Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Д. Кан, Проблема Фробениуса для классов полиномиальной разрешимости, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 6, 845–853

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm797>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 13:02:12

УДК 511.216+511.218

ПРОБЛЕМА ФРОБЕНИУСА ДЛЯ КЛАССОВ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ

И. Д. Кан

Проблема Фробениуса состоит в нахождении способа (= алгоритма) вычисления наибольшей “суммы денег”, которую нельзя выдать монетами, имеющими взаимно простые достоинства $b_0, b_1, \dots, b_w$. В качестве приемлемых (алгоритмов) решений принято рассматривать полиномиальные, названные так по форме зависимости затрат времени от длины исходной информации. О трудности проблемы Фробениуса говорит тот факт, что вопрос о существовании полиномиального решения уже для $w = 3$ остается открытым. В настоящей статье выделяются некоторые классы аргументов, на которых проблема решается полиномиально; между тем, рассуждения в духе теории сложности алгоритмов сведены к минимуму.

Библиография: 9 названий.

Настоящая работа посвящается моему учителю профессору Н.М. Коробову в знак глубокой признательности и по случаю его дня рождения.

1. Введение. Для всякой конечной последовательности натуральных чисел $B = \{b_0, b_1, \dots, b_w\}$ ($w \geq 1$) через $\langle B \rangle$ обозначим множество значений линейной формы

$$\chi_B(u_0, u_1, \dots, u_w) = b_0 u_0 + b_1 u_1 + \dots + b_w u_w$$

от целых неотрицательных переменных $u_0, u_1, \dots, u_w$. Если элементы последовательности B взаимно просты (в совокупности), то *проблема Фробениуса* состоит в нахождении наибольшего целого числа $g(B)$, не принадлежащего множеству $\langle B \rangle$. Таким образом,

$$g(B) = \max(\mathbb{Z} \setminus \langle B \rangle).$$

Как правило, проблему Фробениуса рассматривают на бесконечных классах $\mathfrak{B}$ последовательностей B . Говоря упрощенно, алгоритм решения проблемы называется *полиномиальным* на классе $\mathfrak{B}$, если найдется полином $P(t)$ такой, что для любого набора $B \in \mathfrak{B}$ входных параметров $b_0, b_1, \dots, b_w$ время работы этого алгоритма не превосходит величины $P(\sum_{i=0}^w (\log_2 b_i + 1))$. Полиномиальные алгоритмы считаются достаточно быстрыми, т.е. приемлемыми для использования. Хотя надежда на полиномиальную разрешимость проблемы Фробениуса в целом вряд ли оправдана (Шевченко [1], там же –

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00492.

точное определение полиномиальности алгоритма), для отдельных классов последовательностей такие решения известны: например, алгоритм Джонсона [2] для $w = 2$ или алгоритм Рёдсета [3] для случая, когда $B \setminus \{b_w\}$ – арифметическая прогрессия.

В [4] проблема Фробениуса решена полиномиально на классе *цепных* последовательностей $D = \{d_0, d_1, \dots, d_k\}$ ($k \geq 1$), т.е. таких, что все отношения

$$r_D(j) = \frac{d_{j-1} + d_{j+1}}{d_j}, \quad j = 1, 2, \dots, k-1,$$

целые. Важную роль в исследовании множества $\langle D \rangle$ играют следующие объекты:

1) цепная дробь

$$\varepsilon_D = 1 / (r_D(1) - 1 / (r_D(2) - \dots - 1 / r_D(k-1)) \dots)$$

со знаменателем $q_D \in \mathbb{N}$ своего несократимого представления;

2) число $\rho_D = d_1 - \varepsilon_D d_0$ со свойством (см. [4, лемма 2])

$$\rho_D = \frac{d_k}{q_D} > 0;$$

3) функция

$$x_D(y) = d_1 y - d_0 [\varepsilon_D y] = \rho_D y + d_0 \{\varepsilon_D y\}$$

аргумента $y \in \mathbb{Z}$, где для $\alpha \in \mathbb{R}$ используются обозначения

$$[\alpha] = \max\{a \in \mathbb{Z} \mid a \leq \alpha\}, \quad \{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$$

– целая и дробная части.

Считаем, что при $k = 1$ по определению $\varepsilon_D = 0$, $q_D = 1$.

