Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Карасёв, Е. М. Новикова, Когерентные преобразования и неприводимые представления, соответствующие комплексным структурам на цилиндре и торе, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 6, 854–874

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm798>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 09:45:18

УДК 517

КОГЕРЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ КОМПЛЕКСНЫМ СТРУКТУРАМ НА ЦИЛИНДРЕ И ТОРЕ

М. В. Карасев, Е. М. Новикова

Рассматривается класс алгебр с нелиевскими перестановочными соотношениями, чьи симплектические листы являются поверхностями вращения: цилиндром или тором. Над каждой такой поверхностью вводится семейство комплексных структур и гильбертовых пространств антиголоморфных сечений, где реализуются неприводимые эрмитовы представления исходной алгебры. Воспроизводящие ядра этих пространств представляются через θ -функцию Римана и ее модификации. Они порождают квантовые кэлеровы структуры на поверхности и соответствующие квантовые воспроизводящие меры. Построены когерентные преобразования, сплетающие абстрактные представления алгебры с неприводимыми, и эти преобразования также выражены через θ -функцию.

Библиография: 31 название.

1. Введение. *Когерентное преобразование* – это линейное отображение, которое сплетает заданное представление алгебры или группы с некоторой неприводимой псевдодифференциальной моделью. Под псевдодифференциальной моделью понимается алгебра псевдодифференциальных операторов с символами на некотором симплектическом многообразии. Это многообразие мы называем *базой когерентного преобразования*.

Когерентное преобразование – важнейший аналитический и геометрический инструмент, связывающий объекты классической геометрии с квантовыми объектами. Причем эта связь устанавливается на уровне подстилающих векторных пространств (а не просто на уровне соответствия символ $\leftrightarrow$ оператор).

Интегральные ядра когерентных преобразований называются *когерентными состояниями*. В ином обличии такие состояния появились уже на заре квантовой механики в работах Шрёдингера, Гейзенберга, Фока и затем были осмыслены Клаудером [1] и Березиным [2], [3] с точки зрения теории квантования. Различные обобщения, приложения и ссылки на литературу о когерентных состояниях можно найти в [4], [5].

Данное выше определение когерентного преобразования весьма общее, оно охватывает, например, конструкции геометрического и асимптотического квантования [6]–[8]. Построение когерентных преобразований в таких широких рамках над произвольными базовыми многообразиями остается пока открытой проблемой.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 99-01-01047 и № 99-01-39128.

Важный частный класс когерентных преобразований соответствует *комплексным структурам* на базовом многообразии. Здесь имеется возможность реализовать псевдодифференциальную модель с помощью операторов Вика или Теплица. Такие операторы действуют в гильбертовом пространстве антиголоморфных сечений над базовым многообразием, и это пространство характеризуется своим *воспроизводящим ядром* (функцией Бергмана) [9]–[11]. Когерентное преобразование сплетает пространство антиголоморфных сечений с тем гильбертовым пространством, где задано исходное представление рассматриваемой алгебры.

Исторически первый пример когерентного преобразования для трехмерной алгебры Гейзенберга опирался именно на наличие комплексной структуры на базовом многообразии $\mathbb{R}^2$ (воспроизводящим ядром здесь служит гауссова экспонента, а когерентное преобразование Баргмана [12] сплетает представление Шрёдингера и представление Фока алгебры Гейзенберга).

В таких комплексных рамках когерентные преобразования были построены для ограниченных однородных областей в $\mathbb{C}^n$ и для некоторых иных кэлеровых многообразий [4], [13]–[15]. В неоднородном случае, когда отсутствует алгебра или группа Ли, а рассматриваются представления некоторых общих перестановочных соотношений, по поводу конструкции когерентных преобразований известно гораздо меньше (см., например, [16]–[24]).

В работе [23], где развивался подход [20], [21], были систематически изучены нелиевские алгебры, у которых комплексные когерентные преобразования имеют в качестве базового многообразия поверхности вращения (см. также обобщения в [19], [22]).

Было показано, что если базовая поверхность (или ее замыкание) топологически устроена как плоскость или сфера, то в качестве воспроизводящего ядра над ней может возникнуть произвольная гипергеометрическая или q -гипергеометрическая функция. Было установлено соответствие между такими специальными функциями, различными комплексными структурами на базовом многообразии и представлениями некоторого класса алгебр с нелиевскими перестановочными соотношениями. По отношению к этим алгебрам базовые многообразия служат неприводимыми листами.

В данной статье мы продолжаем исследование алгебр из работы [23], строим их когерентные состояния над базовыми многообразиями, диффеоморфными цилиндру и тору, и устанавливаем связь с t -функциями.

Подчеркнем, что построенное нами соответствие между комплексными структурами на поверхностях вращения и специальными функциями является универсальным и инвариантным (не зависит от выбора каких-либо базисов в рассматриваемых пространствах). Это отличает его от хорошо известных интерпретаций специальных функций как матричных элементов в теории представлений [25] (где важна именно фиксация базиса). Кроме того, отметим, что воспроизводящее ядро определяет над базовым многообразием квантовую кэлерову структуру и квантовую воспроизводящую меру, которые в неоднородном случае существенно отличаются от классической кэлеровой формы и классической меры Лиувилля. Таким образом, специальные функции (гипергеометрические и t -та) при этом подходе порождают новые геометрические объекты, играющие ключевую роль в квантовой геометрии поверхностей вращения.

Конечно, такое базовое многообразие как тор, из-за наличия на нем пары нестягиваемых 1-циклов, всегда естественно ассоциируется с некоммутативными дискретными группами; в частности, с дискретными подгруппами группы Гейзенберга, которые, как известно, тесно связаны с теорией t -функций [26]–[28]. Данное обстоятельство ис-

пользовалось в целом ряде работ, в том числе при изучении полноты когерентных состояний над элементарными ячейками плоскости [4] и в связи с вейлевским квантованием на торе [29]. Однако наши результаты существенно отличаются от перечисленных; в частности, тем, что мы ассоциируем неприводимые представления некоммутативной алгебры и тэта-функцию Римана, прежде всего, с цилиндром, на котором имеется только один цикл, а в случае тора наше соответствие дает уже произведение двух тэта-функций от двух различных аргументов¹.

Наконец, упомянем еще одно (иное) соответствие между специальными функциями и некоммутативными алгебрами, которое сопутствует уравнениям Янга–Бакстера и Книжника–Замолодчикова и связано с параметризацией множества перестановочных соотношений (структурных констант; см., например, [16], [30]).

Результаты данной работы частично были изложены в докладе одного из авторов на Евроконференции памяти М. Флато (Дижон, сентябрь 2000 г.; см. [31]), где приведено обсуждение с общих позиций квантовой геометрии и некоторые приложения. Первый из авторов признателен А. Вайнштейну, П. Картье и А. А. Кириллову за полезные замечания.

