирующую роль, а остальные операторы рассматриваются как его возмущения. Поэтому важно иметь формулу выпутывания, учитывающую роль доминирующего оператора. Основной результат статьи Фейнмана [1] решает эту задачу. Фейнман называет это соотношение “формулой выпутывания экспериментального множителя”. Мы заменяем слово “экспериментальный” словом “экспоненциальный”, поскольку это лучше соответствует нашему математическому подходу. Основной результат этой статьи – математически строгая формулировка и доказательство формулы Фейнмана и некоторых аналогичных соотношений (см. п. 5).

Читатель мог заметить слово “исчисление” в названии статьи. Каждому оператору будет сопоставлена некоторая мера. Эти меры определяют некоторое специальное операторное исчисление, которое изменится, если изменить набор мер. В этой статье мы изучим случай, когда носители мер упорядочены (или частично упорядочены). Если носители упорядочены, то теория, развитие которой началось в [4], рассматривается нами в связи с элементарными аспектами работ Маслова [6] и Назайкинского, Стернина и Шаталова [7].

Дальнейшие результаты этой работы используют прямые суммы банаховых пространств, условие симметричности выпутывающего отображения, ряды, тензорные произведения и меры, отличные от вероятностных. Все эти результаты весьма элементарны, однако они представляют потенциальный интерес. Например, хотя вероятностные меры и являются естественными объектами, связанными с нашим функциональным исчислением, такой выбор не всегда является наилучшим. Меры на $[0, t]$, масса которых растет с увеличением t , являются естественными для эволюционных задач [8]. Далее, даже в том случае, когда используется вероятностная мера, иногда оказывается полезным сузить меру на подмножество, где она, конечно, может не быть вероятностной мерой.

Меры, сопоставляемые связанным с ними операторам, играют важную роль в нашей теории. Например, можно изучать и сравнивать между собой различные операторные исчисления в рамках единого подхода. Далее, теоремы устойчивости мер типа [9] могут быть использованы для ответа на естественные вопросы, а также для того, чтобы помочь понять конкретное операторное исчисление, рассматривая его как предел более простого операторного исчисления (см. например, [10]). Дополнительные комментарии о роли мер, а также ссылки на более ранние работы на эту тему можно найти во введении к статье [4].

Сравнивая эту статью и ближайшие предшествующие работы [4], [9]–[11] с работой Фейнмана [1], можно заметить, что мы расширяем и интерпретируем идеи Фейнмана, а

также придаем им математическую строгость. В действительности, сходное утверждение справедливо для большей части математически строгих работ на эту тему (ссылки см. в [4] и [5]).

Основные определения и факты из [4] будут кратко рассмотрены в п. 1. Более детальное изложение содержится в разделах 1 и 2 статьи [4].

1. Банаховы алгебры $\mathbb{A}$ и $\mathbb{D}$ и выпутывающие отображения. Мы начнем с обзора свойств двух коммутативных банаховых алгебр $\mathbb{A}$ и $\mathbb{D}$ и отметим тесную связь между ними.

Для заданного целого положительного n и положительных чисел $r_1, \dots, r_n$ обозначим через $\mathbb{A}(r_1, \dots, r_n)$, или кратко $\mathbb{A}$, пространство комплекснозначных функций $(z_1, \dots, z_n) \mapsto f(z_1, \dots, z_n)$ от n комплексных переменных, аналитических в точке $(0, \dots, 0)$ и таких, что их разложение в степенной ряд

$$f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} c_{m_1, \dots, m_n} z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n} \quad (1.1)$$

сходится абсолютно по крайней мере на замкнутом полидиске $|z_1| \leq r_1, \dots, |z_n| \leq r_n$. Такие функции являются аналитическими по крайней мере на открытом полидиске $|z_1| < r_1, \dots, |z_n| < r_n$. Заметим, что любая целая функция n комплексных переменных принадлежит пространству $\mathbb{A}(r_1, \dots, r_n)$ для всех положительных чисел $r_1, \dots, r_n$.

Для функций $f \in \mathbb{A}(r_1, \dots, r_n)$, заданных соотношением (1.1), мы положим

$$\|f\| = \|f\|_{\mathbb{A}(r_1, \dots, r_n)} = \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} |c_{m_1, \dots, m_n}| r_1^{m_1} \dots r_n^{m_n}. \quad (1.2)$$

Функция на $\mathbb{A}(r_1, \dots, r_n)$, определенная формулой (1.1), отображает $\mathbb{A}(r_1, \dots, r_n)$ в коммутативную банахову алгебру относительно поточечных операций.

Рассмотрим банахову алгебру $\mathbb{D}$. Пусть X – банахово пространство, и пусть $A_1, \dots, A_n$ – ненулевые операторы из пространства линейных ограниченных операторов $\mathcal{L}(X)$ над X . За исключением чисел $\|A_1\|, \dots, \|A_n\|$, которые будут использоваться как веса, мы игнорируем специфические свойства $A_1, \dots, A_n$ как операторов и вводим коммутативную банахову алгебру, состоящую из “аналитических функций” $f(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n)$, где $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n$ интерпретируются как произвольные коммутирующие объекты.

Рассмотрим множество $\mathbb{D} = \mathbb{D}(A_1, \dots, A_n)$ всех выражений вида

$$f(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) = \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} c_{m_1, \dots, m_n} \tilde{A}_1^{m_1} \dots \tilde{A}_n^{m_n}, \quad (1.3)$$

где $c_{m_1, \dots, m_n} \in \mathbb{C}$ для всех $m_1, \dots, m_n = 0, 1, \dots$ и

$$\begin{aligned} \|f(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n)\| &= \|f(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n)\|_{\mathbb{D}(A_1, \dots, A_n)} \\ &= \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} |c_{m_1, \dots, m_n}| \|A_1\|^{m_1} \dots \|A_n\|^{m_n} < \infty. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Для краткости и чтобы выделить тот факт, что $\mathcal{T}_{\mu_1, \dots, \mu_n} f(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n)$ следует понимать как функцию от необязательно коммутирующих операторов $A_1, \dots, A_n$, мы часто используем альтернативное обозначение, приводимое в следующих двух равенствах:

$$f_{\mu_1, \dots, \mu_n}(A_1, \dots, A_n) := \mathcal{T}_{\mu_1, \dots, \mu_n} f(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n), \quad (1.18)$$

$$P_{\mu_1, \dots, \mu_n}^{m_1, \dots, m_n}(A_1, \dots, A_n) := \mathcal{T}_{\mu_1, \dots, \mu_n} P^{m_1, \dots, m_n}(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n). \quad (1.19)$$

Формулы (1.13) и (1.15) во многих случаях являются полезными, но они имеют одно неприятное свойство. Мы ограничимся замечаниями по поводу (1.13), но они также имеют силу и по отношению к (1.15). В формуле (1.13) члены повторяются многократно. Это обстоятельство желательно устранить не только по чисто математическим причинам, но также целесообразно с точки зрения приложений.

Сначала мы объясним, откуда появляется альтернативная версия формулы (1.13), и тогда сформулируем результат. Пусть дано $\pi \in S_m$. Поскольку A_1 повторяется m_1 раз, A_2 — m_2 раз, ..., и A_n — m_n раз, то полное число перестановок, приводящее к тому же выражению, равно $m_1! m_2! \cdots m_n!$. Проверив формулу (1.12), мы видим, что эти перестановки состоят из перестановок, переставляющих индексы $s_1, \dots, s_{m_1}$ между собой, переставляющих индексы $s_{m_1+1}, \dots, s_{m_1+m_2}$ между собой, ..., и, наконец, переставляющих индексы $s_{m_1+\dots+m_{n-1}+1}, \dots, s_m$ между собой. Мы можем сократить нашу формулу, выбирая лишь одну из перестановок, умноженную на $m_1! m_2! \cdots m_n!$, поскольку для каждого $j = 1, \dots, n$ мера $\mu_j^{m_j}$ левоинвариантна относительно перестановок переменных $s_{m_1+\dots+m_{j-1}+1}, \dots, s_{m_1+\dots+m_{j-1}+m_j}$. Удобно выбрать перестановку, для которой

$$s_1 < \cdots < s_{m_1}, \quad s_{m_1+1} < \cdots < s_{m_1+m_2}, \quad \dots, \quad s_{m_1+\dots+m_{n-1}+1} < \cdots < s_m.$$

Таким образом, мы получаем

$$\begin{aligned} & \mathcal{T}_{\mu_1, \dots, \mu_n} P^{m_1, \dots, m_n}(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) \\ &= m_1! \cdots m_n! \sum_{\pi \in \mathcal{P}_{m_1, \dots, m_n}} \int_{(\Delta_{m_1} \times \cdots \times \Delta_{m_n})(\pi)} C_{\pi(m)}(s_{\pi(m)}) \times \cdots \times C_{\pi(1)}(s_{\pi(1)}) \\ & \quad \times (\mu_1^{m_1} \times \cdots \times \mu_n^{m_n})(ds_1, \dots, ds_m), \end{aligned} \quad (1.20)$$

где

$$\Delta_{m_1} = \{(s_1, \dots, s_{m_1}) \in [0, 1]^{m_1} : 0 < s_1 < \cdots < s_{m_1} < 1\},$$

.....

$$\Delta_{m_n} = \{(s_{m_1+\dots+m_{n-1}+1}, \dots, s_m) \in [0, 1]^{m_n} : 0 < s_{m_1+\dots+m_{n-1}+1} < \cdots < s_m < 1\} \quad (1.21)$$

и

$$(\Delta_{m_1} \times \cdots \times \Delta_{m_n})(\pi) = \{(s_1, \dots, s_m) \in \Delta_{m_1} \times \cdots \times \Delta_{m_n} : 0 < s_{\pi(1)} < \cdots < s_{\pi(m)} < 1\}, \quad (1.22)$$

а $\mathcal{P}_{m_1, \dots, m_n}$ — множество перестановок $\pi \in S_m$, которые оставляют инвариантным относительный порядок точек $s_1, \dots, s_{m_1}$, а также оставляют инвариантным относительный порядок точек $s_{m_1+1}, \dots, s_{m_1+m_2}$ и, наконец, оставляют инвариантным относительный порядок точек $s_{m_1+\dots+m_{n-1}+1}, \dots, s_m$. Мощность множества $\mathcal{P}_{m_1, \dots, m_n}$ вычисляется следующим образом:

$$\text{Card}(\mathcal{P}_{m_1, \dots, m_n}) = \frac{(m_1 + \cdots + m_n)!}{m_1! \cdots m_n!} = \frac{m!}{m_1! \cdots m_n!}. \quad (1.23)$$

Теперь мы сформулируем предложение, которое выше мы уже доказали.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. *Оператор*

$$P_{\mu_1, \dots, \mu_n}^{m_1, \dots, m_n}(A_1, \dots, A_n) = \mathcal{I}_{\mu_1, \dots, \mu_n} P^{m_1, \dots, m_n}(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n),$$

заданный формулой (1.13), имеет представление (1.20); обозначения объясняются в (1.21), (1.22) и в приведенном выше описании множества перестановок $\mathcal{P}_{m_1, \dots, m_n}$.

