Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Л. Зиглин, О первых интегралах групп комплексных линейных преобразований и натуральных механических систем с однородным потенциалом, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 6, 839–844

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm796>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 13:37:08

УДК 517.913

О ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛАХ ГРУПП КОМПЛЕКСНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И НАТУРАЛЬНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ОДНОРОДНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

С. Л. Зиглин

Исследуется вопрос о существовании рациональных первых интегралов групп комплексных линейных преобразований. Полученные результаты применяются к натуральным механическим системам с однородным потенциалом, в частности, к задаче Суслова о движении твердого тела около неподвижной точки с неголономной связью в случае Козлова при нулевой постоянной энергии.

Библиография: 14 названий.

1. Общая теория. Пусть L – конечномерное комплексное линейное пространство, G – подгруппа группы его линейных преобразований, H – подгруппа группы G конечного индекса.

ЛЕММА. Числа функционально независимых рациональных первых интегралов групп G и H совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f_1, \dots, f_r$ – функционально независимые рациональные первые интегралы группы H . Тогда для любых $g, g' \in G$ таких, что $g \in Hg'$, имеем $f_1 \circ g = f_1 \circ g'$; следовательно, число функций $f_1 \circ g$, где $g \in G$, конечно. Обозначим их через $F_1, \dots, F_k$.

Рассмотрим первые интегралы $\varphi_i = \sum_{j=1}^k F_j^i$ ($i = 1, \dots, k$) группы G . Имеем

$$\begin{pmatrix} d\varphi_1 \\ \vdots \\ d\varphi_k \end{pmatrix} = \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_k)}{\partial(F_1, \dots, F_k)} \begin{pmatrix} dF_1 \\ \vdots \\ dF_k \end{pmatrix}, \quad \det \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_k)}{\partial(F_1, \dots, F_k)} = k! \prod_{i < j \leq k} (F_i - F_j).$$

Пусть в точке $x \in L$ значения функций $F_1, \dots, F_k$ попарно различны и дифференциалы $df_1, \dots, df_r$ линейно независимы. Тогда дифференциал $d_x f_1$ является линейной комбинацией дифференциалов $d_x \varphi_1, \dots, d_x \varphi_k$ и существует i ($1 \leq i \leq k$) такое, что дифференциалы $d_x \varphi_i, d_x f_2, \dots, d_x f_r$ линейно независимы.

Заменим первый интеграл f_1 группы H на первый интеграл φ_i группы G , затем аналогично поступим с f_2 и т.д. В результате получим систему r функционально независимых рациональных первых интегралов группы G , что и требовалось доказать.

Пусть G – подгруппа группы линейных преобразований двумерной комплексной плоскости L^2 с определителями, являющимися корнями фиксированной степени из единицы.

Из теоремы 3.3 работы [1] вытекает следующая теорема, совпадающая при $G \subset \text{SL}(2, \mathbb{C})$ со следствием 3.4 из [1].

ТЕОРЕМА 1. *Для существования у группы G рационального первого интеграла необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий:*

- 1) *все преобразования группы G имеют общий собственный вектор, а их собственные значения являются корнями из единицы фиксированной степени;*
- 2) *существует пара прямых, проходящих через $0 \in L^2$, объединение которых инвариантно относительно G ;*
- 3) *группа G конечна.*

Дадим независимое

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Достаточность условий 1), 2) очевидна. Достаточность условия 3) следует из леммы.

Докажем необходимость. Пусть f – рациональный первый интеграл группы G . Не ограничивая общности, будем считать его однородным. Представим его в виде несократимой дроби. Если множество прямых, на которых обращается в нуль ее числитель или знаменатель, состоит из одного элемента, то в соответствующих координатах имеем $f = x^n$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, и выполняется условие 1); если из двух – то условие 2); если более – то условие 3) (так как одномерное проективное преобразование определяется образами трех точек (см., например, [2]), то проективизация группы G , а значит, и она сама, конечна), что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 2. *Для существования у группы G рационального первого интеграла необходимо и достаточно выполнение одного из условий: 1), 2) или*

- 3') *проективизация группы G изоморфна группе вращений куба, тетраэдра или икосаэдра.*

СЛЕДСТВИЕ. *Если хотя бы один элемент проективизации группы G имеет порядок больше пяти, то для существования рационального первого интеграла группы G необходимо и достаточно выполнение условий 1) или 2).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. По теореме Клейна (см., например, [3], [4]) действие конечной подгруппы проективной группы комплексной проективной прямой сопряжено действию либо конечной циклической подгруппы группы вращения сферы, либо подгруппы этой группы, порожденной вращениями диэдра или многогранников, указанных в условии 3') с центром в центре сферы. Но в первых двух случаях оно имеет инвариантное множество, состоящее из двух точек, следовательно, выполняется условие 2). Теорема доказана.