2. Перестановочные соотношения и поверхности вращения. Рассматривается некоммутативная алгебра с инволюцией и с эрмитовыми генераторами $\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{A}_1, \dots, \hat{A}_k$, удовлетворяющими некоторым перестановочным соотношениям. Для описания этих соотношений введем комплексные комбинации генераторов

$$\hat{B} = \hat{S}_1 - i\hat{S}_2, \quad \hat{C} = \hat{S}_1 + i\hat{S}_2.$$

Кроме того, фиксируем некоторую однопараметрическую группу преобразований

$$\Phi_t: \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}, \quad -\infty < t < \infty$$

(т.е. поток некоторого векторного поля). Координаты в $\mathbb{R}^{k+1}$ будем обозначать $A_0, A_1, \dots, A_k$ и будем объединять последние k координат обозначением $A = (A_1, \dots, A_k)$. Тогда Φ_t имеет вид

$$\Phi_t(A_0, A) = (\varphi_t^0(A_0, A), \varphi_t(A_0, A)). \quad (2.1)$$

Здесь φ_t^0 – скалярная функция (нулевая компонента Φ_t), а φ_t – вектор-функция со значениями в $\mathbb{R}^k$. При этом

$$\varphi_t^0(A_0, A)|_{t=0} \equiv A_0, \quad \varphi_t(A_0, A)|_{t=0} \equiv A. \quad (2.2)$$

Во все компоненты функции (2.1) вместо координат A_0, A можно подставлять эрмитовы элементы рассматриваемой алгебры. Мы постулируем следующие соотношения между генераторами алгебры:

$$\begin{aligned} \hat{C} \cdot \hat{B} &= \varphi_h^0(\hat{B}\hat{C}, \hat{A}), & \hat{C} \cdot \hat{A} &= \varphi_h(\hat{B}\hat{C}, \hat{A}) \cdot \hat{C}, & \hat{A}_j \cdot \hat{A}_l &= \hat{A}_l \cdot \hat{A}_j, \\ \hat{B}^* &= \hat{C}, & \hat{A}_j^* &= \hat{A}_j, \end{aligned} \quad (2.3)$$

¹Последнее коррелирует с гипотезой Склянина [16], которая, правда, относится к несколько иной ситуации.

где $\hbar > 0$ – некоторое фиксированное число, $j, l = 1, \dots, k$. При этом из второго соотношения (2.3) после сопряжения следует также, что

$$\hat{A} \cdot \hat{B} = \hat{B} \cdot \varphi_{\hbar}(\hat{B}\hat{C}, \hat{A}). \quad (2.4)$$

Заметим, что в силу (2.3), (2.4) элемент $\hat{B}\hat{C}$ коммутирует со всеми элементами $\hat{A} = (\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_k)$, и поэтому функции от $\hat{B}\hat{C}$ и $\hat{A}$ в правых частях (2.3), (2.4) определены корректно.

Формулы (2.2) показывают, что алгебра с соотношениями (2.3) является деформацией по параметру $\hbar$ коммутативной алгебры (которая соответствует $\hbar = 0$). Обратим внимание, что параметр $\hbar$ стоит в (2.3), (2.4) на месте аргумента “время” t ; таким образом, наша некоммутативная алгебра порождается “деформационным” потоком Φ_t . Похожая идея использовать $\hbar$ в качестве времени применена в [29] при выводе дифференциального уравнения для вейлевского *-произведения, но деформационный поток там не рассматривался.

Очевидно, классические элементы Казимира алгебры с соотношениями (2.3) (входящие в центр при любом $\hbar > 0$) имеют вид²

$$\varkappa(\hat{B}\hat{C}, \hat{A}), \quad (2.5)$$

где функция $\varkappa$ постоянна на траекториях потока Φ_t , т.е. $\varkappa(\Phi_t) = \varkappa$. Количество таких независимых функций $\varkappa$ равно k . Мы собираемся изучать операторно неприводимые представления алгебры (2.3). В каждом таком представлении все элементы Казимира являются скалярами, и мы получаем k соотношений

$$\varkappa_j(\hat{B}\hat{C}, \hat{A}) = \text{const}_j \cdot I, \quad j = 0, 1, \dots, k-1. \quad (2.6)$$

Можно вместо этих уравнений задать элементы $\hat{B}\hat{C}$ и $\hat{A}$ как функции от одного эрмитова элемента $\hat{t} = \hat{t}^*$:

$$\hat{B}\hat{C} = \varphi_t^0(a_0, a), \quad \hat{A} = \varphi_t(a_0, a), \quad (2.7)$$

где (a_0, a) – некоторая фиксированная точка в $\mathbb{R}^{k+1}$, удовлетворяющая условиям $a_0 \geq 0$ и $\varkappa_j(a_0, a) = \text{const}_j$, $j = 0, \dots, k-1$.

Квантовым соотношениям сопоставим классическую поверхность $\mathfrak{X} \subset \mathbb{R}^{k+2}$ с помощью уравнений (2.7) или (2.6), а именно,

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} &= \{BC = \varphi_t^0(a_0, a), \quad A = \varphi_t(a_0, a)\} \quad \text{или} \\ \mathfrak{X} &= \{\varkappa_j(BC, A) = \varkappa_j(a_0, a), \quad j = 0, \dots, k-1\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь $B \equiv \overline{C} \equiv S_1 - iS_2$. Поскольку $BC = S_1^2 + S_2^2$, то при каждом фиксированном t уравнения (2.8) задают в плоскости переменных S_1, S_2 окружность радиуса $\varphi_t^0(a_0, a)^{1/2}$, а при изменении t эти окружности заполняют поверхность вращения, вложенную в $\mathbb{R}^{k+2}$.

Геометрия поверхности зависит от свойств функции $\varphi_t^0(a_0, a)$. В случае $a_0 = 0$ если $\varphi_t^0(0, a) > 0$ при всех $t > 0$ или при всех $t < 0$, то замыкание поверхности $\mathfrak{X}$ топологически устроено как плоскость; если же $\varphi_t^0(0, a) > 0$ лишь при $0 < t < t_0$ и $\varphi_{t_0}^0(0, a) = 0$,

²Вообще говоря, центр алгебры (2.3) не исчерпывается такими элементами; см. ниже комментарий к условию квантования (3.12) и пример 5.1.

либо $\varphi_t^0(0, a) > 0$ при $-t_0 < t < 0$ и $\varphi_{-t_0}^0(0, a) = 0$, то замыкание поверхности $\mathfrak{X}$ топологически устроено как сфера (об этих случаях см. в [23]).

В данной работе нас будет интересовать случай $a_0 > 0$ и $\varphi_t^0(a_0, a) > 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Тогда $\mathfrak{X}$ – это либо цилиндр $\mathbb{S} \times \mathbb{R}$, вложенный в $\mathbb{R}^{k+2}$, либо если дополнительно имеется периодичность

$$\exists T: \quad \varphi_T^0(a_0, a) = a_0, \quad \varphi_T(a_0, a) = a, \quad (2.9)$$

то поверхность $\mathfrak{X}$ – это тор $\mathbb{T}^2$, вложенный в $\mathbb{R}^{k+2}$.

Мы построим неприводимые представления и когерентные состояния алгебры (2.3), соответствующие комплексным структурам на цилиндре или торе $\mathfrak{X} \subset \mathbb{R}^{k+2}$.

3. Представления и комплексные структуры. Введем еще одну эрмитову образующую $\hat{s} = \hat{s}^*$, которая имеет с $\hat{t}$ каноническое коммутационное соотношение $[\hat{t}, \hat{s}] = -i\hbar \cdot I$ и связана с $\hat{B}, \hat{C}$ формулами

$$\hat{B} = \mu(\hat{t}) \exp\{i\hat{s}\}, \quad \hat{C} = \exp\{-i\hat{s}\} \bar{\mu}(\hat{t}). \quad (3.1)$$

Здесь комплексная функция μ (задающая модуль B и C , а также начало отсчета аргумента s) подчинена условию

$$|\mu(t)|^2 = \mathcal{F}(t), \quad \text{где } \mathcal{F}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_t^0(a_0, a) > 0. \quad (3.2)$$

Таким образом, формулы (3.1) вводят на поверхности $\mathfrak{X}$ (2.8) координаты Дарбу. При этом по координате s поверхность 2π -периодична, т.е. s соответствует нестягиваемому циклу на $\mathfrak{X}$. Мы хотим ввести на $\mathfrak{X}$ комплексную структуру, используя координаты Дарбу.