Пусть множество B представимо в виде

$$B = \{b_0\} \cup A \cup C, \tag{1}$$

где A и C – цепные последовательности, $A = \{a_0, a_1, \dots, a_m\}$, $C = \{c_0, c_1, \dots, c_n\}$, удовлетворяющие условиям

$$a_0 \equiv c_0 \equiv 0 \pmod{b_0}, \quad m \geq 1, \quad n \geq 1, \quad \text{НОД}(b_0, a_1, c_1) = 1. \tag{2}$$

Тогда последовательность B назовем *почти цепной*.

Можно показать, что *проблема Фробениуса на классе почти цепных последовательностей не проще, чем для произвольных пяти аргументов*. Рассуждение состоит в превращении пятиэлементной последовательности в почти цепную путем добавления к ней некоторого количества *фиктивных* (зависимых) аргументов.

Цель настоящей работы – вычислить или оценить величину $g(B)$ при выполнении условий (1), (2).

2. Основные обозначения. Определим числа P_{-1} и P_0 , s_{-1} и s_0 условиями

$$\begin{aligned} P_{-1} &= 0, & P_0 &= \text{НОД}(b_0, a_1), \\ s_{-1} &= \frac{b_0}{P_0}, & \frac{s_0 a_1}{P_0} &\equiv c_1 \pmod{s_{-1}}, & 0 \leq s_0 < s_{-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Рассматривая (3) как начальные условия, далее цепные последовательности $\{P_j\}$ и $\{s_j\}$ определим алгоритмом Евклида в форме Рёдсета [3], положив

$$s_{j+1} = - \left[-\frac{s_{j-1}}{s_j} \right] s_j - s_{j-1}, \quad P_{j+1} = - \left[-\frac{s_{j-1}}{s_j} \right] P_j - P_{j-1}$$

для $j = 0, 1, \dots$, пока $s_j \neq 0$. Монотонность последовательностей $\{P_j\}$ и $\{s_j\}$, как и в [3], доказывает убывание по j их линейной комбинации

$$R_j = \rho_A s_j - \rho_C P_j \quad (4)$$

и единственность индекса v , корректно определенного условием

$$R_{v+1} \leq 0 < R_v. \quad (5)$$

Вычисление s_v, s_{v+1}, P_v и P_{v+1} можно сделать полиномиальным, аналогично теореме 3 из [5], что дает полиномиальность вычисления величины

$$g_2 = \max(x_A(s_v - s_{v+1} - 1) + x_C(P_{v+1} - 1), x_A(s_v - 1) + x_C(P_{v+1} - P_v - 1)) - b_0.$$

Пусть V_G – множество вершин многоугольника $G \subseteq \mathbb{R}^2$, определенного системой неравенств

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lambda_1 \leq 1, & 0 &\leq \lambda_2 \leq 1, \\ \lambda_1 a_0 \{-\varepsilon_A s_v\} + \lambda_2 c_0 \{\varepsilon_C P_v\} &< R_v, \\ \lambda_1 a_0 \{\varepsilon_A s_{v+1}\} + \lambda_2 c_0 \{-\varepsilon_C P_{v+1}\} &\leq -R_{v+1} \end{aligned} \quad (6)$$

в переменных $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Тогда $(0, 0) \in G$ ввиду (5) и $|V_G| \leq 6$, где $|K|$ – количество элементов конечного множества K .

Для всякого непустого $\Pi \subseteq (G \cup V_G)$ положим

$$\mathcal{H}(\Pi) = b_0 \min_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Pi} \left[\frac{(1 - \lambda_1)a_0(1 - 1/q_A) + (1 - \lambda_2)c_0(1 - 1/q_C)}{b_0} \right].$$

Тогда, как известно из линейного программирования, $\mathcal{H}(G) = \mathcal{H}(V_G)$.

3. Основные результаты.

ТЕОРЕМА 1. На классе почти цепных последовательностей B существует полиномиальный алгоритм вычисления величины $g_1 = g_1(B)$ такой, что

$$0 \leq g_1 - g(B) \leq \mathcal{H}(V_G) < a_0 + c_0; \quad (7)$$

в частности, если выполнены условия

$$a_0 = \min\{a_0, a_1, \dots, a_{m-1}\}, \quad c_0 = \min\{c_0, c_1, \dots, c_{n-1}\}, \quad (8)$$

то оценка (7) имеет место при $g_1 = g_2$.