2. Прямые суммы, симметрии, ряды и тензорные произведения. Начнем с рассмотрения случая, когда банахово пространство X является прямой суммой банаховых пространств Y и Z и каждый оператор A_j является соответствующей прямой суммой операторов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Предположим, что $X = Y \oplus Z$ и существуют операторы $B_j \in \mathcal{L}(Y)$ и $C_j \in \mathcal{L}(Z)$ такие, что $A_j = B_j \oplus C_j$ для каждого $j = 1, \dots, n$. Тогда*

$$P_{\mu_1, \dots, \mu_n}^{m_1, \dots, m_n}(A_1, \dots, A_n) = P_{\mu_1, \dots, \mu_n}^{m_1, \dots, m_n}(B_1, \dots, B_n) \oplus P_{\mu_1, \dots, \mu_n}^{m_1, \dots, m_n}(C_1, \dots, C_n). \quad (2.1)$$

Аналогично, если функция $f \in \mathbb{A}(\|A_1\|, \|A_2\|, \dots, \|A_n\|)$ задана формулой (1.1), то f принадлежит $\mathbb{A}(\|B_1\|, \dots, \|B_n\|) \cap \mathbb{A}(\|C_1\|, \dots, \|C_n\|)$ и

$$f_{\mu_1, \dots, \mu_n}(A_1, \dots, A_n) = f_{\mu_1, \dots, \mu_n}(B_1, \dots, B_n) \oplus f_{\mu_1, \dots, \mu_n}(C_1, \dots, C_n). \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Q – проектор, коммутирующий с каждым из операторов $A_1, \dots, A_n$. Проекциями, важными здесь для нас, являются проекции из X на Y и Z соответственно. Из определения 1.2 и того факта, что $Q^n = Q$, получаем

$$P_{\mu_1, \dots, \mu_n}^{m_1, \dots, m_n}(A_1 Q, \dots, A_n Q) = P_{\mu_1, \dots, \mu_n, \mu_n}^{m_1, \dots, m_n, 1}(A_1, \dots, A_n, Q^n).$$

Но предложение 3.3 из [4] утверждает, что поскольку Q коммутирует со всеми операторами $A_1, \dots, A_n$, Q может быть исключено из выпуктывающей формулы; в частности,

$$P_{\mu_1, \dots, \mu_n, \mu_n}^{m_1, \dots, m_n, 1}(A_1, \dots, A_n, Q) = Q P_{\mu_1, \dots, \mu_n}^{m_1, \dots, m_n}(A_1, \dots, A_n).$$

Комбинируя последнее равенство с двумя предыдущими, мы получаем

$$P_{\mu_1, \dots, \mu_n}^{m_1, \dots, m_n}(A_1 Q, \dots, A_n Q) = Q P_{\mu_1, \dots, \mu_n}^{m_1, \dots, m_n}(A_1, \dots, A_n),$$

откуда немедленно следует утверждение настоящего предложения.

Теперь мы рассмотрим условия, при которых выражение $f_{\mu_1, \dots, \mu_n}(A_1, \dots, A_n)$ обладает свойствами симметрии.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Пусть $f \in \mathbb{A}(\|A_1\|, \dots, \|A_n\|)$, где $f(z_1, \dots, z_n)$ задана рядом (1.1), и предположим, что существует подпоследовательность $i_1, \dots, i_\ell$ из $1, \dots, n$ такая, что функция f симметрична по переменным $z_{i_1}, \dots, z_{i_\ell}$. Тогда функция f принадлежит $\mathbb{A}(r_1, \dots, r_n)$, где $r_i = \|A_i\|$, если $i \notin \{i_1, \dots, i_\ell\}$, и $r_i = \max\{\|A_{i_1}\|, \dots, \|A_{i_\ell}\|\}$, если $i \in \{i_1, \dots, i_\ell\}$. Далее, любая перестановка операторов $A_{i_1}, \dots, A_{i_\ell}$, сопровождаемая аналогичной перестановкой мер $\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_\ell}$, оставляет неизменным выражение $f_{\mu_1, \dots, \mu_n}(A_1, \dots, A_n)$. Наконец, если $\mu_{i_1} = \dots = \mu_{i_\ell}$, то функция $f_{\mu_1, \dots, \mu_n}(A_1, \dots, A_n)$ операторов $A_1, \dots, A_n$ является симметричной функцией $A_{i_1}, \dots, A_{i_\ell}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем доказательство для $n = 2$, поскольку оно проще в смысле обозначений, и в настоящем случае это проясняет схему доказательства общего результата.

Прежде всего, без дополнительных предположений равенство

$$P_{\mu_1, \mu_2}^{m_1, m_2}(A_1, A_2) = P_{\mu_2, \mu_1}^{m_2, m_1}(A_2, A_1) \quad (2.3)$$

следует из определения 1.2 (как было замечено в [4, предложение 2.11]).

Далее мы заметим, что из условия симметричности $f(z_2, z_1) = f(z_1, z_2)$ следует, что $c_{m_2, m_1} = c_{m_1, m_2}$ для всех (m_1, m_2) . Используя также (2.3), мы получаем

$$\begin{aligned} f_{\mu_1, \mu_2}(A_1, A_2) &= \sum_{m_1, m_2=0}^{\infty} c_{m_1, m_2} P_{\mu_1, \mu_2}^{m_1, m_2}(A_1, A_2) = \sum_{m_1, m_2=0}^{\infty} c_{m_1, m_2} P_{\mu_2, \mu_1}^{m_2, m_1}(A_2, A_1) \\ &= \sum_{m_1, m_2=0}^{\infty} c_{m_2, m_1} P_{\mu_2, \mu_1}^{m_2, m_1}(A_2, A_1) = f_{\mu_2, \mu_1}(A_2, A_1). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Окончательное утверждение нашего предложения, именно, что

$$f_{\mu_1, \mu_1}(A_1, A_2) = f_{\mu_1, \mu_1}(A_2, A_1), \quad (2.5)$$

немедленно следует из (2.4).

Следующее предложение касается сходимости рядов в $\mathbb{D}(A_1, \dots, A_n)$; оно имеет длинную формулировку и простое доказательство.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Предположим, что $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n)$ является сходящимся рядом в выпуктывающей алгебре $\mathbb{D}(A_1, \dots, A_n)$, где для каждого j выполнено равенство*

$$f_j(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) = \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} c_{m_1, \dots, m_n}^{(j)} \tilde{A}_1^{m_1} \dots \tilde{A}_n^{m_n}. \quad (2.6)$$

Тогда, обозначая через

$$f(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) \quad (2.7)$$

сумму ряда с функцией f , заданной формулой (1.1), мы получим

$$c_{m_1, \dots, m_n} = \sum_{j=1}^{\infty} c_{m_1, \dots, m_n}^{(j)}, \quad (2.8)$$

$$\|f(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n)\| = \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} c_{m_1, \dots, m_n}^{(j)} \right| \|A_1\|^{m_1} \dots \|A_n\|^{m_n}. \quad (2.9)$$

Далее, если

$$\sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |c_{m_1, \dots, m_n}^{(j)}| \right) \|A_1\|^{m_1} \dots \|A_n\|^{m_n} < \infty, \quad (2.10)$$

то ряд в формуле (2.6) является абсолютно сходящимся в $\mathbb{D}(A_1, \dots, A_n)$ и

$$\begin{aligned} \|f(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n)\| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n)\| \\ &= \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |c_{m_1, \dots, m_n}^{(j)}| \right) \|A_1\|^{m_1} \dots \|A_n\|^{m_n}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сходящийся ряд во взвешенном ℓ_1 -пространстве сходится по каждой координате отдельно. Поскольку пространство $\mathbb{D}(A_1, \dots, A_n)$ можно отождествить со взвешенным ℓ_1 -пространством, то соотношение (2.8) справедливо. Равенство (2.9) немедленно следует из (2.8) и определения нормы в $\mathbb{D}(A_1, \dots, A_n)$. Определение нормы также обеспечивает выполнение равенства в (2.11), и тогда абсолютная сходимость ряда в формуле (2.7) следует из предположения (2.10); отсюда же следует неравенство в (2.11).