Предположим, что оператор $\hat{t}$ удалось реализовать в виде оператора дифференцирования по некоторой комплексной координате, т.е. $\hat{t} = \hbar \partial / \partial \bar{z}$, $\bar{z} \in \mathbb{C}$. Тогда в пространстве функций от $\bar{z}$ имеется формальная реализация соотношений (2.3), (2.4) следующими операторами:

$$\hat{B} = \mathcal{B}(\hat{t}) \cdot \exp\{-\tau \hat{t} + \hat{\bar{z}}\}, \quad \hat{C} = \exp\{\tau \hat{t} - \hat{\bar{z}}\} \cdot \mathcal{C}(\hat{t}), \quad \hat{A} = \varphi_{\hat{t}}(a_0, a), \quad (3.3)$$

где $\hat{\bar{z}}$ – оператор умножения на $\bar{z}$, $\tau > 0$ – некоторая константа, а функции $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ подчинены условию

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{B}(t) \mathcal{C}(t). \quad (3.4)$$

Из (3.3) и (3.1) нетрудно получить формулу

$$\exp\{\hat{\bar{z}}\} = \exp\{\tau \hat{t} + g(\hat{t}) + i\hat{s}\}. \quad (3.5)$$

Здесь g – решение³ следующего уравнения:

$$\exp\left\{\frac{1}{\hbar} \int_{t-\hbar}^t g(t) dt\right\} = \nu(t), \quad \text{где } \nu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mu}{\mathcal{B}}. \quad (3.6)$$

³Имеется в виду регулярное при $\hbar \rightarrow 0$ решение; общее решение уравнения (3.6) допускает еще добавление произвольной $\hbar$ -периодической функции с нулевым средним.

Квантовое соотношение (3.5) позволяет связать комплексную координату $\bar{z}$ с координатами Дарбу t, s по формуле

$$\bar{z} = \tau t + g(t) + is. \quad (3.7)$$

Отображение, заданное этой формулой, будет взаимно однозначным, если

$$\tau > \tau_0, \quad \tau_0 \stackrel{\text{def}}{=} -\min_t \operatorname{Re}(g'(t)) < \infty. \quad (3.8)$$

Легко подсчитать, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tau + \operatorname{Re} g'(t)} \frac{\partial}{\partial t} - i \frac{\tau + \overline{g'(t)}}{\tau + \operatorname{Re} g'(t)} \frac{\partial}{\partial s} \right), \\ \omega_{\text{class}} &\stackrel{\text{def}}{=} dt \wedge ds = \frac{i}{2(\tau + \operatorname{Re} g')} d\bar{z} \wedge dz. \end{aligned} \quad (3.9)$$

ЛЕММА 3.1. Пусть выполнено условие (3.8), а в периодическом случае (2.9) пусть, кроме того, выполнено условие T -периодичности функции g' . Тогда формулы (3.9) задают на $\mathfrak{X}$ комплексную структуру и кэлерову форму.

Рассмотрим вначале случай, когда поверхность $\mathfrak{X}$ гомеоморфна цилиндру. Обеспечить оценку $\tau_0 < \infty$ (3.8) можно следующим образом. Обозначим через S_m класс гладких функций g на прямой, у которых производные $g^{(k)}$ имеют оценку

$$\exists r \leq m \quad \forall k \geq 1 \quad \exists c: \quad |g^{(k)}(t)| \leq c(1 + |t|)^{r-k}.$$

ЛЕММА 3.2. Пусть функция $\nu = \mu/\mathcal{R}$ такова, что $\nu'/\nu \in S_{-1}$. Тогда существует единственное решение $g \in S_1$ уравнения (3.6). Поскольку $g'(t)$ ограничена при $|t| \rightarrow \infty$, то оценка (3.8) выполнена при некотором τ_0 .

Приведем теперь явные формулы для решения уравнения (3.6). Предположим, что ν имеет асимптотику

$$\nu(t) = |t|^b e^{pt+l} (1 + O(t^{-1}))$$

при $t \rightarrow -\infty$ или при $t \rightarrow +\infty$. Тогда решение $g \in S_1$ уравнения (3.6) имеет вид

$$g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\hbar \frac{\nu'}{\nu}(t - k\hbar) + \frac{b}{k} - \hbar p \right) + \hbar \frac{\nu'}{\nu}(t) + l + b(\ln \hbar - \gamma) + p \left(t - \frac{\hbar}{2} \right)$$

или соответственно

$$g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\hbar \frac{\nu'}{\nu}(t + k\hbar) + \frac{b}{k} + \hbar p \right) + l + b(\ln \hbar - \gamma) + p \left(t + \frac{\hbar}{2} \right).$$

Здесь через γ обозначена постоянная Эйлера

$$\gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} - \ln m \right) = 0,577 \dots$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. При специальном выборе множителя $\mathcal{B} = \mu$ получаем $\nu = 1$ и $g = 0$. Этому случаю соответствует специальная комплексная структура

$$\bar{z} = \tau t + is, \quad \omega_{\text{class}} = \frac{i}{2\tau} d\bar{z} \wedge dz. \quad (3.7a)$$

Наоборот, произвольная комплексная структура вида (3.9) может быть получена по формулам (3.6) выбором подходящего множителя $\mathcal{B}$. Таким образом, семейство комплексных структур на $\mathcal{X}$ всегда задается выбором факторизации (3.4) нулевой компоненты $\mathcal{F}(t) = \varphi_t^0(a_0, a)$ траектории потока Φ_t .

Теперь покажем, что формальная операторная реализация (3.3) может быть превращена в настоящее неприводимое представление соотношений (2.3).

Для любой функции ν на прямой, не обращающейся в нуль, обозначим

$$\nu_l(n\hbar) = \begin{cases} \nu(\hbar)\nu(2\hbar) \cdots \nu(n\hbar), & n \geq 1, \\ 1, & n = 0, \\ \nu(0)^{-1}\nu(-\hbar)^{-1} \cdots \nu((n+1)\hbar)^{-1}, & n \leq -1. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию ν , заданную формулой (3.6), т.е. $\nu = \mu/\mathcal{B}$, и определим гильбертово пространство $\mathcal{L}_\nu$, состоящее из $2\pi i$ -периодических антиголоморфных функций на комплексной плоскости со следующей нормой:

$$\|\psi\| = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\nu_l(n\hbar)|^2 e^{\tau \hbar n^2} |\psi_n|^2 \right)^{1/2}, \quad \text{если } \psi(\bar{z}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_n e^{n\bar{z}}. \quad (3.10)$$

В условиях леммы 3.2 при выполнении неравенства $\tau > \tau_0$ (3.8) пространство $\mathcal{L}_\nu$ отождествляется с пространством антиголоморфных функций на цилиндре $\mathcal{X}$ с комплексной структурой (3.9).

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть условие периодичности (2.9) не выполнено (случай цилиндра). Тогда формулы (3.3) задают бесконечномерное операторно неприводимое представление соотношений (2.3) в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_\nu$ антиголоморфных функций на цилиндре. Различный выбор множителей $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ (и, тем самым, выбор комплексной структуры на цилиндре), а также различный выбор параметра τ приводит к эквивалентным представлениям.