2. Натуральные механические системы с однородным потенциалом. Пусть D – область в n -мерном комплексном координатном пространстве $\mathbb{C}^n$, инвариантная относительно умножения на ненулевые комплексные числа и такая, что $\operatorname{Re} D = D \cap \mathbb{R}^n \neq \emptyset$; V – вещественно-аналитическая однородная функция в D целой степени k .

Будем использовать следующие обозначения. Если $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$, то $\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$, $x^2 = \langle x, x \rangle$.

Рассмотрим, следуя [5], [6], гамильтонову систему

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad q \in D, \quad p \in \mathbb{C}^n, \\ H &= \frac{1}{2} p^2 + V(q). \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть $c \in \operatorname{Re} D$ – ненулевое решение системы уравнений

$$c = \frac{\partial V}{\partial q}(c). \quad (2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. При $k = 0$ таких решений нет, так как при вещественных q имеем $q \perp \partial V / \partial q$.

Рассмотрим прямолинейное решение $q = c\phi(t)$, $p = c\dot{\phi}(t)$ системы (1), где ϕ – решение дифференциального уравнения

$$\ddot{\phi} + \phi^{k-1} = 0$$

с начальным условием $\phi(0) = 1$, $\dot{\phi}(0) = 0$.

Как показано в [7] (ср. [5], [6]), если система (1) имеет в какой-либо области, содержащей комплексную фазовую кривую Γ этого решения, n функционально независимых мероморфных первых интегралов в инволюции, то группа монодромии каждого из уравнений

$$\dot{\xi} + \lambda_i \phi^{k-2}(t)\xi = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

где λ_i – собственные значения матрицы $\partial^2 V / \partial q^2(c)$, т.е. образ естественного антипредставления фундаментальной группы фазовой кривой Γ в какой-либо точке в группу линейных преобразований комплексной плоскости $\mathbb{C}^2$ под действием уравнения (3), имеет рациональный первый интеграл.

При $k = \pm 2$ группа монодромии уравнения

$$\ddot{\xi} + \lambda \phi^{k-2}(t)\xi = 0 \quad (4)$$

имеет линейный или квадратичный первый интеграл [7] (при $k = 2$ это очевидно; см. также ниже).

ТЕОРЕМА 3. Для существования у группы монодромии уравнения (4) рационального первого интеграла необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий: при $k = \pm 3$ и $m \in \mathbb{Z}$

$$\lambda = (mk - 1)(2m - 1), \quad (5)$$

$$\lambda = m(2mk - k + 2), \quad (6)$$

$$\lambda = \frac{1}{8k}[(2m + 1)^2 k^2 - (k - 2)^2], \quad (7)$$

$$\lambda = \frac{1}{8k} \left[4k^2 \left(m + \frac{1}{3} \right)^2 - (k - 2)^2 \right], \quad (8)$$

$$\lambda = \frac{1}{8k} \left[4k^2 \left(m + \frac{2}{5} \right)^2 - (k - 2)^2 \right], \quad (9)$$

$$\lambda = \frac{1}{8k} \left[4k^2 \left(m + \frac{1}{4} \right)^2 - (k - 2)^2 \right], \quad (10)$$

$$\lambda = \frac{1}{8k} \left[4k^2 \left(m + \frac{1}{5} \right)^2 - (k - 2)^2 \right]; \quad (11)$$

при $k = \pm 4$ – одного из условий (5)–(8); при $k = \pm 5$ – одного из условий (5)–(9); при $|k| > 5$ – одного из условий (5)–(7); при $k = \pm 1$ – условия (5).

СЛЕДСТВИЕ [8, теорема 5.1]. Если система (1) имеет в какой-либо области, содержащей фазовую кривую Γ , n функционально независимых мероморфных первых интегралов в инволюции, то каждое из чисел $\lambda = \lambda_i$ удовлетворяет одному из условий (5)–(11).