ТЕОРЕМА 2. Каждое (по отдельности) из условий

$$\min(R_v, -R_{v+1}) > a_0 + c_0 - b_0 - \frac{a_0}{q_A} - \frac{c_0}{q_C}, \quad (9)$$

$$\min(mc_0, na_0) = b_0 \quad (10)$$

является достаточным для выполнения равенства $\mathcal{H}(V_G) = 0$ и, следовательно, выделяет в классе почти цепных последовательностей B подкласс, на котором величина $g(B)$ полиномиально вычислима.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть выполнены соотношения $b_0 = a_0 < a_1$ и $r_A(1) = r_A(2) = \dots = r_A(m-1) = 2$, $n = 1$. Тогда алгоритм вычисления величины $g(B) = g_2$ из теоремы 1 в целом совпадает с алгоритмом Рёдсета [3]. Исключение составляет выбор параметров (3), позволяющий избежать процедуры из [3], сводящей задачу к случаю НОД(a_0, a_1) = 1.

4. Вспомогательные утверждения. В общем подходе к вычислению $g(B)$ используется формула Брауэра и Шокли [6]

$$g(B) = \max\{t_l \mid l \in L\} - b_0, \quad (11)$$

где $L = \{0, 1, \dots, b_0-1\}$, а число $t_l \in \langle B \setminus \{b_0\} \rangle$ минимальное, сравнимое с l по модулю b_0 . В нашем случае ввиду (1)

$$t_l = \min\{a + c \mid a \in \langle A \rangle, c \in \langle C \rangle, a + c \equiv l \pmod{b_0}\}. \quad (12)$$

Следующее описание $\langle A \rangle$, по-существу, содержится в [4, леммы 1–5] (в других терминах).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Принадлежность $a \in \langle A \rangle$ равносильна существованию целых неотрицательных чисел u и y таких, что

$$a = x_A(y) + ua_0.$$

Для любых $y, z \in \mathbb{Z}$ и $l \in L$ определим соответственно функцию σ и множество Ω_l , положив

$$\sigma(y, z) = x_A(y) + x_C(z), \quad (13)$$

$$\Omega_l = \{(y, z) \in \mathbb{Z}^2 \mid y \geq 0, z \geq 0, \sigma(y, z) \equiv l \pmod{b_0}\}. \quad (14)$$

Тогда из определения x_D ($D = A, C$) и сравнений в (2) следует, что сравнение в (14) равносильно сравнению

$$a_1 y + c_1 z \equiv l \pmod{b_0}. \quad (15)$$

ЛЕММА 1. Имеет место равенство

$$g(B) = \max_{l \in L} (\min\{\sigma(y, z) \mid (y, z) \in \Omega_l\}) - b_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $l \in L$ и $t_l = a + c$, как в (12). Тогда ввиду сравнений в (2) и минимальности t_l имеем $a - a_0 \notin \langle A \rangle$, $a \in \langle A \rangle$. Отсюда ввиду предложения 1 $a = x_A(y)$, $y \geq 0$. Аналогично, $c = x_C(z)$, $z \geq 0$. Так что

$$t_l = x_A(y) + x_C(z) = \sigma(y, z), \quad y \geq 0, \quad z \geq 0,$$

и (12) перепишется в виде

$$t_l = \min\{\sigma(y, z) \mid (y, z) \in \Omega_l\}.$$

Ввиду формулы (11) лемма доказана.

Главная трудность мини-, максимизации функции σ – ее “негладкость”. Для сглаживания фиксируем произвольное $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) \in G$ и выделим в σ “гладкую” составляющую τ , положив для любых $y, z \in \mathbb{Z}$

$$\tau(y, z) = \rho_A y + \rho_C z + \lambda_1 a_0 \{\varepsilon_A y\} + \lambda_2 c_0 \{\varepsilon_C z\}.$$

Тогда из определения x_D ($D = A, C$) следует, что

$$\sigma(y, z) = \tau(y, z) + (1 - \lambda_1)a_0\{\varepsilon_A y\} + (1 - \lambda_2)c_0\{\varepsilon_C z\}. \quad (16)$$

Для каждого $l \in L$ определим пару $(y_l, z_l) \in \Omega_l$ (формально зависящую от выбора $\bar{\lambda}$). Именно, пусть пара (y_l, z_l) та (или любая из тех), что обладает (-ют) минимальной второй компонентой $z = z_l$ среди всех тех пар (y, z) , на которых достигается минимум функции $\tau(y, z)$ по множеству Ω_l .