Рассмотрим теперь случай тора. Пусть выполнено условие T -периодичности (2.9). Обратим внимание на то, что квантовая образующая $\hat{t}$ в неприводимом представлении имеет дискретный спектр, состоящий из чисел $n\hbar$, где n целое. Поэтому в периодическом случае разделяются два варианта: либо период T по классической координате t не кратен $\hbar$, т.е.

$$T \neq N\hbar \quad \text{ни при каком целом } N, \quad (3.11)$$

либо T кратен $\hbar$ и тогда условие $T = N\hbar$ можно записать в виде интеграла по тору (или по его конечнолистному накрытию):

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathcal{X}} \omega_{\text{class}} = N. \quad (3.12)$$

Поясним подробнее. Период T в (2.9) не предполагается минимальным. Обозначим через T_0 минимальный период. Тогда нерезонансный вариант (3.11) означает, что T_0 не

соизмерим с $\hbar$. Наоборот, в резонансном варианте $T_0 = N\hbar/m$, где N, m – взаимно простые целые. Тогда m -кратный период $T = mT_0$ удовлетворяет условию $T = N\hbar$, и при этом интеграл в (3.12) должен браться по m -листному накрытию тора $\mathfrak{X}$.

В нерезонансном варианте (3.11), по-прежнему, верна теорема 3.1, т.е. представление (3.3) операторно неприводимо. Подчеркнем, что это представление бесконечномерно, хотя оно соответствует компактному многообразию! Фигурирующий в теореме 3.1 цилиндр – это бесконечнолистное накрытие тора (бесконечная намотка происходит по направлению оси t).

В резонансном варианте (3.12) представление (3.3) в пространстве $\mathcal{L}_\nu$ будет векторно неприводимым, но уже не будет операторно неприводимым. Действительно, в этом случае, оператор $\hat{B}^N$ не является скалярным, но он коммутирует со всеми операторами представления. Для теории представлений такие “неклассические” операторы Казимира являются не совсем привычными объектами. Например, в работе [16], где впервые изучались неприводимые представления, соответствующие тора, эти операторы Казимира не были указаны. Подчеркнем, что в классическом пределе $\hbar \rightarrow 0$ таким элементам не соответствует никакая функция на пуассоновом многообразии, поскольку $B^N = B^{T/\hbar}$ не имеет предела при $\hbar \rightarrow 0$. Ниже помещен пример 5.1, где появляется этот эффект.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Комплексная структура на торе $\mathfrak{X}$ вводится по общим формулам (3.9), где g' теперь является T -периодической функцией. Функция μ в (3.2) также предполагается T -периодической, а множители $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ из (3.4) восстанавливаются по g и μ согласно формулам (3.6).

Обратная задача построения g по заданному множителю $\mathcal{B}$ или по функции $\nu = \mu/\mathcal{B}$ (задача, которую мы выше рассмотрели в непериодическом случае) здесь осложняется проблемой малых знаменателей в уравнении (3.6) вблизи резонанса $T \approx N\hbar$, а на самом резонансе $T = N\hbar$ появляются дополнительные условия ортогональности правой части некоторым Фурье-гармоникам.

Теперь мы рассмотрим *резонансный вариант* (3.12) и покажем, как построить операторно неприводимые представления соотношений (2.3) в этом случае. Прежде всего, заметим, что нормировкой $N\hbar$ -периодических функций $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ в (3.4) на подходящие константы можно добиться, чтобы равенство (3.4), по-прежнему, выполнялось и, одновременно,

$$|\nu_l(N\hbar)| = 1, \quad \sum_{n=1}^N \arg \mathcal{B}(n\hbar) = \alpha \pmod{2\pi}, \quad (3.13)$$

где α – заданное вещественное число.

Далее, введем некоторое гильбертово пространство функций над тором $\mathfrak{X}$. Комплексная координата z отождествляет тор с прямоугольником на комплексной плоскости

$$0 \leq \operatorname{Im} z < 2\pi, \quad 0 \leq \operatorname{Re} z < \tau T = \tau \hbar N.$$

Поскольку двояко-периодических с периодами $2\pi i$ и $\tau \hbar N$ антиголоморфных функций не существует (кроме констант), то используем квазипериодические функции. Рассмотрим следующие условия квазипериодичности:

$$\psi(\bar{z} + 2\pi i) = \psi(\bar{z}), \quad \psi(\bar{z} + \tau \hbar N) = \exp\left\{\frac{\tau \hbar}{2} N^2 + N\bar{z}\right\} \psi(\bar{z}). \quad (3.14)$$

Эти условия можно представить в виде

$$\exp\left\{\frac{2\pi i}{\hbar}\hat{t}\right\}\psi(\bar{z}) = \psi(\bar{z}), \quad \exp\left\{\frac{T}{\hbar}(\hat{z} - \tau\hat{t})\right\}\psi(\bar{z}) = \psi(\bar{z}).$$

Таким образом, квазипериодичность означает периодичность степеней экспонент от оператора рождения $\hat{z} - \tau\hat{t}$ и оператора $\frac{2\pi i}{\hbar}\hat{t}$.

Функции, удовлетворяющие условиям квазипериодичности, – это тэта-функции. Фиксируем одну из них, например,

$$\theta(\alpha, \varepsilon) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\{-\varepsilon n^2 + in\alpha\}, \quad \varepsilon > 0. \quad (3.15)$$

Тогда система (3.14) допускает решение $\psi(\bar{z}) = \theta(N\bar{z}/i, \tau\hbar N^2/2)$. Другие решения можно получить применением степеней экспоненты от оператора рождения $\exp\{n(\hat{z} - \tau\hat{t})\}$, $n = 0, 1, \dots, N-1$.

Таким образом, возникает следующее описание антиголоморфных функций, удовлетворяющих условиям (3.14):

$$\psi(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{N-1} \psi_n e^{n\bar{z}\theta} \left(\frac{N(\bar{z} - \tau\hbar n)}{i}, \frac{\tau\hbar N^2}{2} \right). \quad (3.16)$$

Определим их норму формулой

$$\|\psi\| = \left(\sum_{n=0}^{N-1} |\nu_i(n\hbar)|^2 e^{\tau\hbar n^2} |\psi_n|^2 \right)^{1/2}. \quad (3.17)$$

Полученное гильбертово пространство обозначим через $\mathcal{L}_\nu^N$. При выполнении условия (3.12) пространство $\mathcal{L}_\nu^N$ отождествляется с пространством антиголоморфных сечений над тором $\mathfrak{X}$.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть условие периодичности (2.9) выполнено при $T = N\hbar$, но не выполнено при $T = N'\hbar$ для любого целого $0 < N' < N$. Пусть T -периодические множители $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ в (3.4) удовлетворяют (3.13). Тогда формулы (3.3) задают N -мерное операторно неприводимое представление соотношений (2.3) в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_\nu^N$ антиголоморфных сечений на торе, причем

$$\hat{B}^N = \mathcal{F}_1(N\hbar)^{1/2} e^{i\alpha} \cdot I. \quad (3.18)$$

Числа N и α являются параметрами представления, т.е. разным парам (N, α) соответствуют неэквивалентные представления. Различный выбор множителей $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ (и, тем самым, выбор комплексной структуры на торе), а также разный выбор параметра τ приводит к эквивалентным представлениям.

Естественно задать вопрос: все ли неприводимые представления соотношений (2.3) охвачены данной конструкцией?

ТЕОРЕМА 3.3. Любое операторно неприводимое представление соотношений (2.3), для которого операторы $\widehat{B}\widehat{C}$ и $\widehat{A}_1, \dots, \widehat{A}_k$ имеют непустой точечный спектр, попадает в один из следующих классов:

- 1°) либо собственные значения $\widehat{B}\widehat{C}$ и $\widehat{C}\widehat{B}$ положительны, и тогда представление эквивалентно одному из указанных в теоремах 3.1 или 3.2; оно соответствует цилиндру или тору $\mathfrak{X}$;
- 2°) либо у $\widehat{B}\widehat{C}$ или $\widehat{C}\widehat{B}$ есть нулевое собственное значение, и тогда представление эквивалентно одному из указанных в [23]; оно соответствует плоскости или сфере $\mathfrak{X}$.