ЗАМЕЧАНИЕ. В [5], [6] указаны необходимые условия существования полиномиального первого интеграла группы монодромии уравнения (4) при $k \neq 0, \pm 2$. При $k = \pm 1$ условия [5] совпадают с (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. При $k \neq 0$ уравнение (4) эквивалентно гипергеометрическому уравнению [5]

$$z(1-z)\frac{d^2\xi}{dz^2} + (c - (a+b+1)z)\frac{d\xi}{dz} - ab\xi = 0, \quad (12)$$

где

$$z = (\phi(t))^k, \quad a+b = \frac{1}{2} - \frac{1}{k}, \quad ab = -\frac{\lambda}{2k}, \quad c = 1 - \frac{1}{k}.$$

Группа монодромии уравнения (4) совпадает с подгруппой группы монодромии уравнения (12), порожденной петлями, обходящими точку $z = 0$ число раз, кратное k , а точку $z = 1$ – четное число раз [5]. Эта подгруппа имеет конечный индекс, следовательно, числа функционально независимых рациональных первых интегралов групп монодромии уравнений (4) и (12) совпадают.

При $a+b-c \notin \mathbb{Z}$ группа монодромии G уравнения (12) в соответствующем базисе имеет образующие [9, п. 15.93]

$$g_1 = \begin{pmatrix} \frac{AB}{C} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_0 = \begin{pmatrix} C - \frac{(A-1)(B-1)}{AB/C-1} & \beta \\ \gamma & 1 + \frac{(A-1)(B-1)}{AB/C-1} \end{pmatrix},$$

где

$$\beta\gamma = -\frac{(A-1)(B-1)(A-C)(B-C)}{C(AB/C-1)^2},$$

$$A = \exp(-2\pi ia), \quad B = \exp(-2\pi ib), \quad C = \exp(-2\pi ic).$$

Из теоремы 1 п. 1 следует, что при $k \neq \pm 2$ эта группа имеет рациональный первый интеграл тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

- 1) преобразование g_0 сохраняет одну из собственных прямых преобразования g_1 ;
- 2) преобразование g_1 переставляет пару собственных прямых преобразования g_0 ;
- 3) группа G конечна.

Условие 1) эквивалентно условию $\beta\gamma = 0$, т.е. совокупности условий $A = C, B = C, A = 1, B = 1$ или, что то же, условий (5), (6). При $k = \pm 1$ эти условия между собой совпадают.

Условие 2) при $k = \pm 1$ выполняется только при $\beta = \gamma = 0$. При $k \neq \pm 1$ оно эквивалентно условию Трасе $g_0g_1 = A + B = 0$ или, что то же, условию (7).

При $\beta\gamma \neq 0$, как следует из таблицы Шварца [9]–[11], случаев интегрируемости гипергеометрического уравнения в алгебраических функциях или, что то же, случаев конечности его группы монодромии, условие 3) выполняется только в следующих случаях:

$$\pm(a-b) = \frac{1}{2} + m, \quad m \in \mathbb{Z},$$

что эквивалентно условию (7);

$$|k| = 3, 4, 5 \quad \text{и} \quad \pm(a-b) = \frac{1}{3} + m, \quad m \in \mathbb{Z},$$

что эквивалентно условию (8);

$$|k| = 3, 5 \quad \text{и} \quad \pm(a-b) = \frac{2}{5} + m, \quad m \in \mathbb{Z},$$

что эквивалентно условию (9);

$$|k| = 3 \quad \text{и} \quad \pm(a-b) = \frac{1}{4} + m, \quad m \in \mathbb{Z},$$

что эквивалентно условию (10); или

$$\pm(a-b) = \frac{1}{5} + m, \quad m \in \mathbb{Z},$$

что эквивалентно условию (11). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из приведенного доказательства следует независимое доказательство существования квадратичного первого интеграла группы монодромии уравнения (4) при $k = \pm 2$. Действительно, при этих значениях k преобразования g_0, g_1 сохраняют объединение собственных прямых преобразования $g_0 g_1$. Если таких прямых больше двух, то они сохраняют объединение двух, откуда следует высказанное утверждение.

3. Задача Суслова. Рассмотрим задачу Суслова [12] о движении твердого тела около неподвижной точки с неголономной связью – проекция кинетического момента на направление, неподвижное в системе координат, связанной с телом, равна нулю – в случае [13], когда это направление совпадает с направлением одной из главных осей инерции в точке подвеса, тело находится в однородном поле тяжести и центр тяжести лежит на указанной оси.

Как показано в [13], в этом случае ограничение системы на поверхность уровня h интеграла энергии эквивалентно ограничению системы с гамильтонианом

$$F = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + V, \quad V = \frac{1}{2} \left(h - \frac{q_1^2}{2I_1} - \frac{q_2^2}{2I_2} \right)^2,$$

(здесь I_1, I_2 – моменты инерции тела относительно двух других главных осей инерции в точке подвеса) на поверхность S уровня гамильтониана $F = \mu^2/2$, где μ – параметр Пуанкаре – произведение веса тела на расстояние от центра тяжести до точки подвеса.