Аналитические функции n переменных, являющиеся тензорными произведениями n аналитических функций одной переменной, естественным образом включаются в некоторые аспекты нашей теории. Мы увидим это в этом пункте и далее в п. 4 и п. 5. **Функции**

$$\exp(z_1 + \dots + z_n) = \exp(z_1) \dots \exp(z_n) \quad (2.12)$$

будет особенно важна в связи с рядами теории возмущений (5.7) в п. 5. Ее связь с широким классом эволюционных уравнений рассматривается в [8].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть заданы ненулевые операторы $A_1, \dots, A_n$ из $\mathcal{L}(X)$. Предположим, что $g_i \in \mathbb{A}(\|A_i\|)$ для $i = 1, \dots, n$, где

$$g_i(z_i) = \sum_{m_i=0}^{\infty} c_{m_i}^{(i)} z_i^{m_i}. \quad (2.13)$$

Тогда $g_1 \otimes \dots \otimes g_n \in \mathbb{A}(\|A_1\|, \dots, \|A_n\|)$ с

$$(g_1 \otimes \dots \otimes g_n)(z_1, \dots, z_n) := g_1(z_1) \dots g_n(z_n) = \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} c_{m_1}^{(1)} \dots c_{m_n}^{(n)} z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}. \quad (2.14)$$

В этом случае

$$(g_1 \otimes \dots \otimes g_n)(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) = g_1(\tilde{A}_1) \dots g_n(\tilde{A}_n) = \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} c_{m_1}^{(1)} \dots c_{m_n}^{(n)} \tilde{A}_1^{m_1} \dots \tilde{A}_n^{m_n}. \quad (2.15)$$

Наконец,

$$\|(g_1 \otimes \dots \otimes g_n)(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n)\| = \|g_1(\tilde{A}_1)\| \dots \|g_n(\tilde{A}_n)\|. \quad (2.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $g_i \in \mathbb{A}(\|A_i\|)$ для $i = 1, \dots, n$, нетрудно видеть, что ряд сходится абсолютно для всех $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ с $|z_i| \leq \|A_i\|$ для $i = 1, \dots, n$, так что $g_1 \otimes \dots \otimes g_n$ принадлежит $\mathbb{A}(\|A_1\|, \dots, \|A_n\|)$.

Второе равенство в (2.14) получается перемножением рядов для $g_1(z_1), \dots, g_n(z_n)$. Равенства (2.15) немедленно следуют из (2.14).

Наконец, (2.16) получается, если заметить, что

$$\begin{aligned} \|(g_1 \otimes \dots \otimes g_n)(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n)\| &= \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} |c_{m_1}^{(1)}| \dots |c_{m_n}^{(n)}| \|A_1\|^{m_1} \dots \|A_n\|^{m_n} \\ &= \left(\sum_{m_1=0}^{\infty} |c_{m_1}^{(1)}| \|A_1\|^{m_1} \right) \dots \left(\sum_{m_n=0}^{\infty} |c_{m_n}^{(n)}| \|A_n\|^{m_n} \right) \\ &= \|g_1(\tilde{A}_1)\| \dots \|g_n(\tilde{A}_n)\|. \end{aligned}$$

3. Меры, отличные от вероятностных мер. Пусть $\mu_1, \dots, \mu_n$ — конечные, непрерывные ненулевые меры на $\mathcal{B}[0, 1]$. Как нам следует определить оператор

$$\mathcal{T}_{\mu_1, \dots, \mu_n} f(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n)?$$

Ответ: почти так же, как в определении 1.2. Это может показаться неверным, поскольку формула (1.10) предложения 1.1 вместе с эвристическими идеями Фейнмана приводит к определению 1.2, и, хотя обе части равенства (1.10) продолжают иметь смысл, равенство может быть нарушено. Простой пример показывает это и указывает нам правильное направление. Пусть $n = 1$. Тогда

$$P^1(\tilde{A}_1) = \tilde{A}_1 \quad (3.1)$$

так же, как и раньше, в то время как

$$\int_0^1 \tilde{A}_1(s) \mu_1(ds) = \tilde{A}_1 \mu_1([0, 1]). \quad (3.2)$$

Выражения в (3.1) и (3.2) совпадают, если и только если μ_1 — вероятностная мера.

Только что приведенный пример указывает, что мы должны положить

$$P_{\mu_1}^1(A_1) = A_1 \mu_1([0, 1]). \quad (3.3)$$

Но функциональное исчисление, в котором $P_{\mu_1}^1(A_1) \neq A_1$, кажется странным. Однако можно заметить, что это естественно в случае эволюционных задач. Например, пусть $A \in \mathcal{L}(X)$. Тогда

$$y(t) = e^{tA} = e^{\int_0^t A(s) \ell(ds)} \quad (3.4)$$

является решением эволюционного уравнения $dy/dt = Ay$ с $y(0) = I$; масса лебеговой меры ℓ на $[0, t]$ должна правильно учитываться. Дальнейшие примеры рассматриваются в [8].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть $A_1, \dots, A_n$ – операторы из $\mathcal{L}(X)$, и пусть $\mu_1, \dots, \mu_n$ – конечные и непрерывные меры на $\mathcal{B}[0, 1]$. Используя обозначения из определения 1.2 для любых целых неотрицательных $m_1, \dots, m_n$, мы определим

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mu_1, \dots, \mu_n} P^{m_1, \dots, m_n}(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) &= P_{\mu_1, \dots, \mu_n}^{m_1, \dots, m_n}(A_1, \dots, A_n) \\ &:= \sum_{\pi \in S_m} \int_{\Delta_m(\pi)} C_{\pi(m)}(s_{\pi(m)}) \cdots C_{\pi(1)}(s_{\pi(1)}) (\mu_1^{m_1} \times \cdots \times \mu_n^{m_n})(ds_1, \dots, ds_m). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Теперь мы сделаем предположение, что все $A_1, \dots, A_n$ и $\mu_1, \dots, \mu_n$ ненулевые. Как мы увидим ниже, это ограничение может быть снято.

Пусть $\|\mu_i\| = \mu_i([0, 1])$ для $i = 1, \dots, n$. Тогда для $f(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) \in \mathbb{D}(\|\mu_1\|A_1, \dots, \|\mu_n\|A_n)$, заданных формулами

$$f(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) = \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} c_{m_1, \dots, m_n} \tilde{A}_1^{m_1} \cdots \tilde{A}_n^{m_n}, \quad (3.6)$$

мы полагаем

$$\mathcal{T}_{\mu_1, \dots, \mu_n} f(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) := \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} c_{m_1, \dots, m_n} \mathcal{T}_{\mu_1, \dots, \mu_n} P^{m_1, \dots, m_n}(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n). \quad (3.7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Из представления (3.5) мы видим, что если существует индекс $i \in \{1, \dots, n\}$ такой, что либо $A_i = 0$, либо $\mu_i = 0$, то $\mathcal{T}_{\mu_1, \dots, \mu_n} P^{m_1, \dots, m_n}(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) = 0$ всякий раз, когда $m_i > 0$.

Теперь рассмотрим f . Мы напоминаем читателю, что $f(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) \in \mathbb{D}(\|\mu_1\|A_1, \dots, \|\mu_n\|A_n)$ эквивалентно $f \in \mathbb{A}(\|A_1\| \|\mu_1\|, \dots, \|A_n\| \|\mu_n\|)$. Теперь мы предположим, что либо $A_1 = 0$, либо $\mu_1 = 0$, но все $A_2, \dots, A_n$ и $\mu_2, \dots, \mu_n$ ненулевые. Для удобства обозначений мы полагаем $i = 1$. Тогда условие на f в определении 3.1 может быть сведено к предположению, что $f(0, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{A}(\|A_2\| \|\mu_2\|, \dots, \|A_n\| \|\mu_n\|)$. Заметим, что все члены ряда (3.7), для которых $m_1 > 0$, равны нулю. Аналогичное наблюдение может быть сделано в более общей ситуации.

До этого пункта мы интересовались вероятностными мерами и дополнительно предполагали, что $A_1, \dots, A_n$ являются ненулевыми операторами. Теперь из замечания 3.2 мы видим, что последнее предположение может быть опущено.

Выше мы заметили, что условие (1.10) предложения 1.1 не выполнено, если не выполнено требование, чтобы $\mu_1, \dots, \mu_n$ были вероятностными мерами. Теперь мы сформулируем измененную версию предложения 1.1, которая немедленно следует из приведенного выше результата.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть $A_1, \dots, A_n$ принадлежат $\mathcal{L}(X)$. Если $\mu_1, \dots, \mu_n$ – конечные непрерывные меры на $\mathcal{B}[0, 1]$, то

$$\begin{aligned} &\|\mu_1\|^{m_1} \cdots \|\mu_n\|^{m_n} P^{m_1, \dots, m_n}(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) \\ &= \sum_{\pi \in S_m} \int_{\Delta_m(\pi)} \tilde{C}_{\pi(m)}(s_{\pi(m)}) \cdots \tilde{C}_{\pi(1)}(s_{\pi(1)}) (\mu_1^{m_1} \times \cdots \times \mu_n^{m_n})(ds_1, \dots, ds_m). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Следующие два предложения являются простыми, но полезными. Они описывают способ, позволяющий распространить результаты для вероятностных мер на случай финитных мер.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Пусть $A_1, \dots, A_n$ принадлежат $\mathcal{L}(X)$, и предположим, что $\mu_1, \dots, \mu_n$ – финитные, непрерывные меры на $\mathcal{B}[0, 1]$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mu_1, \dots, \mu_n} P^{m_1, \dots, m_n}(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) \\ = \|\mu_1\|^{m_1} \dots \|\mu_n\|^{m_n} \mathcal{T}_{\mu_1/\|\mu_1\|, \dots, \mu_n/\|\mu_n\|} P^{m_1, \dots, m_n}(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n), \end{aligned} \quad (3.9)$$

где правая часть (3.9) интерпретируется как нулевой оператор, если одна из мер μ_i нулевая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО немедленно следует из формулы (3.5) определения 3.1.

В определении 3.1 и замечании 3.2 мы ввели веса для пространств аналитических функций, отражающие полный вес мер. Далее мы действуем в том же направлении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Пусть $A_1, \dots, A_n$ принадлежат $\mathcal{L}(X)$, и предположим, что $\mu_1, \dots, \mu_n$ – конечные непрерывные меры на $\mathcal{B}[0, 1]$. Тогда для функций

$$f(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) \in \mathbb{D}(\|\mu_1\|A_1, \dots, \|\mu_n\|A_n),$$

заданных формулой (3.6), мы имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mu_1, \dots, \mu_n} f(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) &= f_{\mu_1, \dots, \mu_n}(A_1, \dots, A_n) \\ &= \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} c_{m_1, \dots, m_n} \|\mu_1\|^{m_1} \dots \|\mu_n\|^{m_n} \\ &\quad \times \mathcal{T}_{\mu_1/\|\mu_1\|, \dots, \mu_n/\|\mu_n\|} P^{m_1, \dots, m_n}(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n). \end{aligned} \quad (3.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Этот результат следует из определения 3.1 и предложения 3.4 в случае, когда все $A_1, \dots, A_n$ и $\mu_1, \dots, \mu_n$ ненулевые; в противном случае справедливо следующее замечание.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. Предложение 3.4 с правильно интерпретируемой правой частью в (3.9) остается в силе, если либо $A_i = 0$, либо $\mu_i = 0$ для одного или более $i \in \{1, \dots, n\}$. Действительно, согласно замечанию 3.2 ограничения на f могут быть ослаблены в этом случае.