4. Воспроизводящие ядра и когерентные состояния. Гильбертово пространство антиголоморфных функций можно охарактеризовать его воспроизводящим ядром. Рассмотрим вначале случай цилиндра. Воспроизводящее ядро, отвечающее пространству $\mathcal{L}_\nu$, имеет вид $\mathcal{K}_\nu = \sum_n |e^{(n)}|^2$, где $\{e^{(n)}\}$ – любой ортонормированный базис в $\mathcal{L}_\nu$. Исходя из (3.10), выберем базис

$$e^{(n)}(\bar{z}) = \nu_1(n\hbar)^{-1} \exp\left\{-\frac{\tau\hbar n^2}{2} + n\bar{z}\right\}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.1)$$

Тогда для $\mathcal{K}_\nu$ получим ряд

$$\mathcal{K}_\nu(\bar{z}|z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|\nu_1(n\hbar)|^2} \exp\{-\tau\hbar n^2 + n(\bar{z} + z)\} = \theta_{|\nu|^2}\left(\frac{\bar{z} + z}{i}, \tau\hbar\right). \quad (4.2)$$

Здесь через θ_ρ мы обозначили модификацию тэта-функции

$$\theta_\rho(\alpha, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\rho!(n\hbar)} \exp\{-\varepsilon n^2 + in\alpha\} = \rho! \left(-i\hbar \frac{d}{d\alpha}\right)^{-1} \theta(\alpha, \varepsilon),$$

где θ – стандартная тэта-функция (3.15). Конечно, здесь и в (4.2) предполагаются выполненными оценки на ρ или $|\nu|$ на $\pm\infty$, обеспечивающие равномерную сходимость бесконечных рядов.

Отметим, что модифицированная тэта-функция θ_ρ , через которую выражается воспроизводящее ядро, может быть определена как единственное 2π -периодическое решение задачи

$$\exp\left\{i\left(2\varepsilon \frac{d}{d\alpha} + \alpha\right)\right\} y(\alpha) = \rho \left(-i\hbar \frac{d}{d\alpha}\right) y(\alpha), \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(\alpha) d\alpha = 1. \quad (4.3)$$

Кроме того, для θ известно мнимое преобразование Якоби:

$$\theta(\alpha, \varepsilon) = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \exp\left\{-\frac{\alpha^2}{4\varepsilon}\right\} \theta\left(\frac{i\pi\alpha}{\varepsilon}, \frac{\pi^2}{\varepsilon}\right),$$

которое порождает некоторое преобразование функции θ_ρ . Поэтому для воспроизводящего ядра (4.2) мы получаем тождество

$$\mathcal{K}_\nu(\bar{z}|z) = \sqrt{\frac{\pi}{\tau\hbar}} \exp\left\{\frac{(\bar{z} + z)^2}{4\tau\hbar}\right\} q_\nu(\bar{z} + z),$$

где

$$q_\nu(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left| \nu_! \left(\frac{x}{2\tau} + \hbar \frac{d}{dx} \right) \right|^{-2} \theta \left(\frac{\pi x}{\tau \hbar}, \frac{\pi^2}{\tau \hbar} \right).$$

Здесь мы используем функцию $\nu_!(t)$, определенную не только в точках решетки $t = n\hbar$, но и при произвольных комплексных t с помощью разностного уравнения

$$\nu_!(t + \hbar) = \nu(t + \hbar) \cdot \nu_!(t), \quad \nu_!(0) = 1$$

(аналог гамма-функции).

Обратим внимание, что функция $\nu_!$ сингулярно зависит от параметра деформации $\hbar$ и может быть выражена через решение g уравнения (3.6) по формуле

$$\begin{aligned} \nu_!(t) &= \exp \left\{ \frac{1}{\hbar} \int_0^t g(\tau) d\tau \right\} \\ &= \sqrt{\frac{\nu(t)}{\nu(0)}} \exp \left\{ \frac{1}{\hbar} \int_0^t \ln \nu(\tau) d\tau \right\} \prod_{k=1}^{\infty} \exp \left\{ \hbar^k b_{k+1} [(\ln \nu)^{(k)}(t) - (\ln \nu)^{(k)}(0)] \right\}, \end{aligned}$$

где b_k – числа Бернулли:

$$\frac{x}{1 - e^{-x}} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k b_k.$$

Более детальные формулы для $\nu_!(t)$ можно получить с использованием рядов для $g(t)$, указанных после леммы 3.2.

Построим теперь еще одну функцию

$$p_\nu(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left| \nu_! \left(\frac{x}{2\tau} - \hbar \frac{d}{dx} \right) \right|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi \hbar \tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{t^2}{\hbar \tau} \right\} |\nu_! \left(\frac{x + 2it}{2\tau} \right)|^2 dt. \quad (4.4)$$

Здесь и ниже мы предполагаем, что интеграл (4.4) сходится. К сожалению, в данный момент мы не можем указать общие достаточные условия на $\nu(t)$, гарантирующие сходимость. Однако в примерах она отслеживается (см., например, ниже пример 5.2).

Зададим с помощью функций q_ν и p_ν следующую меру на цилиндре $\mathfrak{X}$:

$$dm_\nu \stackrel{\text{def}}{=} (q_\nu p_\nu)(\bar{z} + z) \frac{d\bar{z} dz}{2\tau}.$$

ЛЕММА 4.1. Если функция p_ν допускает оценку

$$|p_\nu(x)| \leq c \exp \left\{ \frac{x^2}{4\hbar \tau} \right\} (1 + |x|)^{-1-\varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$, то норма в пространстве $\mathcal{L}_\nu$ (3.10) может быть представлена в интегральном виде

$$\begin{aligned} \|\psi\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{0 \leq \text{Im } z \leq 2\pi} |\psi(\bar{z})|^2 p_\nu(\bar{z} + z) \frac{\exp\{-(\bar{z} + z)^2 / (4\hbar \tau)\}}{\sqrt{4\pi \hbar \tau}} d\bar{z} dz \\ &= \frac{1}{2\pi \hbar} \int_{\mathfrak{X}} \frac{|\psi|^2}{\mathcal{K}_\nu} dm_\nu. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Последнее выражение в (4.5) – это общая геометрическая форма записи нормы в пространстве антиголоморфных сечений над кэлеровым многообразием $\mathfrak{X}$ с кэлеровой формой

$$\omega_\nu \stackrel{\text{def}}{=} i\hbar\bar{\partial}\partial(\ln \mathcal{K}_\nu) d\bar{z} \wedge dz. \quad (4.6)$$

Эту форму мы называем *квантовой кэлеровой формой*, а меру dm_ν в (4.5) – *воспроизводящей мерой*.