ЛЕММА 2. Если выбранное $\bar{\lambda} \in G$ удовлетворяет условию $\mathcal{H}(\{\bar{\lambda}\}) = \mathcal{H}(V_G)$, то

$$0 \leq \max\{\sigma(y_l, z_l) \mid l \in L\} - b_0 - g(B) \leq \mathcal{H}(V_G). \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если для $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ число $\alpha + \beta$ целое, то $\alpha + \beta = -[-\alpha] + [\beta]$. В частности, для $(y, z) \in \Omega_l$ ввиду (14) и (16)

$$\sigma(y, z) = f(y, z, l) + F(y, z), \quad (18)$$

где

$$f(y, z, l) = l - b_0 \left\lfloor \frac{l - \tau(y, z)}{b_0} \right\rfloor, \quad F(y, z) = b_0 \left\lfloor \frac{(1 - \lambda_1)a_0\{\varepsilon_A y\} + (1 - \lambda_2)c_0\{\varepsilon_C z\}}{b_0} \right\rfloor.$$

Поскольку

$$0 \leq \{\varepsilon_A y\} \leq 1 - \frac{1}{q_A}, \quad 0 \leq \{\varepsilon_C z\} \leq 1 - \frac{1}{q_C}, \quad (19)$$

то

$$0 \leq F(y, z) \leq \mathcal{H}(\{\bar{\lambda}\}) = \mathcal{H}(V_G).$$

Поэтому из (18) имеем

$$\begin{aligned} \sigma(y_l, z_l) &\geq \min_{(y, z) \in \Omega_l} \sigma(y, z) \geq \min_{(y, z) \in \Omega_l} f(y, z, l) \\ &= f(y_l, z_l, l) = \sigma(y_l, z_l) - F(y_l, z_l) \geq \sigma(y_l, z_l) - \mathcal{H}(V_G). \end{aligned}$$

Максимизируя формально по $l \in L$, получаем отсюда ввиду леммы 1 неравенство (17). Лемма доказана.

Для максимизации величин $\sigma(y_l, z_l)$ оценим сверху их аргументы, а снизу, предварительно, – некоторые приращения функции τ , положив

$$\psi = -\tau(-s_v, P_v), \quad \varphi = -\tau(s_{v+1}, -P_{v+1}).$$

Тогда из (4) и (6) следует, что $\psi > 0$, $\varphi \geq 0$.

ЛЕММА 3. *Имеют место оценки*

$$\tau(y_l, z_l) - \tau(y_l - s_v, z_l + P_v) \geq \psi > 0, \quad (20)$$

$$\tau(y_l, z_l) - \tau(y_l + s_{v+1}, z_l - P_{v+1}) \geq \varphi \geq 0, \quad (21)$$

$$\tau(y_l, z_l) - \tau(y_l - s_v + s_{v+1}, z_l + P_v - P_{v+1}) \geq \psi + \varphi > 0. \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\{\alpha\} - \{\beta\} \geq -\{\beta - \alpha\}, \quad (23)$$

то ввиду определения τ для любых $y, z, Y, Z \in \mathbb{Z}$

$$\tau(y, z) - \tau(Y, Z) \geq -\tau(Y - y, Z - z).$$

Отсюда вытекают неравенства (20)–(22). Лемма доказана.

ЛЕММА 4 (почти по Рёдсету [3]). *Для любого $l \in L$ пара (y_l, z_l) удовлетворяет каждому из неравенств*

$$y_l < s_v, \quad z_l < P_{v+1}$$

и, кроме того, хотя бы одному из неравенств

$$y_l < s_v - s_{v+1}, \quad z_l < P_{v+1} - P_v.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сравнения

$$c_1 P_j \equiv a_1 s_j \pmod{b_0}, \quad j = -1, 0, 1, \dots, v+1,$$

доказываемые индукцией по j с базой (3), показывают ввиду (15), что при неотрицательности аргументов вычитаемого в каждой из разностей в (20)–(22) пара этих аргументов принадлежит Ω_l . Поэтому, предположив невыполнение утверждений леммы, приходим в противоречие с леммой 3. Действительно, строгое выполнение неравенств (20)–(22) теперь невозможно из-за минимальности $\tau(y_l, z_l)$, а вырождение нестрогого неравенства (21) в цепочку равенств – из-за минимальности z_l . Лемма доказана.