Почти все без исключения наши результаты для вероятностных мер могут быть обобщены на случай конечных мер. Когда речь идет об аналитических функциях, требуется обосновать введение веса. Доказательство формул для выпутывания является тривиальным следствием предложения 3.4. Теперь мы рассмотрим комментарии, иллюстрирующие необходимые изменения. Подробности можно найти в [11].

(i) Веса должны быть изменены в трех частях предложения 1.4. В частности, норма правой части формулы (1.17) должна учитывать это изменение.

(ii) Формула выпутывания (1.20) остается без изменений, как и (1.13).

(iii) В предложении 2.2 веса изменяются стандартным образом, далее мы полагаем $r_i = \|A_i\| \|\mu_i\|$, если $i \notin \{i_1, \dots, i_\ell\}$, и $r_i = \max\{\|A_{i_1}\| \|\mu_{i_1}\|, \dots, \|A_{i_\ell}\| \|\mu_{i_\ell}\|\}$, если $i \in \{i_1, \dots, i_\ell\}$.

(iv) Предложения 2.3 и 2.4 не содержат выпутывания, но они используются в сочетании с конечными мерами, не являющимися вероятностными, и поэтому требуют обоснования. Например, ряды в (2.6) должны быть сходящимися в $\mathbb{D}(\|\mu_1\|A_1, \dots, \|\mu_n\|A_n)$. Такие изменения будут действительными и для (2.9)–(2.11). Аналогичные комментарии имеют силу для предложения 2.4.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.7. (i) Используемые нами меры были определены на $\mathcal{B}[0, 1]$, однако отрезок $[0, 1]$ можно заменить на $[a, b]$.

(ii) В связи с эволюционными задачами разумным подходом является рассмотрение задач на достаточно большом фиксированном отрезке $[0, T]$ длины $T > 0$. Тогда большая часть утверждений относится к отрезку $[0, t]$, где $t \in (0, T]$, а оценки часто содержат $\mu_i([0, t])$, $i = 1, \dots, n$.

(iii) Эволюционные задачи на $[0, \infty)$ рассматриваются в [8]. Основные оценки используют меры на $\mathcal{B}[0, \infty)$, которые конечны на $[0, t]$ для любого $t > 0$.

Наш последний комментарий состоит в следующем. Интерес к случаю нулевых мер не является чисто алгебраическим. Существуют эволюционные задачи, в которых возмущения включаются и выключаются на некоторых отрезках времени. В этом случае полезно сузить меры на подходящие отрезки, при этом на некоторых множествах меры обращаются в нуль.

4. Влияние упорядочения носителей на формулы выпутывания. Большая часть результатов настоящего пункта легко следует из формулируемой ниже теоремы 4.1. Обозначим через $S(\mu)$ носитель меры μ , т.е. дополнение множества всех точек x , имеющих открытую окрестность $U \in \mathcal{B}[0, 1]$ такую, что $\mu(U) = 0$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $A_1, \dots, A_n$ принадлежат $\mathcal{L}(X)$. Предположим, что $\mu_1, \dots, \mu_n$ – финитные непрерывные меры на $\mathcal{B}[0, 1]$. Если существует $\xi \in (0, 1)$ такое, что $S(\mu_1) \subseteq [0, \xi]$ и $S(\mu_i) \subseteq [\xi, 1]$ для $i = 2, \dots, n$, то

$$P_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n}^{m_1, m_2, \dots, m_n}(A_1, A_2, \dots, A_n) = P_{\mu_2, \dots, \mu_n}^{m_2, \dots, m_n}(A_2, \dots, A_n)(\mu_1(0, 1)A_1)^{m_1}. \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предположения о носителе имеем

$$S[\mu_1^{m_1} \times (\mu_2^{m_2} \times \dots \times \mu_n^{m_n})] \subseteq [0, \xi]^{m_1} \times [\xi, 1]^{m_2 + \dots + m_n}. \quad (4.2)$$

Поэтому для любой перестановки $\pi \in S_m$, для которой $s_{m_1+1}, \dots, s_m$ предшествуют $s_1, \dots, s_{m_1}$ в списке $s_{\pi(1)}, \dots, s_{\pi(m)}$, мы имеем

$$[\mu_1^{m_1} \times (\mu_2^{m_2} \times \dots \times \mu_n^{m_n})](\Delta_m(\pi)) = 0. \quad (4.3)$$

Такие перестановки можно исключить из суммы (3.5), определяющей левую часть формулы (4.1). В интегральное выражение, отвечающее дополнению S'_m множества перестановок всех индексов $s_1, \dots, s_{m_1}$, прежде всего входят $s_{m_1+i}, \dots, s_m$ в списке $s_{\pi(1)}, \dots, s_{\pi(m)}$. Поэтому во всех интегральных выражениях оператор $A_1^{m_1}$ появляется крайним справа.

Существует всего $m_1!(m_2 + \dots + m_n)!$ перестановок из S'_m , которые можно получить, взяв любые из $m_1!$ перестановок $\rho \in S_{m_1}$ и любые из $(m_2 + \dots + m_n)!$ перестановок τ' множества $m_2 + \dots + m_n$ целых чисел $m_1 + 1, \dots, m_1 + m_2 + \dots + m_n$. Мы обозначаем это множество перестановок через $S_{m_1+1, m}$. Поэтому для каждого фиксированного $\tau \in S_{m_1+1, m}$ каждая из $m_1!$ перестановок множества $1, \dots, m_1$ будет давать подынтегральное выражение

$$C_{\tau'(m)}(S_{\tau'(m)}) \cdots C_{\tau'(m_1+1)}(s_{\tau'(m_1+1)})A_1^{m_1}. \quad (4.4)$$

Забегая вперед, мы также заметим, что для каждого $\rho \in S_{m_1}$

$$\mu_1^{m_1}(\Delta_{m_1}(\rho)) = \frac{\|\mu_1\|^{m_1}}{m_1!}. \quad (4.5)$$

Теперь мы можем написать

$$\begin{aligned} & P_{\mu_1, \dots, \mu_n}^{m_1, \dots, m_n}(A_1, \dots, A_n) \\ &= \sum_{\pi \in S'_m} \int_{\Delta_m(\pi)} C_{\pi(m)}(s_{\pi(m)}) \cdots C_{\pi(m_1+1)}(s_{\pi(m_1+1)}) A_1^{m_1} \\ & \quad \times (\mu_1^{m_1} \times \cdots \times \mu_n^{m_n})(ds_1, \dots, ds_m) \\ &= \sum_{\substack{\tau' \in S_{m_1+1, m} \\ \rho \in S_{m_1}}} \int_{\Delta_{m_1}(\rho) \times \Delta_{m_1+1, m}(\tau')} C_{\tau'(m)}(s_{\tau'(m)}) \cdots C_{\tau'(m_1+1)}(s_{\tau'(m_1+1)}) A_1^{m_1} \\ & \quad \times (\mu_1^{m_1} \times (\mu_2^{m_2} \times \cdots \times \mu_n^{m_n}))(ds_1, \dots, ds_m), \end{aligned} \quad (4.6)$$

где

$$\Delta_{m_1+1, m}(\tau') := \{(s_{m_1+1}, \dots, s_m) : 0 < s_{\tau'(m_1+1)} < \cdots < s_{\tau'(m)} < 1\}. \quad (4.7)$$

Продолжая формулу (4.6), можно получить

$$\begin{aligned} & P_{\mu_1, \dots, \mu_n}^{m_1, \dots, m_n}(A_1, \dots, A_n) \\ &= \sum_{\tau' \in S_{m_1+1, m}} \sum_{\rho \in S_{m_1}} \int_{\Delta_{m_1}(\rho) \times \Delta_{m_1+1, m}(\tau')} C_{\tau'(m)}(s_{\tau'(m)}) \cdots C_{\tau'(m_1+1)}(s_{\tau'(m_1+1)}) A_1^{m_1} \\ & \quad \times (\mu_1^{m_1} \times (\mu_2^{m_2} \times \cdots \times \mu_n^{m_n}))(ds_1, \dots, ds_m) \\ &= \sum_{\tau' \in S_{m_1+1, m}} \left\{ \sum_{\rho \in S_{m_1}} \left[\int_{\Delta_{m_1+1, m}(\tau')} C_{\tau'(m)}(s_{\tau'(m)}) \cdots C_{\tau'(m_1+1)}(s_{\tau'(m_1+1)}) \right. \right. \\ & \quad \times (\mu_2^{m_2} \times \cdots \times \mu_n^{m_n})(ds_{m_1+1}, \dots, ds_m) \Big] \mu_1^{m_1}(\Delta_{m_1}(\rho)) \Big\} A_1^{m_1} \\ &= \left\{ \sum_{\tau' \in S_{m_1+1, m}} \int_{\Delta_{m_1+1, m}(\tau')} C_{\tau'(m)}(s_{\tau'(m)}) \cdots C_{\tau'(m_1+1)}(s_{\tau'(m_1+1)}) \right. \\ & \quad \times (\mu_2^{m_2} \times \cdots \times \mu_n^{m_n})(ds_{m_1+1}, \dots, ds_m) \Big\} \left\{ \sum_{\rho \in S_{m_1}} \frac{\|\mu_1\|^{m_1}}{m_1!} \right\} A_1^{m_1} \\ &= \left\{ \sum_{\tau \in S_{m_2+\dots+m_n}} \int_{\Delta_{m_2+\dots+m_n}} C_{\tau(m_2+\dots+m_n)}(s_{\tau(m_2+\dots+m_n)}) \cdots C_{\tau(1)}(s_{\tau(1)}) \right. \\ & \quad \times (\mu_2^{m_2} \times \cdots \times \mu_n^{m_n})(ds_1, \dots, ds_{m_2+\dots+m_n}) \Big\} (\|\mu_1\| A_1)^{m_1}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где $\tau(j) = \tau'(m_1 + j)$ для $j = 1, \dots, m_2 + \dots + m_n$. Теперь равенство (4.1) следует из (4.8).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. (i) Тот факт, что носитель меры μ_1 в теореме 4.1 был слева от носителей всех остальных мер, исключительно удобен, но не принципиален для доказательства. Если носитель μ_j находится слева от носителей остальных мер, то

$$\begin{aligned} P_{\mu_1, \dots, \mu_n}^{m_1, \dots, m_n}(A_1, \dots, A_n) \\ = P_{\mu_1, \dots, \mu_{j-1}, \mu_{j+1}, \dots, \mu_n}^{m_1, \dots, m_{j-1}, m_{j+1}, \dots, m_n}(A_1, \dots, A_{j-1}, A_{j+1}, \dots, A_n) (\|\mu_j\| A_j)^{m_j}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