Как показано в [14], если хотя бы одно из чисел $\sqrt{1+8\alpha}$, $\sqrt{1+8/\alpha}$, где $\alpha = I_1/I_2$, иррационально, то при $h = 0$ ограничение системы с гамильтонианом F на поверхность S не имеет (непостоянного) мероморфного первого интеграла.

ТЕОРЕМА 4. *Ограничение системы с гамильтонианом F на поверхность S имеет мероморфный первый интеграл только в случае $\alpha = 1$ (аналоге случая Лагранжа движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки без дополнительных связей).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначения: $p = (p_1, p_2)$, $q = (q_1, q_2)$, $D = \{(p, q) \in \mathbb{C}^4 \mid F(p, q) \notin \overline{\mathbb{R}}^-\}$, где $\overline{\mathbb{R}}^-$ – замыкание отрицательной части вещественной оси. Выберем единицы измерения так, что $\mu = \sqrt{2}$. Рассмотрим ретракцию $r: D \rightarrow S$, $r: (p, q) \mapsto (p/\sqrt{H}, q/H^{1/4})$. Предположим, что ограничение системы с гамильтонианом F на поверхность S имеет непостоянный мероморфный первый интеграл f . Тогда в области D она имеет мероморфный первый интеграл $f \circ r$, функционально независимый от F .

Уравнение $\partial V/\partial q(c) = c$ имеет решение $c = (c_1, c_2)$, $c_1 = \sqrt{2}I_1$, $c_2 = 0$. Собственные значения матрицы $\partial^2 V/\partial q^2(c)$ равны 3 и $1/I_2 = \alpha$. Из следствия, приведенного в п. 2, получаем, что $\alpha = m/72$, где m целое. Аналогично $1/\alpha = n/72$, где n целое, следовательно, $72^2 \mid m$, откуда $\alpha = \pm 2^k 3^l$, где k, l целые, $|k| \leq 3$, $|l| \leq 2$. При всех таких значениях α , кроме $\alpha = 1$, хотя бы одно из чисел $\sqrt{1+8\alpha}$, $\sqrt{1+8/\alpha}$ иррационально. Теорема доказана.

Автор глубоко благодарен Д. В. Аносову, Ю. С. Ильяшенко, В. В. Козлову, А. И. Нейштадту и А. И. Овсевичу за полезные обсуждения и Ж. Ж. Моралесу-Руизу за присланную книгу [8] и любезные разъяснения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Churchill R. C., Rod D. L. On the determination of Ziglin monodromy groups // SIAM J. Math. Anal. 1991. V. 22. № 6. P. 1790–1802.
- [2] Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. М.: Наука, 1986.
- [3] Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Т. 1. М.–Л.: ОНТИ, 1937.
- [4] Форд Р. Автоморфные функции. М.–Л.: ОНТИ, 1936.
- [5] Yoshida H. A criterion for non-existence of an additional integral in Hamiltonian systems with homogeneous potential // Phys. D. 1987. V. 29. № 1, 2. P. 128–142.
- [6] Yoshida H. A criterion for non-existence of an additional analytic integral in Hamiltonian systems with n degrees of freedom // Phys. Lett. A. 1989. V. 141. № 3, 4. P. 108–112.
- [7] Зиглин С. Л. Об интегралах в инволюции групп линейных симплектических преобразований и натуральных механических систем с однородным потенциалом // Функцион. анализ и его прилож. 2000. Т. 34. № 3. С. 26–36.
- [8] Morales-Ruis J. J. Differential Galois Theory and Non-Integrability of Hamiltonian Systems. Progress in Math. V. 179: Birkhäuser, 1999.
- [9] Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: ОНТИ, 1939.
- [10] Бейтмен Г., Эрдейи Ф. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973.
- [11] Арнольд В. И., Ильяшенко Ю. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 1. М.: ВИНТИ, 1985. С. 7–149.
- [12] Суслов Г. К. Теоретическая механика. М.–Л.: Гостехиздат, 1946.
- [13] Козлов В. В. К теории интегрирования уравнений неголономной механики // Успехи механики. 1985. Т. 8. № 3. С. 85–107.
- [14] Зиглин С. Л. Об отсутствии дополнительного первого интеграла в одной задаче динамики твердого тела // Докл. АН СССР. 1987. Т. 292. № 4. С. 804–807.