Чтобы показать далее полноту ограничений леммы 4 на пару (y_l, z_l) , ввиду чего последняя фактически не зависит от выбора $\bar{\lambda} \in G$, положим

$$A_1 = \{(y, z) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq y < s_v - s_{v+1}, 0 \leq z < P_{v+1}\},$$

$$A_2 = \{(y, z) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq y < s_v, 0 \leq z < P_{v+1} - P_v\},$$

$$T = \{\sigma(y_l, z_l) \mid l \in L\}, \quad S_i = \{\sigma(y, z) \mid (y, z) \in A_i\}, \quad i = 1, 2.$$

ЛЕММА 5. *Каково бы ни было значение $\bar{\lambda} \in G$, имеют место оценка (17) и равенство*

$$\max\{\sigma(y_l, z_l) \mid l \in L\} = \max(S_1 \cup S_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду леммы 2 достаточно доказать равенство $T = S_1 \cup S_2$. Для этого, почти цитируя Рёдсета [3], заметим следующее. Равенство

$$s_j P_{j+1} - s_{j+1} P_j = b_0, \quad j = -1, 0, 1, \dots, v,$$

проверяемое индукцией по j с базой (3), влечет

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2 \setminus A_1| = (s_v - s_{v+1})P_{v+1} + s_{v+1}(P_{v+1} - P_v) = b_0.$$

Поскольку ввиду леммы 4 $T \subseteq S_1 \cup S_2$, то

$$b_0 = |T| \leq |S_1 \cup S_2| \leq |A_1 \cup A_2| = b_0,$$

так что $T = S_1 \cup S_2$. Лемма доказана.

Через $\max A_i$ для $i = 1, 2$ обозначим пару $(y, z) \in A_i$, обе компоненты которой максимальны.

ЛЕММА 6. Из условий (8) следует, что

$$\max S_i = \sigma(\max A_i), \quad i = 1, 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду (13) достаточно доказать неубывание $x_A(y)$ ($x_C(y)$ – по аналогии). Если $r_A(j) \geq 2$ для всех $j = 1, 2, \dots, m-1$, то $[-\varepsilon_A] = [1/m - 1]$. Поскольку ввиду (8) $m = 1$ или $a_1 \geq a_0$, то ввиду неравенства (23)

$$x_A(y+1) - x_A(y) \geq -x_A(-1) = a_1 + a_0 \left[\frac{1}{m} - 1 \right] \geq 0$$

и неубывание $x_A(y)$ доказано.

Теперь все случаи равенства $r_A(j) = 1$ исключим индукцией по m . Именно, пусть $A(j) = \{a_0^{(j)}, a_1^{(j)}, \dots, a_{m-1}^{(j)}\}$ – результат вычеркивания из A одного любого некрайнего элемента a_j такого, что $r_A(j) = 1$. Тогда $A(j)$ – цепная последовательность, причем

$$a_0^{(j)} = a_0, \quad a_{m-1}^{(j)} = a_m, \quad \varepsilon_{A(j)} = \varepsilon_A - \left[\frac{1}{j} \right],$$

откуда

$$q_{A(j)} = q_A, \quad \{\varepsilon_{A(j)}\} = \{\varepsilon_A\}, \quad \rho_{A(j)} = \rho_A.$$

Следовательно, функция $x_A(y) = x_{A(j)}(y)$ не убывает по предположению индукции. Лемма доказана.

5. Доказательство теорем. Положим

$$g_1 = \max(S_1 \cup S_2) - b_0.$$

Тогда ввиду леммы 5 имеет место оценка (7). Величина g_1 полиномиально вычислима методами Ленстры [7] или Кай-Ман Цана [8]. При выполнении условий (8) для вычисления g_1 используется лемма 6, ввиду которой $g_1 = g_2$, что завершает доказательство теоремы 1.

При выполнении (9) из оценок (19) следует существование числа μ такого, что $(\mu, \mu) \in G$ и $\mathcal{H}(\{\mu, \mu\}) = 0$. Далее, равенство (10) означает, что $m = c_0/b_0 = 1$ или $n = a_0/b_0 = 1$. Взяв для определенности первый случай, найдем, что

$$\varepsilon_A = 0, \quad (1, 0) \in G, \quad \mathcal{H}(\{1, 0\}) = 0.$$

Поэтому теорема 2 следует из теоремы 1. Теоремы доказаны.