(ii) Если мера μ_j в части (i) этого замечания имеет носитель справа от носителей остальных мер, то вместо (4.9) имеем

$$\begin{aligned} P_{\mu_1, \dots, \mu_n}^{m_1, \dots, m_n}(A_1, \dots, A_n) \\ = (\|\mu_j\| A_j)^{m_j} P_{\mu_1, \dots, \mu_{j-1}, \mu_{j+1}, \dots, \mu_n}^{m_1, \dots, m_{j-1}, m_{j+1}, \dots, m_n}(A_1, \dots, A_{j-1}, A_{j+1}, \dots, A_n). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Используя теорему 4.1, замечание 4.2 и метод индукции, мы легко получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Пусть $A_1, \dots, A_n$ принадлежат алгебре $\mathcal{L}(X)$, и предположим, что $\mu_1, \dots, \mu_n$ — конечные непрерывные меры на $\mathcal{B}[0, 1]$. Пусть $\{i_1, \dots, i_k\}$ является подмножеством множества $\{1, \dots, n\}$, и предположим, что носители соответствующих мер упорядочены правильно:

$$S(\mu_{i_1}) \leq S(\mu_{i_2}) \leq \dots \leq S(\mu_{i_k}). \quad (4.11)$$

В обозначениях

$$\{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\} = \{j_1, \dots, j_{n-k}\}, \quad j_1 < \dots < j_{n-k}, \quad (4.12)$$

мы предполагаем, что

$$S(\mu_{i_k}) \leq S(\mu_{j_\ell}), \quad \ell = 1, \dots, n-k. \quad (4.13)$$

Тогда

$$\begin{aligned} P_{\mu_1, \dots, \mu_n}^{m_1, \dots, m_n}(A_1, \dots, A_n) \\ = P_{\mu_{j_1}, \dots, \mu_{j_{n-k}}}^{m_{j_1}, \dots, m_{j_{n-k}}}(A_{j_1}, \dots, A_{j_{n-k}}) (\|\mu_{i_k}\| A_{i_k})^{m_{i_k}} \dots (\|\mu_{i_1}\| A_{i_1})^{m_{i_1}}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

В частности, если $k = n$, то

$$P_{\mu_1, \dots, \mu_n}^{m_1, \dots, m_n}(A_1, \dots, A_n) = (\|\mu_{i_n}\| A_{i_n})^{m_{i_n}} \dots (\|\mu_{i_1}\| A_{i_1})^{m_{i_1}}. \quad (4.15)$$

Если неравенства, используемые для упорядочения носителей в формулах (4.11) и (4.13), изменены на противоположные, то порядок операторов в правой части (4.14) также меняется на противоположный.

Такое же утверждение верно для правой части (4.15), но “новая” версия (4.15) является лишь старым результатом в новых обозначениях.

СЛЕДСТВИЕ 4.4. Пусть предположения первой части следствия 4.3 выполнены, включая предположения (4.11) и (4.13), а также включая упорядочение носителей. Тогда для любых $f(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) \in \mathbb{D}(\|\mu_1\| A_1, \dots, \|\mu_n\| A_n)$ таких, что f является элементом банаховой алгебры $\mathbb{A}(\|A_1\| \|\mu_1\|, \dots, \|A_n\| \|\mu_n\|)$ функций (1.1), имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mu_1, \dots, \mu_n} f(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) &= f_{\mu_1, \dots, \mu_n}(A_1, \dots, A_n) \\ &= \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} c_{m_1, \dots, m_n} P_{\mu_{j_1}, \dots, \mu_{j_n-k}}^{m_{j_1}, \dots, m_{j_n-k}}(A_{j_1}, \dots, A_{j_n-k}) \\ &\quad \times (\|\mu_{i_k}\| A_{i_k})^{m_{i_k}} \cdots (\|\mu_{i_1}\| A_{i_1})^{m_{i_1}}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

В частности, если $k = n$ такое, что носители мер полностью упорядочены и условие (4.15) выполнено, то

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mu_1, \dots, \mu_n} f(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) &= f_{\mu_1, \dots, \mu_n}(A_1, \dots, A_n) \\ &= \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} c_{m_1, \dots, m_n} (\|\mu_{i_n}\| A_{i_n})^{m_{i_n}} \cdots (\|\mu_{i_1}\| A_{i_1})^{m_{i_1}}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Наконец, если неравенства в (4.11) и (4.13), используемые для упорядочения, изменить на обратные, то порядок операторов в каждом члене правой части (4.16) также изменится на обратный.

Если функция f является тензорным произведением n функций одной комплексной переменной, то результаты следствия 4.4 имеют особенно красивую форму. Эта ситуация рассматривается ниже, именно в случае $n = k$ из предыдущего следствия.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. Пусть $A_1, \dots, A_n$ принадлежат $\mathcal{L}(X)$, и предположим, что $\mu_1, \dots, \mu_n$ — финитные непрерывные меры на $\mathcal{B}[0, 1]$ такие, что

$$S(\mu_{i_1}) \leq S(\mu_{i_2}) \leq \cdots \leq S(\mu_{i_n}), \quad (4.18)$$

где $i_1, \dots, i_n$ — некоторая перестановка индексов $1, \dots, n$. Далее предположим, что каждая функция g_i принадлежит $\mathbb{A}(\|A_i\| \|\mu_i\|)$, где g_i заданы формулами (2.13) для $i = 1, \dots, n$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mu_1, \dots, \mu_n} (g_1 \otimes \cdots \otimes g_n)(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) &= (g_1 \otimes \cdots \otimes g_n)_{\mu_1, \dots, \mu_n}(A_1, \dots, A_n) \\ &= g_{i_n}(\|\mu_{i_n}\| A_{i_n}) \cdots g_{i_1}(\|\mu_{i_1}\| A_{i_1}). \end{aligned} \quad (4.19)$$

В частности,

$$\exp_{\mu_1, \dots, \mu_n}(A_1, \dots, A_n) = \exp(\|\mu_{i_n}\| A_{i_n}) \cdots \exp(\|\mu_{i_1}\| A_{i_1}). \quad (4.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Этот результат легко следует из следствия 4.4 и предложения 2.4 применительно к случаю финитных мер. Именно, применяя (4.17) и (2.14), мы имеем

$$\begin{aligned}
 & (g_1 \otimes \cdots \otimes g_n)_{\mu_1, \dots, \mu_n}(A_1, \dots, A_n) \\
 &= \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} c_{m_1}^{(1)} \cdots c_{m_n}^{(n)} (\|\mu_{i_n}\| A_{i_n})^{m_{i_n}} \cdots (\|\mu_{i_1}\| A_{i_1})^{m_{i_1}} \\
 &= \left[\sum_{m_{i_n}=0}^{\infty} c_{m_{i_n}}^{(i_n)} (\|\mu_{i_n}\| A_{i_n})^{m_{i_n}} \right] \cdots \left[\sum_{m_{i_1}=0}^{\infty} c_{m_{i_1}}^{(i_1)} (\|\mu_{i_1}\| A_{i_1})^{m_{i_1}} \right] \\
 &= g_{i_n}(\|\mu_{i_n}\| A_{i_n}) \cdots g_{i_1}(\|\mu_{i_1}\| A_{i_1}),
 \end{aligned}$$

что совпадает с (4.19). Формула (4.20) является специальным частным случаем (4.19).

Уравнение (4.19) есть простая формула выпутывания, которая имеет место для функций, являющихся тензорами при условии (4.18) на носители. Предложение 4.5 распространяется без значительных усложнений на случай функций, являющихся конечными или бесконечными суммами тензорных произведений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. Пусть $A_1, \dots, A_n$ и $\mu_1, \dots, \mu_n$ удовлетворяют предположениям предыдущего предложения, и пусть для каждого $j = 1, 2, \dots$ и $i = 1, \dots, n$ выполнено $g_{i,j} \in \mathbb{A}(\|A_i\| \|\mu_i\|)$, так что $g_{1,j} \otimes \cdots \otimes g_{n,j} \in \mathbb{A}(\|A_1\| \|\mu_1\|, \dots, \|A_n\| \|\mu_n\|)$. Наконец, предположим, что ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} g_{1,j} \otimes \cdots \otimes g_{n,j} \quad (4.21)$$

сходится в $\mathbb{A}(\|A_1\| \|\mu_1\|, \dots, \|A_n\| \|\mu_n\|)$. Тогда

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{T}_{\mu_1, \dots, \mu_n} \left[\sum_{j=1}^{\infty} (g_{1,j} \otimes \cdots \otimes g_{n,j})(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) \right] \\
 &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} g_{1,j} \otimes \cdots \otimes g_{n,j} \right)_{\mu_1, \dots, \mu_n} (A_1, \dots, A_n) \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} g_{i_n,j}(\|\mu_{i_n}\| A_{i_n}) \cdots g_{i_1,j}(\|\mu_{i_1}\| A_{i_1}).
 \end{aligned} \quad (4.22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно использовать предложение 4.5 и непрерывность отображения $\mathcal{T}_{\mu_1, \dots, \mu_n}$.