В частности, в специальном случае (3.7a), т.е. когда $\nu = 1$, мы получаем

$$q_1(x) = \theta\left(\frac{\pi x}{\tau\hbar}, \frac{\pi^2}{\tau\hbar}\right), \quad p_1(x) = 1.$$

В этом случае кэлерова форма $\omega = \omega_1$ и воспроизводящая мера $dm = dm_1$ на цилиндре $\mathfrak{X}$ задаются стандартной тэта-функцией

$$\omega = i\left(\frac{1}{2\tau} + \hbar\bar{\partial}\partial \ln \theta\left(\frac{\pi(\bar{z} + z)}{\tau\hbar}, \frac{\pi^2}{\tau\hbar}\right)\right) d\bar{z} \wedge dz, \quad dm = \theta\left(\frac{\pi(\bar{z} + z)}{\tau\hbar}, \frac{\pi^2}{\tau\hbar}\right) \frac{d\bar{z} dz}{2\tau}. \quad (4.7)$$

Конечно, в пределе $\hbar = 0$ эти квантовые геометрические объекты переходят в классическую форму и в классическую меру на цилиндре:

$$\omega_{\text{class}} = \frac{i}{2\tau} d\bar{z} \wedge dz, \quad dm_{\text{class}} = \frac{1}{2\tau} d\bar{z} dz.$$

Однако при $\hbar \neq 0$ квантовая кэлерова форма и квантовая мера существенно отличаются от классических, и, кроме того, квантовая воспроизводящая мера не совпадает с мерой Лиувилля, порожденной квантовой кэлеровой формой. Интересно, что это отличие экспоненциально мало:

$$\omega = \omega_{\text{class}} + O(e^{-\pi^2/(\tau\hbar)}), \quad dm = dm_{\text{class}} + O(e^{-\pi^2/(\tau\hbar)}), \quad \hbar \rightarrow 0.$$

И в завершение приведем формулу для когерентных состояний. *Исходным состоянием* (fiducial state) назовем вектор $\mathscr{P}^0$ в пространстве представления, на котором операторы $\hat{A}$ и $\hat{A}^0 = \hat{B}\hat{C}$ принимают значения a и a_0 (что соответствует началу отсчета $t = 0$), т.е.

$$\hat{A}\mathscr{P}^0 = a\mathscr{P}^0, \quad \hat{B}\hat{C}\mathscr{P}^0 = a_0\mathscr{P}^0, \quad \|\mathscr{P}^0\| = 1. \quad (4.8)$$

Заметим, что для представления (3.3) в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_\nu$ исходным состоянием служит единичная функция $\mathscr{P}^0(\bar{z}) \equiv 1 \in \mathcal{L}_\nu$. Далее, в силу (3.5), (3.6)

$$e^{n\bar{z}} = e^{n\hat{z}}1 = \nu_1(n\hbar) \exp\left\{\frac{n^2\tau\hbar}{2} + in\hat{s}\right\} \mathscr{P}^0.$$

Подставляя это в формулу (4.2) для $\mathcal{K}_\nu$, получим

$$\mathcal{K}_\nu = \sum_n \bar{\nu}_!(n\hbar)^{-1} \exp\left\{-\frac{\tau\hbar n^2}{2} + in\hat{s} + nz\right\} \mathscr{P}^0 = \theta_{\bar{\nu}}\left(\frac{z}{i} + \hat{s}, \frac{\tau\hbar}{2}\right) \mathscr{P}^0. \quad (4.9)$$

Эта формула задает когерентные состояния в пространстве $\mathcal{L}_\nu$. Если теперь рассмотреть абстрактное гильбертово пространство L , где действует некоторое представление алгебры (2.3), и определить исходное состояние $\mathscr{P}^0 \in L$ по формулам (4.8), а оператор $\hat{s}$ задать в L по формулам (3.1), то *когерентные состояния* $\mathscr{P}_z \in L$ определяются той же формулой (4.9):

$$\mathscr{P}_z = \theta_{\bar{\nu}}\left(\frac{z}{i} + \hat{s}, \frac{\tau\hbar}{2}\right) \mathscr{P}^0. \quad (4.10)$$

Ортогональный проектор в L на подпространство, порожденное $\mathscr{P}_z$, обозначим через $\Pi(\bar{z}|z)$.

ТЕОРЕМА 4.1. (а) Скалярное произведение когерентных состояний (4.10) над цилиндром $\mathfrak{X}$ дает воспроизводящее ядро: $\mathcal{K}_\nu(\bar{z}|z) = (\mathcal{P}_z, \mathcal{P}_z)$.

(б) Имеет место разложение единицы:

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathfrak{X}} \Pi \, dm_\nu = I^0,$$

где I^0 – единичный оператор в инвариантном подпространстве $L^0 \subset L$, порожденном представлением алгебры (2.3) из исходного состояния $\mathcal{P}^0$.

(с) Отображение

$$\mathcal{L}_\nu \rightarrow L^0 \subset L, \quad \psi \mapsto \int_{\mathfrak{X}} \frac{\psi(\bar{z})}{\mathcal{K}_\nu(\bar{z}|z)} \mathcal{P}_z \, dm_\nu(\bar{z}|z) \quad (4.11)$$

задает унитарный изоморфизм гильбертовых пространств. Обратное отображение задано формулой

$$L \rightarrow \mathcal{L}_\nu, \quad \mathcal{P} \mapsto (\mathcal{P}, \mathcal{P}_z).$$

(d) Преобразование (4.11), определенное с помощью когерентных состояний (4.10), сплетает представление алгебры (2.3) в пространстве L с неприводимым представлением (3.3) в пространстве $\mathcal{L}_\nu$ антиголоморфных функций на цилиндре $\mathfrak{X}$.

Рассмотрим теперь случай тора. В нерезонансном варианте (3.11), по-прежнему, будет верна теорема 4.1, но при этом в утверждениях (б) и (с) интегрирование нужно вести по бесконечнолистному накрытию тора $\mathfrak{X}$.

Опишем воспроизводящее ядро и когерентные состояния при наличии резонанса (3.12). Пространство антиголоморфных функций $\mathcal{L}_\nu^N$ задается формулами (3.16), (3.17), поэтому ортонормированный базис в $\mathcal{L}_\nu^N$ можно взять такой:

$$e^{(n)}(\bar{z}) = \nu_!(n\hbar)^{-1} \exp\left\{-\frac{\tau\hbar n^2}{2} + n\bar{z}\right\} \theta\left(\frac{N(\bar{z} - \tau\hbar n)}{i}, \frac{\tau\hbar N^2}{2}\right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Этот базис является собственным для оператора

$$\exp\left\{\frac{2\pi i}{N\hbar} \hat{t}\right\} = \exp\left\{\frac{2\pi i}{N} \bar{\partial}\right\}.$$

После квантового преобразования Фурье $e^{(n)} \rightarrow \tilde{e}^{(n)}$ получим новый базис

$$\tilde{e}^{(n)}(\bar{z}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} mn} e^{(m)}(\bar{z}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \theta_\nu\left(\frac{\bar{z}}{i} + \frac{2\pi n}{N}, \frac{\tau\hbar}{2}\right),$$

собственный для оператора $\exp\{i\hat{s}\} = \frac{\nu}{\hbar\bar{\partial}} \exp\{\bar{z} - \tau\hbar\bar{\partial}\}$ из (3.1). Тогда воспроизводящее ядро задается формулой

$$\mathcal{K}_\nu^N(\bar{z}|z) = \sum_{n=0}^{N-1} |e^{(n)}(\bar{z})|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |\tilde{e}^{(n)}(\bar{z})|^2 = |\nu_!(\hbar\bar{\partial})|^{-2} \mathcal{K}^N(\bar{z}|z), \quad (4.12)$$

где

$$\mathcal{K}^N(\bar{z}|z) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left| \theta\left(\frac{\bar{z}}{i} + \frac{2\pi n}{N}, \frac{\tau\hbar}{2}\right) \right|^2.$$

Это модификация формулы (4.2) для случая резонансного тора. Отметим, что множитель $\nu_!$ был вынесен из-под знака суммы в (4.12) благодаря условию периодичности (3.13).