6. Следствия.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если натуральные числа a и b удовлетворяют неравенствам $b < a$, $a + 1 \geq (1 - b)[-a/b]$, то имеет место равенство

$$\begin{aligned} g(a, a + 1, a + 2, a + b, a + 2b) &= (a + b) \left[\frac{a - 1}{b} \right] + ab - 2a - 1 \\ &- \min \left(-b + (ab + b) \left\{ -\frac{a}{b} \right\} + a \left[\frac{a - 1}{2b} \right] + a \left[\frac{b\{(a - 1)/b\}}{2} \right], \right. \\ &\quad \left. a \left[\frac{b + 1}{2} \right] + a \left[\frac{a - 1 - b}{2b} \right] \right). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Если натуральные числа a и b удовлетворяют неравенствам $2 \leq b < a$, $2a + 3 \geq (3 - 2b)[-a/b]$, то имеет место равенство

$$\begin{aligned} g(a, a + 1, 2a + 3, a + b) &= (a + b) \left[\frac{a - 1}{b} \right] + ab - 2a - 1 \\ &- \min \left(-b + (ab + b) \left\{ -\frac{a}{b} \right\} + a \left[\frac{b\{(a - 1)/b\}}{3} \right], a \left[\frac{b + 2}{3} \right] \right). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть выполнены условия (8), $n = 1$, $a_0 \equiv 0 \pmod{c_1}$ и $\text{НОД}(c_1, a_1) = 1$. Тогда

$$g(\{c_1\} \cup A) = a_1 c_1 - a_1 - c_1 - a_0 [\varepsilon_A(c_1 - 1)]. \quad (24)$$

Аналогичный следствию 3 результат с заменой A на арифметическую прогрессию получен Селмером [9].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЙ. Аргументные множества из следствий 1, 2 очевидным образом представляются объединением B двух цепных последовательностей с общим элементом $a_0 = c_0 = b_0 = a$. Для следствий 1 и 2 выполняются соответственно условия (9) и (10) из теоремы 2, ввиду чего $\mathcal{H}(V_G) = 0$, а ввиду выполнения условия (8) из теоремы 1 $g(B) = g_2$. Дальнейшие вычисления не представляют сложности, поскольку $v \leq 0$. Следствия 1 и 2 доказаны.

Для доказательства следствия 3 положим $c_0 = b_0 = a_0$. Тогда, как и выше, ввиду (8) и (10) $g(B) = g_2$. Вычисления показывают, что

$$P_{v+1} = \frac{a_0}{c_1}, \quad s_{v+1} = 0, \quad s_v = c_1, \quad (25)$$

ввиду чего информация о величине P_v уже не является необходимой: подстановка значений (25) в определение g_2 дает формулу (24). Следствие 3 доказано.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Шевченко В. Н. Качественные вопросы целочисленного программирования. М.: Наука, 1995.
- [2] Johnson S. M. A linear diophantine problem // Canad. J. Math. 1960. V. 12. № 2. P. 390–398.
- [3] Rödset Ö. J. On a linear diophantine problem of Frobenius II // J. Reine Angew. Math. 1979. V. 307/308. P. 431–440.
- [4] Кан И. Д. Представление чисел линейными формами // Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 2. С. 210–216.
- [5] Кан И. Д. К проблеме Фробениуса // Фундаментальная и прикладная математика. 1997. Т. 3. № 3. С. 821–835.
- [6] Brauer A., Shockly J. E. On a problem of Frobenius // J. Reine Angew. Math. 1962. V. 211. № 3/4. P. 215–220.
- [7] Lenstra H. W. Integer programming with a fixed number of variables // Math. of Oper. Res. 1983. V. 8. № 4. P. 538–548.
- [8] Kai-Man Tsang. On a linear diophantine problem of Frobenius // Studia Scientiarum Math. Hungarica. 1988. V. 23. P. 443–452.
- [9] Selmer E. S. On the linear diophantine problem of Frobenius // J. Reine Angew. Math. 1977. V. 293/294. P. 1–17.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило

20.03.2000

Исправленный вариант

25.12.2000