Ряд (4.22) абсолютно сходится в пространстве $\mathbb{A}(\|A_1\| \|\mu_1\|, \dots, \|A_n\| \|\mu_n\|)$ при условии, что $\sum_{j=1}^{\infty} \|g_{1,j}\| \cdots \|g_{n,j}\| < \infty$.

Далее мы покажем, что произведение Троттера (формулу произведения Троттера см. в [12, теорема VIII.30]) может быть получено, используя предложение 4.5.

Пусть μ_i , $i = 1, \dots, 2n$, является мерой Лебега на интервале $[(i-1)/(2n), i/(2n)]$ и нулем на дополнении этого множества в $[0, 1]$. Пусть также заданы B_1, B_2 , принадлежащие $\mathcal{L}(X)$, и пусть

$$A_i = \begin{cases} B_1, & \text{если } i \text{ нечетно,} \\ B_2, & \text{если } i \text{ четно.} \end{cases} \quad (4.23)$$

Тогда из (4.20) предложения 4.5 имеем

$$\begin{aligned} \exp_{\mu_1, \dots, \mu_{2n}}(A_1, \dots, A_{2n}) &= \exp\left(\frac{1}{2n} A_{2n}\right) \exp\left(\frac{1}{2n} A_{2n-1}\right) \cdots \exp\left(\frac{1}{2n} A_2\right) \exp\left(\frac{1}{2n} A_1\right) \\ &= \left[\exp\left(\frac{1}{2} \frac{B_2}{n}\right) \exp\left(\frac{1}{2} \frac{B_1}{n}\right) \right]^n. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Но последнее выражение в (4.24) является в точности аппроксимацией n -го порядка формулы произведения Троттера для $\exp((B_1 + B_2)/2)$. Заметим также, что произведения Троттера существенно используются в [10].

Основной результат настоящего пункта предполагает, что существует по крайней мере одна мера, носитель которой лежит слева (или справа) от носителей других мер. Мы приводим здесь краткое описание примера, в котором формула выпутывания является более сложной.

ПРИМЕР 4.7. Пусть A_1, A_2, A_3 принадлежат $\mathcal{L}(X)$, и пусть μ_1, μ_2, μ_3 определены на $\mathcal{B}[0, 1]$. Предположим, что $S(\mu_1) \subseteq [1/3, 2/3]$ и $S(\mu_i) \subseteq [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$ для $i = 2, 3$. Тогда $S(\mu_1 \times \mu_2 \times \mu_3)$ является подмножеством объединения следующих непересекающихся множеств:

$$\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \times \left[0, \frac{1}{3}\right]^2, \quad \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \times \left[0, \frac{1}{3}\right] \times \left[\frac{2}{3}, 1\right], \quad \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \times \left[\frac{2}{3}, 1\right] \times \left[0, \frac{1}{3}\right], \quad \left[\frac{1}{3}\right] \times \left[\frac{2}{3}, 1\right]^2.$$

Рассматривая, что происходит на каждом из этих множеств, можно видеть, что

$$\begin{aligned} P_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}^{1,1,1}(A_1, A_2, A_3) &= (\|\mu_1\| A_1) \left\{ A_3 A_2 (\mu_2 \times \mu_3) \left(\left[0 < s_2 < s_3 < \frac{1}{3} \right] \right) \right. \\ &\quad + A_2 A_3 (\mu_2 \times \mu_3) \left(\left[0 < s_3 < s_2 < \frac{1}{3} \right] \right) \left. \right\} + \left(\mu_3 \left[\frac{2}{3}, 1 \right] A_3 \right) (\|\mu_1\| A_1) \left(\mu_2 \left[0, \frac{1}{3} \right] A_2 \right) \\ &\quad + \left(\mu_2 \left[\frac{2}{3}, 1 \right] A_2 \right) (\|\mu_1\| A_1) \left(\mu_3 \left[0, \frac{1}{3} \right] A_3 \right) + \left\{ A_2 A_3 (\mu_2 \times \mu_3) \left(\left[\frac{2}{3} < s_3 < s_2 < 1 \right] \right) \right. \\ &\quad + A_3 A_2 (\mu_2 \times \mu_3) \left(\left[\frac{2}{3} < s_2 < s_3 < 1 \right] \right) \left. \right\} (\|\mu_1\| A_1). \end{aligned}$$

Как было замечено во введении, результаты настоящего пункта связывают теорию, развиваемую авторами в настоящей работе и в [4], [5], [10], с элементарными аспектами работ [6] и [7].

5. Выпутывание экспоненциального множителя. Фейнман рассматривал свою формулу выпутывания “экспериментального”, точнее, экспоненциального множителя как основной результат работы [1]. В этом пункте мы приводим математически строгий вывод этой формулы. На самом деле, основной результат – приводимая ниже теорема 5.1 – допускает разнообразные меры и не ограничивается случаем экспоненциальных функций. Варьирование множества мер означает, что мы можем рассматривать одновременно различные операторные исчисления.

Пусть $A, B_1, \dots, B_k$ – элементы алгебры $\mathcal{L}(X)$ и $m, n_1, \dots, n_k$ – неотрицательные целые числа. Сначала мы “выпутаем” $\tilde{A}^m \tilde{B}_1^{n_1} \cdots \tilde{B}_k^{n_k}$. Идея состоит в том, чтобы выделить члены, соответствующие $\tilde{A}$, из других членов.

Пусть $n = n_1 + \dots + n_k$. Предположим, что μ и $\nu_1, \dots, \nu_k$ – непрерывные вероятностные меры на борелевской σ -алгебре $\mathcal{B}[0, 1]$ на отрезке $[0, 1]$. Согласно определению 1.2 и (1.13) выпутывание множителя $P_{\mu, \nu_1, \dots, \nu_k}^{m, n_1, \dots, n_k}(A, B_1, \dots, B_k)$ из $\tilde{A}^m \tilde{B}_1^{n_1} \dots \tilde{B}_k^{n_k}$ дается выражением

$$\sum_{\pi \in S_{m+n}} \int_{\Delta_{m+n}(\pi)} C_{\pi(m+n)}(s_{\pi(m+n)}) \dots C_{\pi(1)}(s_{\pi(1)}) \times (\mu^m \times \nu_1^{n_1} \times \dots \times \nu_k^{n_k})(ds_1, \dots, ds_{m+n}), \quad (5.1)$$

где

$$C_i(s) = \begin{cases} A, & \text{если } i \in \{1, \dots, m\}, \\ B_1, & \text{если } i \in \{m+1, \dots, m+n_1\}, \\ B_2, & \text{если } i \in \{m+n_1+1, \dots, m+n_1+n_2\}, \\ \dots & \dots \\ B_k, & \text{если } i \in \{m+n_1+\dots+n_{k-1}+1, \dots, m+n\}, \end{cases}$$

для всех $0 \leq s \leq 1$. Как обычно, в наших обозначениях мы опускаем зависимость от $m, n_1, \dots, n_k$.

Выражение (5.1) может быть записано явно в терминах A и $B_1, \dots, B_k$. Для $\pi \in S_{m+n}$ рассмотрим множество $J_\pi = \pi^{-1}(\{m+1, \dots, m+n\})$. Тогда $C_{\pi(j)}(s) \in \{B_1, \dots, B_k\}$ для всех $0 \leq s \leq 1$ и всех $j \in J_\pi$ и $C_{\pi(j)}(s) = A$ для всех $0 \leq s \leq 1$ и всех $j \notin J_\pi$, $j = 1, \dots, m+n$.

Предположим, что $J_\pi = \{u_1, \dots, u_n\}$ для целых n чисел $u_1 < \dots < u_n$ от 1 до $m+n$ и для каждого $k = 0, \dots, n$ существует целое j_k большее, чем u_k , и меньшее, чем u_{k+1} . Здесь мы полагаем $u_0 = 0$ и $u_{n+1} = m+n+1$, т.е.

$$j_0 = u_1 - 1, \quad j_1 = u_2 - u_1 - 1, \quad \dots, \quad j_{n-1} = u_n - u_{n-1} - 1, \quad j_n = m+n - u_n.$$

Для каждого $(s_1, \dots, s_{m+n}) \in \Delta_{m+n}(\pi)$ мы имеем

$$C_{\pi(m+n)}(s_{\pi(m+n)}) \dots C_{\pi(1)}(s_{\pi(1)}) = A^{j_n} B_{\pi(u_n)} A^{j_{n-1}} \dots A^{j_1} B_{\pi(u_1)} A^{j_0}.$$

Тогда интеграл

$$\int_{\Delta_{m+n}(\pi)} C_{\pi(m+n)}(s_{\pi(m+n)}) \dots C_{\pi(1)}(s_{\pi(1)}) (\mu^m \times \nu_1^{n_1} \times \dots \times \nu_k^{n_k})(ds_1, \dots, ds_{m+n})$$

преобразуется к виду

$$(\mu^m \times \nu_1^{n_1} \times \dots \times \nu_k^{n_k})(\Delta_{m+n}(\pi)) A^{j_n} B_{\pi(u_n)} A^{j_{n-1}} \dots A^{j_1} B_{\pi(u_1)} A^{j_0}. \quad (5.2)$$

В силу приведенной выше конструкции каждой перестановке $\pi \in S_{m+n}$ соответствуют неотрицательные целые $(j_0, \dots, j_n)$ такие, что $j_0 + \dots + j_n = m$. Обратно, целые числа $(j_0, \dots, j_n)$ однозначно определяют подмножества с n элементами $J \subset \{1, \dots, m+n\}$. Существует $m!n!$ перестановок $\pi \in S_{m+n}$ таких, что $\pi^{-1}(\{m+1, \dots, m+n\}) = J$, соответствующих множеству $\mathcal{B}_{j_0, \dots, j_n}$ из $n!$ биекций из J на $\{m+1, \dots, m+n\}$ и множества $\mathcal{A}_{j_0, \dots, j_n}$ из $m!$ биекций из $\{1, \dots, m+n\} \setminus J$ на $\{1, \dots, m\}$.