ЛЕММА 4.2. В специальном случае (3.7а) (т.е. $\nu = 1$, $g = 0$) имеет место следующее представление для воспроизводящего ядра $\mathcal{K}^N$ над резонансным тором:

- если N четное, то

$$\mathcal{K}^N(\bar{z}|z) = \theta\left(\frac{\bar{z}+z}{i}, \tau\hbar\right) \theta\left(\frac{N(\bar{z}-z)}{2i}, \frac{\tau\hbar N^2}{4}\right);$$

- если N нечетное, то

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^N(\bar{z}|z) = & \theta\left(\frac{\bar{z}+z}{i}, \tau\hbar\right) \theta\left(\frac{N(\bar{z}-z)}{i}, \tau\hbar N^2\right) \\ & + \theta^\# \left(\frac{\bar{z}+z}{i}, \tau\hbar\right) \theta^\# \left(\frac{N(\bar{z}-z)}{i}, \tau\hbar N^2\right), \end{aligned}$$

где

$$\theta^\#(\alpha, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}} \exp\{-\varepsilon n^2 + in\alpha\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Таким образом, в случае резонансного тора воспроизводящее ядро задается произведением двух тэта-функций (близкое утверждение в качестве гипотезы было сформулировано в [16], но для иного пространства антиголоморфных функций).

Отметим, что так же, как и в (4.3), воспроизводящее ядро может быть задано как единственное решение системы некоторых (разностных) уравнений. В данном случае функция $\mathcal{K}_\nu^N(\bar{z}|w)$ – это решение задачи

$$\begin{aligned} |\nu|^{-2} \left(\hbar \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \exp \left\{ \bar{z} + w - \tau \hbar \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial}{\partial w} \right) \right\} \mathcal{K}_\nu^N &= \mathcal{K}_\nu^N, \\ \mathcal{K}_\nu^N(\bar{z} + 2\pi i | w) &= \mathcal{K}_\nu^N(\bar{z} | w), \quad \exp \left\{ N \left(\bar{z} - \tau \hbar \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \right\} \mathcal{K}_\nu^N = \mathcal{K}_\nu^N, \\ \mathcal{K}_\nu^N \left(\bar{z} + \frac{2\pi i}{N} | w \right) &= \mathcal{K}_\nu^N \left(\bar{z} | w + \frac{2\pi i}{N} \right), \quad \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{2\pi} d\beta \mathcal{K}_\nu^N(i\alpha | i\beta) = 1. \end{aligned}$$

Далее, так же, как и в случае цилиндра, мы представим воспроизводящее ядро в виде

$$\mathcal{K}_\nu^N(\bar{z}|z) = \sqrt{\frac{\pi}{\tau\hbar}} \exp \left\{ \frac{(\bar{z}+z)^2}{4\tau\hbar} \right\} q_\nu^N(\bar{z}|z) \quad (4.13)$$

и определим меру на торе $\mathfrak{X}$:

$$dm_\nu^N \stackrel{\text{def}}{=} q_\nu^N(\bar{z}|z) p_\nu(\bar{z}+z) \frac{d\bar{z}dz}{2\tau}, \quad (4.14)$$

где p_ν – функция (4.4).

ЛЕММА 4.3. Если функция p_ν ограничена, то норма (3.17) в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_\nu^N$ может быть представлена в интегральном виде:

$$\begin{aligned} \|\psi\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\substack{0 \leq \operatorname{Im} z \leq 2\pi \\ 0 \leq \operatorname{Re} z \leq \tau T}} |\psi(\bar{z})|^2 p_\nu(\bar{z} + z) \frac{\exp\{-(\bar{z} + z)^2 / (4\hbar\tau)\}}{\sqrt{4\pi\hbar\tau}} d\bar{z} dz \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathfrak{X}} \frac{|\psi|^2}{\mathcal{K}_\nu^N} dm_\nu^N. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Соответствующая квантовая кэлерава форма на резонансном торе $\mathfrak{X}$ имеет вид

$$\omega_\nu^N \stackrel{\text{def}}{=} i\hbar\bar{\partial}\partial(\ln \mathcal{K}_\nu^N) d\bar{z} \wedge dz. \quad (4.16)$$

Выполнено условие квантования:

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathfrak{X}} \omega_\nu^N = N. \quad (4.17)$$

В формулах (4.15) и (4.17) под операцией $\int_{\mathfrak{X}}$ в общем случае понимается интеграл по т-листному накрытию тора $\mathfrak{X}$ (см. комментарий к формуле (3.12)).

Это аналог леммы 4.1 и формулы (4.6). Отметим, что условие квантования (4.17) для кэлеравой формы ω_ν^N не отличается от условия (3.12) для формы

$$\omega_{\text{class}} = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \omega_\nu^N,$$

поскольку первый класс Черна у тора тривиален: $c_1(\mathfrak{X}) = 0$. В случае, когда поверхность $\mathfrak{X}$ гомеоморфна сфере, имеется отличие (см. об этом в [23]).

Теперь можно так же повторить и схему вычисления когерентных состояний. Исходное состояние $\mathscr{P}^0 \in \mathcal{L}_\nu^N$ имеет вид

$$\mathscr{P}^0(\bar{z}) = \theta\left(\frac{N\bar{z}}{i}, \frac{\tau\hbar N^2}{2}\right).$$

При любой T -периодической функции $f(t)$ состояние $\mathscr{P}^0$ является собственным для оператора $f(\hat{t})$, а именно: $f(\hat{t})\mathscr{P}^0 = f(0) \cdot \mathscr{P}^0$. Поэтому из (3.5), (3.6) получаем

$$\begin{aligned} \exp\left\{-\frac{\tau\hbar n^2}{2} + n\bar{z}\right\} \theta\left(\frac{N(\bar{z} - \tau\hbar n)}{i}, \frac{\tau\hbar N^2}{2}\right) &= e^{n(g(\hat{t}) + i\hat{s})} \mathscr{P}^0(\bar{z}) \\ &= e^{in\hat{s}} \exp\left\{\frac{1}{\hbar} \int_{\hat{t}}^{\hat{t} + n\hbar} g(t) dt\right\} \mathscr{P}^0 = e^{in\hat{s}} \nu_!(n\hbar + \hat{t}) \mathscr{P}^0 = \nu_!(n\hbar) e^{in\hat{s}} \mathscr{P}^0. \end{aligned}$$

Подставляя это в формулу для $e^{(n)}(\bar{z})$ и затем в формулу (4.12), находим

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\nu^N &= \bar{\nu}_!(\hbar\partial)^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left\{-\frac{\tau\hbar n^2}{2} + n(z + i\hat{s})\right\} \theta\left(\frac{N(z - \tau\hbar n)}{i}, \frac{\tau\hbar N^2}{2}\right) \mathscr{P}^0 \\ &= \bar{\nu}_!(\hbar\partial)^{-1} \theta\left(\frac{z}{i} + \hat{s}, \frac{\tau\hbar}{2}\right) \mathscr{P}^0. \end{aligned}$$

Эта формула дает когерентные состояния в $\mathcal{L}_\nu^N$. Мы видим, что это тождественно та же формула, что и (4.9). Таким образом, когерентные состояния над резонансным тором $\mathfrak{X}$ в абстрактном гильбертовом пространстве L задаются выражением (4.10), если дополнительно к (4.8) потребовать, чтобы

$$\hat{B}^N \mathscr{P}^0 = \beta \mathscr{P}^0, \quad \beta = \text{const}.$$

Значение β определяется формулой (3.18): $\beta = \mathcal{F}_!(N\hbar)^{1/2} e^{i\alpha}$.

Имеется аналог теоремы 4.1.

ТЕОРЕМА 4.2. В условиях теоремы 3.2 справедливы следующие утверждения.

(а) Скалярное произведение когерентных состояний (4.10) над резонансным тором $\mathfrak{X}$ дает воспроизводящее ядро: $\mathcal{K}_\nu^N(\bar{z}|z) = (\mathcal{P}_z, \mathcal{P}_z)$.