Пусть $j_0, \dots, j_n$ – неотрицательные целые числа такие, что $j_0 + \dots + j_n = m$, и пусть $J = \{u_1, \dots, u_n\}$ – набор соответствующих n целых чисел $u_1 < \dots < u_n$ от 1 до $m+n$. Пусть $\beta \in \mathcal{B}_{j_0, \dots, j_n}$ и $\alpha \in \mathcal{A}_{j_0, \dots, j_n}$.

Для каждого $0 \leq u < v \leq 1$ и каждого целого $k = 0, 1, \dots, n$ положим

$$\Delta_{j_0, \dots, j_n}^\alpha[u, v; k] = \{(s_1, \dots, s_m) \in \mathbb{R}^m : u \leq s_{\alpha(u_k+1)} < \dots < s_{\alpha(u_{k+1}-1)} \leq v\},$$

$$\Gamma_{j_0, \dots, j_n}^\beta = \{(s_{m+1}, \dots, s_{m+n}) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq s_{\beta(u_1)} < \dots < s_{\beta(u_n)} \leq 1\}.$$

Целые числа $j_0, \dots, j_n$ и отображения $\beta \in \mathcal{B}_{j_0, \dots, j_n}$ и $\alpha \in \mathcal{A}_{j_0, \dots, j_n}$ однозначно определяют перестановку $\pi \in S_{m+n}$, для которой

$$\Delta_{m+n}(\pi) \equiv \bigcup_{s \in \Gamma_{j_0, \dots, j_n}^\beta} (\Delta_{j_0, \dots, j_n}^\alpha[0, s_{\beta(u_1)}; 0] \cap \dots \cap \Delta_{j_0, \dots, j_n}^\alpha[s_{\beta(u_n)}, 1; n]) \times \{s\}.$$

Использование теоремы Фубини показывает, что мера

$$(\mu^m \times \nu_1^{n_1} \times \dots \times \nu_k^{n_k})(\Delta_{m+n}(\pi))$$

множества $\Delta_{m+n}(\pi)$, т.е. числовой множитель в (5.2), равна

$$\int_{\Gamma_{j_0, \dots, j_n}^\beta} \mu^m(\Delta_{j_0, \dots, j_n}^\alpha[0, s_{\beta(u_1)}; 0] \cap \dots \cap \Delta_{j_0, \dots, j_n}^\alpha[s_{\beta(u_n)}, 1; n]) \times (\nu_1^{n_1} \times \dots \times \nu_k^{n_k})(ds_{m+1}, \dots, ds_{m+n}), \quad (5.3)$$

где $\mu^0(\emptyset) = 1$. Произдукт-мера μ^m инвариантна относительно действия перестановок индексов, поэтому для фиксированного $\beta \in \mathcal{B}_{j_0, \dots, j_n}$ это число одинаково для всех $\alpha \in \mathcal{A}_{j_0, \dots, j_n}$.

Выражение (5.3) может быть переписано следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_{j_0, \dots, j_n}^\beta} \mu^{j_0}(\Delta_{j_0}[0, s_{\beta(u_1)}]) \mu^{j_1}(\Delta_{j_1}[s_{\beta(u_1)}, s_{\beta(u_2)}]) \dots \mu^{j_n}(\Delta_{j_n}[s_{\beta(u_n)}, 1]) \\ & \times (\nu_1^{n_1} \times \dots \times \nu_k^{n_k})(ds_{m+1}, \dots, ds_{m+n}) \\ & = \frac{1}{j_0! \dots j_n!} \int_{\Gamma_{j_0, \dots, j_n}^\beta} \mu([0, s_{\beta(u_1)}])^{j_0} \mu([s_{\beta(u_1)}, s_{\beta(u_2)}])^{j_1} \dots \mu([s_{\beta(u_n)}, 1])^{j_n} \\ & \times (\nu_1^{n_1} \times \dots \times \nu_k^{n_k})(ds_{m+1}, \dots, ds_{m+n}). \end{aligned}$$

Множество $\mathcal{B}_{j_0, \dots, j_n}$ находится во взаимно однозначном соответствии с S_n . Обозначим

$$(\overbrace{B_1, \dots, B_1}^{n_1}, \dots, \overbrace{B_j, \dots, B_j}^{n_j}, \dots, \overbrace{B_k, \dots, B_k}^{n_k})$$

через $(B'_1, \dots, B'_n)$. Сумма выражений (5.2) по всем $\pi \in S_{m+n}$ равна

$$\sum_{j_0 + \dots + j_n = m} \sum_{\pi \in S_n} \frac{m!}{j_0! \dots j_n!} \gamma_{j_0, \dots, j_n}(\pi) A^{j_n} B'_{\pi(n)} A^{j_{n-1}} \dots A^{j_1} B'_{\pi(1)} A^{j_0},$$

где для всех неотрицательных целых $j_0, \dots, j_n$ и $\pi \in S_n$ число $\gamma_{j_0, \dots, j_n}(\pi)$ равно интегралу

$$\int_{\Delta_n(\pi)} \mu([0, s_{\pi(1)}])^{j_0} \mu([s_{\pi(1)}, s_{\pi(2)}])^{j_1} \dots \mu([s_{\pi(n)}, 1])^{j_n} (\nu_1^{n_1} \times \dots \times \nu_k^{n_k})(ds_1, \dots, ds_n).$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть k – натуральное, и пусть μ и $\nu_1, \dots, \nu_k$ – непрерывные вероятностные меры на борелевской σ -алгебре $\mathcal{B}([0, 1])$. Пусть $A, B_1, \dots, B_k$ – элементы из $\mathcal{L}(X)$. Предположим, что $f \in \mathbb{A}(\|A\|, \|B_1\|, \dots, \|B_k\|)$ заданы следующим образом:

$$f(z_0, \dots, z_k) = \sum_{m, n_1, \dots, n_k=0}^{\infty} c_{m, n_1, \dots, n_k} z_0^m z_1^{n_1} \dots z_k^{n_k}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & f_{\mu, \nu_1, \dots, \nu_k}(A, B_1, \dots, B_k) \\ &= \sum_{m, n_1, \dots, n_k=0}^{\infty} c_{m, n_1, \dots, n_k} m! \left(\sum_{j_0 + \dots + j_n = m} \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \frac{1}{j_0! \dots j_n!} \gamma_{j_0, \dots, j_n}(\pi) \right. \\ & \quad \left. \times A^{j_n} B'_{\pi(n)} A^{j_{n-1}} \dots A^{j_1} B'_{\pi(1)} A^{j_0} \right), \end{aligned} \quad (5.4)$$

где для каждого $j_0, \dots, j_n$ и $\pi \in S_n$ число $\gamma_{j_0, \dots, j_n}(\pi)$ равно интегралу

$$\int_{\Delta_n(\pi)} \mu([0, s_{\pi(1)}])^{j_0} \mu([s_{\pi(1)}, s_{\pi(2)}])^{j_1} \dots \mu([s_{\pi(n)}, 1])^{j_n} (\nu_1^{n_1} \times \dots \times \nu_k^{n_k})(ds_1, \dots, ds_n) \quad (5.5)$$

и для каждого $n_1, \dots, n_k$ в этой сумме $(B'_1, \dots, B'_n)$ равняется

$$(\overbrace{B_1, \dots, B_1}^{n_1}, \dots, \overbrace{B_j, \dots, B_j}^{n_j}, \dots, \overbrace{B_k, \dots, B_k}^{n_k}).$$

Для всех $m, n_1, \dots, n_k$ сумма

$$\sum_{\pi \in S_n} \frac{1}{j_0! \dots j_n!} \gamma_{j_0, \dots, j_n}(\pi) A^{j_n} B'_{\pi(n)} A^{j_{n-1}} \dots A^{j_1} B'_{\pi(1)} A^{j_0}$$

в (5.4) может быть заменена на

$$n_1! \dots n_k! \sum_{\pi \in \mathcal{P}_{n_1, \dots, n_k}} \frac{1}{j_0! \dots j_n!} \gamma'_{j_0, \dots, j_n}(\pi) A^{j_n} B'_{\pi(n)} A^{j_{n-1}} \dots A^{j_1} B'_{\pi(1)} A^{j_0},$$

где $\mathcal{P}_{n_1, \dots, n_k}$ – множество перестановок $\pi \in S_n$, определенных следующей формулой (1.22). Для каждого $\pi \in \mathcal{P}_{n_1, \dots, n_k}$

$$\begin{aligned} \gamma'_{j_0, \dots, j_n}(\pi) &= \int_{(\Delta_{n_1} \times \dots \times \Delta_{n_k})(\pi)} \mu([0, s_{\pi(1)}])^{j_0} \mu([s_{\pi(1)}, s_{\pi(2)}])^{j_1} \dots \mu([s_{\pi(n)}, 1])^{j_n} \\ & \quad \times (\nu_1^{n_1} \times \dots \times \nu_k^{n_k})(ds_1, \dots, ds_n), \end{aligned} \quad (5.6)$$

где $(\Delta_{n_1} \times \dots \times \Delta_{n_k})(\pi)$ – множество, определенное в (1.22).

В следующих двух следствиях так же, как и в предложении 5.5, рассматривается экспоненциальный случай.

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Пусть $k = 1, 2, \dots$, и пусть μ и $\nu_1, \dots, \nu_k$ – непрерывные вероятностные меры на борелевской σ -алгебре $\mathcal{B}[0, 1]$. Пусть $A, B_1, \dots, B_k$ – элементы алгебры $\mathcal{L}(X)$. Тогда для всех $t \geq 0$ выполнено

$$\begin{aligned} & T_{\mu, \nu_1, \dots, \nu_k}(e^{(\tilde{A} + \tilde{B}_1 + \dots + \tilde{B}_k)t}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{n_1 + \dots + n_k = n} \left[\sum_{\pi \in S_n} \int_{\Delta_n(\pi)} e^{At\mu([s_{\pi(n)}, 1])} B'_{\pi(n)} e^{At\mu([s_{\pi(n-1)}, s_{\pi(n)}])} \dots \right. \\ & \quad \left. \times e^{At\mu([s_{\pi(1)}, s_{\pi(2)}])} B'_{\pi(1)} e^{At\mu([0, s_{\pi(1)}])} (\nu_1^{n_1} \times \dots \times \nu_k^{n_k})(ds_1, \dots, ds_n) \right], \end{aligned} \quad (5.7)$$

где для каждого $n_1, \dots, n_k$ в этой сумме $(B'_1, \dots, B'_n)$ равняется

$$(\overbrace{B_1, \dots, B_1}^{n_1}, \dots, \overbrace{B_j, \dots, B_j}^{n_j}, \dots, \overbrace{B_k, \dots, B_k}^{n_k}).$$

Для всех $n_1, \dots, n_k$ сумма $\sum_{\pi \in S_n} \int_{\Delta_n(\pi)} \dots$ может быть заменена на

$$n_1! \dots n_k! \sum_{\pi \in \mathcal{P}_{n_1, \dots, n_k}} \int_{(\Delta_{n_1} \times \dots \times \Delta_{n_k})(\pi)} \dots,$$

где $\mathcal{P}_{n_1, \dots, n_k}$ и $(\Delta_{n_1} \times \dots \times \Delta_{n_k})(\pi)$, $\pi \in \mathcal{P}_{n_1, \dots, n_k}$, определены в формуле (1.22) и абзаце, следующем за формулой (1.22).

В случае, когда $k = 1$ и $\nu = \nu_1$, каждый член суммы по перестановкам $\pi \in S_n$ в выражении (5.7) равен интегралу

$$\int_0^1 \int_0^{s_n} \dots \int_0^{s_2} e^{At\mu([s_n, 1])} B e^{At\mu([s_{n-1}, s_n])} \dots e^{At\mu([s_1, s_2])} B e^{At\mu([0, s_1])} \nu^n(ds_1, \dots, ds_n),$$

где $\nu^n(ds_1, \dots, ds_n) = \nu^n(ds_{\pi(1)}, \dots, ds_{\pi(n)})$. Таким образом, мы получаем

СЛЕДСТВИЕ 5.3. Пусть μ и ν – непрерывные вероятностные меры на борелевской σ -алгебре $\mathcal{B}[0, 1]$. Пусть A и B – элементы из $\mathcal{L}(X)$. Тогда для всех $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mu, \nu}(e^{(\tilde{A} + \tilde{B})t}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left[\sum_{\pi \in S_n} \int_{\Delta_n(\pi)} e^{At\mu([s_{\pi(n)}, 1])} B e^{At\mu([s_{\pi(n-1)}, s_{\pi(n)}])} \dots \right. \\ & \quad \left. \times e^{At\mu([s_{\pi(1)}, s_{\pi(2)}])} B e^{At\mu([0, s_{\pi(1)}])} \nu^n(ds_1, \dots, ds_n) \right]. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Следующая лемма используется при доказательстве предложения 5.5 и, кроме того, имеет самостоятельный интерес.

ЛЕММА 5.4. Пусть $A_1, \dots, A_n$ принадлежат $\mathcal{L}(X)$. Пусть μ – непрерывная вероятностная мера на $\mathcal{B}[0, 1]$. Тогда для всех скаляров $\xi_1, \dots, \xi_n$ и всех неотрицательных целых m справедливо равенство

$$\mathcal{T}_{\mu, \dots, \mu} \left(\sum_{j=1}^n \xi_j \tilde{A}_j \right)^m = \left(\sum_{j=1}^n \xi_j A_j \right)^m. \quad (5.9)$$

Если $g(z)$ – аналитическая функция со степенным рядом $\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$, равномерно сходящимся на замкнутом диске радиуса $\sum_{j=1}^n |\xi_j| \|A_j\|$, то функция $f: (z_1, \dots, z_n) \rightarrow g(\sum_{j=1}^n \xi_j z_j)$ принадлежит $\mathbb{A}(\|A_1\|, \dots, \|A_n\|)$ и выполнено равенство

$$f_{\mu, \dots, \mu}(A_1, \dots, A_n) = g \left(\sum_{j=1}^n \xi_j A_j \right) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \left(\sum_{j=1}^n \xi_j A_j \right)^m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $k = 1, 2, \dots$ вероятностная мера μ^k инвариантна относительно перестановок переменных из $[0, 1]^k$, поэтому для любых перестановок $\pi \in S_k$ мера подмножества $[0 < s_{\pi(1)} < \dots < s_{\pi(k)} < 1]$ в $[0, 1]^k$ равна $1/k!$.

Из формулы (1.20) следует, что для всех неотрицательных целых $m_1, \dots, m_n$ имеет место соотношение

$$\mathcal{T}_{\mu, \dots, \mu} P^{m_1, \dots, m_n}(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) = \frac{m_1! \cdots m_n!}{m!} \sum_{\sigma} A_{\sigma(1)} \cdots A_{\sigma(n)}. \quad (5.10)$$

Сумма берется по всем отображениям σ множества $\{1, \dots, m\}$ в $\{1, \dots, n\}$, которые принимают значение j в точности m_j раз для каждого $j = 1, \dots, n$. Здесь $m = m_1 + \dots + m_n$. Другими словами, все возможные упорядочения произведения операторов имеют одинаковый вес. Это является характеристикой разложения правой части (5.9), поэтому (5.9) следует из разложения обеих частей уравнения и применения формулы (5.10).

Вторая часть утверждения следует из того факта, что $\mathcal{T}_{\mu, \dots, \mu}$ является ограниченным линейным оператором.

Следующее утверждение дает разложение типа ряда Дайсона для $e^{(A+B)t}$ относительно непрерывной вероятностной меры μ . В случае, если μ является мерой Лебега ℓ на $[0, 1]$, этот результат хорошо известен [1], [5], [12].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5. Пусть μ – непрерывная вероятностная мера на борелевской σ -алгебре $\mathcal{B}[0, 1]$. Пусть A и B – элементы алгебры $\mathcal{L}(X)$. Тогда для всех $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mu, \mu}(e^{(\tilde{A} + \tilde{B})t}) &= e^{(A+B)t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left[\int_0^1 \int_0^{s_n} \cdots \int_0^{s_2} e^{At\mu([s_n, 1])} B e^{At\mu([s_{n-1}, s_n])} \dots \right. \\ &\quad \left. \times e^{At\mu([s_1, s_2])} B e^{At\mu([0, s_1])} \mu^n(ds_1, \dots, ds_n) \right]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое равенство в (5.11) следует из леммы 5.4. Второе следует из уравнения (5.8) после того, как мы заметим, что для любого $n = 1, 2 \dots$ каждый член суммы по перестановкам $\pi \in S_n$ равен интегралу

$$\int_0^1 \int_0^{s_n} \dots \int_0^{s_2} e^{At\mu([s_n, 1])} B e^{At\mu([s_{n-1}, s_n])} \dots e^{At\mu([s_1, s_2])} B e^{At\mu([0, s_1])} \mu^n(ds_1, \dots, ds_n),$$

где $\mu^n(ds_1, \dots, ds_n) = \mu^n(ds_{\pi(1)}, \dots, ds_{\pi(n)})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.6. Из [13, теоремы 2.4, 2.8] следует, что в случае, когда X – гильбертово пространство и A, B – ограниченные самосопряженные операторы, действующие на X , функциональное исчисление

$$f \mapsto f_{\mu, \mu}(A, B) \quad \text{для всех } f \in \mathbb{A}(\|A\|, \|B\|)$$

является сужением на $\mathbb{A}(\|A\|, \|B\|)$ вейлевского исчисления для пары (A, B) . Это верно для *любой* непрерывной вероятностной меры μ на $[0, 1]$, а не только меры Лебега ℓ . Аналогичные замечания справедливы для самосопряженных элементов $(A_1, \dots, A_n)$ алгебры $\mathcal{L}(X)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Feynman R. An operator calculus having applications in quantum electrodynamics // Phys. Rev. 1951. V. 84. P. 108–128.
- [2] Feynman R. Mathematical formulation of the quantum theory of electromagnetic interaction // Phys. Rev. 1950. V. 80. P. 440–457.
- [3] Feynman R., Hibbs A. Quantum Mechanics and Path Integrals. New York: McGraw-Hill, 1965.
- [4] Jefferies B., Johnson G. W. Feynman's operational calculi for noncommuting operators: Definitions and elementary properties // Russ. J. Math. Phys. 2001. V. 8. №2. P. 153–178.
- [5] Johnson G. W., Lapidus M. L. The Feynman Integral and Feynman's Operational Calculus. Oxford Math. Monograph. Oxford: Oxford Univ. Press, 2000.
- [6] Маслов В. П. Операторные методы. М.: Наука, 1973.
- [7] Nazaikinskii V. E., Shatalov V. E., Sternin B. Yu. Methods of Noncommutative Analysis. Studies in Math. V. 22. Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1996.
- [8] Jefferies B., Johnson G. W., Nielsen L. Feynman's operational calculi for time dependent noncommuting operators (Proc. of Seoul Conference “Feynman Integral and Applications”) // J. Korean Math. Soc. 2001. V. 38 (to appear).
- [9] Nielsen L. Thesis. Lincoln: Univ. of Nebraska, 1999.
- [10] Johnson G. W., Nielsen L. A stability theorem for Feynman's operational calculus // Conference Proc. Canad. Math. Soc. Conference in Honor of Sergio Albeverio's 60th birthday. V. 29, 2000. P. 351–365.
- [11] Jefferies B., Johnson G. W. Feynman's operational calculi for noncommuting systems of operators // Pure Math. Report. PM 98/99. Sydney, Australia: School of Mathematics, UNSW, 1999.
- [12] Reed M., Simon B. Methods of Modern Mathematical Physics. V. 1. Orlando: Acad. Press, 1980.
- [13] Anderson R. F. V. The Weyl functional calculus // J. Funct. Anal. 1969. V. 4. P. 240–267.

(Б. Джеффрис) Университет Южного Уэльса, Австралия
 (Г.В. Джонсон) Университет Небраски, г. Линкольн, США
 E-mail: b.jefferies@unsw.edu.au, gjohnson@math.unl.edu

Поступило
 29.05.2001