(б) Имеет место разложение единицы:

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathfrak{X}} \Pi dm_\nu^N = I^0,$$

где I^0 – единичный оператор в инвариантном подпространстве $L^0 \subset L$, порожденном представлением алгебры (2.3) из исходного состояния $\mathcal{P}^0$.

(с) Отображение

$$\mathcal{L}_\nu^N \rightarrow L^0 \subset L, \quad \psi \mapsto \int_{\mathfrak{X}} \frac{\psi(\bar{z})}{\mathcal{K}_\nu^N(\bar{z}|z)} \mathcal{P}_z dm_\nu^N(\bar{z}|z) \quad (4.18)$$

задает унитарный изоморфизм гильбертовых пространств. Обратное отображение задано формулой

$$L \rightarrow \mathcal{L}_\nu^N, \quad \mathcal{P} \mapsto (\mathcal{P}, \mathcal{P}_z).$$

(d) Преобразование (4.18), определенное с помощью когерентных состояний (4.10), сплетает представление алгебры (2.3) в пространстве L с неприводимым представлением (3.3) в пространстве $\mathcal{L}_\nu^N$ антиголоморфных сечений на торе $\mathfrak{X}$.

5. Примеры: алгебра Складина и алгебра $su(1, 1)$.

ПРИМЕР 5.1. Рассмотрим четыре эрмитовых генератора, удовлетворяющих следующим квадратичным соотношениям:

$$\begin{aligned} [\hat{S}_1, \hat{S}_2] &= i(\hat{S}_0\hat{S}_3 + \hat{S}_3\hat{S}_0), & [\hat{S}_0, \hat{S}_1] &= -ir^2(\hat{S}_2\hat{S}_3 + \hat{S}_3\hat{S}_2), \\ [\hat{S}_2, \hat{S}_3] &= i(\hat{S}_0\hat{S}_1 + \hat{S}_1\hat{S}_0), & [\hat{S}_0, \hat{S}_2] &= ir^2(\hat{S}_3\hat{S}_1 + \hat{S}_1\hat{S}_3), \\ [\hat{S}_3, \hat{S}_1] &= i(\hat{S}_0\hat{S}_2 + \hat{S}_2\hat{S}_0), & [\hat{S}_0, \hat{S}_3] &= 0. \end{aligned}$$

В статье [16] эта алгебра занумерована как “вырожденный случай (2а)”. Будем считать, что $r > 0$, и определим число

$$q = \frac{1+ir}{1-ir} = e^{i\varphi}, \quad \text{где } r = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

Введем новые генераторы

$$\hat{A} = \sqrt{r} \hat{S}_3 + \frac{i}{\sqrt{r}} \hat{S}_0, \quad \hat{B} = \hat{S}_1 - i\hat{S}_2, \quad \hat{C} = \hat{S}_1 + i\hat{S}_2.$$

Соотношения между ними таковы:

$$\begin{aligned} [\hat{C}, \hat{B}] &= -i(\hat{A}^2 - \hat{A}^{*2}), & [\hat{A}, \hat{A}^*] &= 0, \\ \hat{C}\hat{A} &= q\hat{A}\hat{C}, & \hat{A}\hat{B} &= q\hat{B}\hat{A}, & \hat{B}^* &= \hat{C}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь мы для упрощения обозначений используем неэрмитов генератор $\hat{A} = \hat{A}_1 + i\hat{A}_2$ вместо того, чтобы использовать его вещественную и мнимую части. Эти соотношения имеют вид (2.3), где нужно положить $\hbar = 1$ и задать поток Φ_t формулой

$$\Phi_t(A_0, A) = \left(A_0 + \frac{\bar{q}(q^{2t} - 1)A^2 + q(\bar{q}^{2t} - 1)\bar{A}^2}{i(q - \bar{q})}, q^t A \right).$$

Элементы Казимира вида (2.5) здесь задаются функциями

$$\varkappa_0 = A_0 - \frac{\bar{q}A^2 + q\bar{A}^2}{i(q - \bar{q})}, \quad \varkappa_1 = A\bar{A}.$$

Мы будем сейчас предполагать, что параметры a_0, a поверхности $\mathfrak{X}$ (2.8) выбраны так, что

$$a_0 > \varkappa_1 \frac{1 - \cos(\psi - \varphi)}{\sin \varphi}, \quad \text{где } a = \sqrt{\varkappa_1} e^{i\psi/2}. \quad (5.2)$$

Тогда функция

$$\mathcal{F}(t) = a_0 + \frac{\varkappa_1}{\sin \varphi} (\cos(\psi - \varphi) - \cos(\psi + (2t - 1)\varphi))$$

строго положительна при всех t , и условие периодичности (2.9), очевидно, выполнено с периодом $T = 2\pi/\varphi$. Следовательно, поверхность $\mathfrak{X}$ вложена в $\mathbb{R}^4$ как тор. Однако условие квантования (3.12) (при $\hbar = 1$) будет выполнено, если и только если

$$\frac{\varphi}{2\pi} \text{ рационально.} \quad (5.3)$$

Это дает условие на структурную константу r в исходных коммутационных соотношениях: если $\frac{1}{\pi} \arctg r$ – иррациональное число, то условие квантования ни на одном из торов не выполнено, т.е. резонансных торов нет, а если $\frac{1}{\pi} \arctg r$ – рациональное число, то любой тор резонансный.

Следуя (3.2), введем функцию $\mu(t)$ так, чтобы $\mathcal{F}(t) = |\mu(t)|^2$. Нам хотелось бы избежать извлечения квадратных корней типа $\mathcal{F}(t)^{1/2}$. Поэтому заметим, что

$$\mathcal{F}(t) = a_0 + v_0(\varphi_t(a)) - v_0(a), \quad \text{где } v_0(A) = \frac{\bar{q}A^2 + q\bar{A}^2}{i(q - \bar{q})}, \quad \varphi_t(a) = q^t a.$$

Следовательно, можно положить $\mu(t) = M(\varphi_t(a))$, где $M(A)\overline{M(A)} = a_0 - v_0(a) + v_0(A)$. Ищем функцию M в виде $M(A) = \zeta A - \bar{\xi}\bar{A}$, где $|A| = |a| \equiv \sqrt{\varkappa_1}$. Для коэффициентов ζ, ξ получаем систему (см. обозначения в (5.2))

$$\zeta\xi = \frac{e^{-i\varphi}}{2\sin\varphi}, \quad |\zeta|^2 + |\xi|^2 = \frac{a_0}{\varkappa_1} + \frac{\cos(\psi - \varphi)}{\sin\varphi}, \quad (5.4)$$

которая легко явно решается. Итак, мы выбираем

$$\mu(t) = \zeta a e^{i\varphi t} - \bar{\xi} \bar{a} e^{-i\varphi t}, \quad (5.5)$$

где ζ, ξ подчинены (5.4).

Множитель $\mathcal{B}(t)$ в (3.4) выберем простейшим: $\mathcal{B} = \mu$. Тогда $\nu = 1$, $g = 0$ и комплексная структура на $\mathfrak{X}$ задается формулой (3.7a) $\bar{z} = \tau t + is$, где $\tau > 0$.

1) *Нерезонансный вариант*: (5.3) не выполнено. Здесь необходимо рассматривать цилиндр, бесконечно намотанный на тор $\mathfrak{X}$. В этом случае по лемме 4.1 гильбертово пространство $2\pi i$ -периодических антиголоморфных функций над накрытием тора $\mathfrak{X}$ наделено нормой

$$\|\psi\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{0 \leq \operatorname{Im} z \leq 2\pi} |\psi(\bar{z})|^2 \frac{\exp\{-(\bar{z} + z)^2/(4\tau)\}}{\sqrt{4\pi\tau}} d\bar{z} dz. \quad (5.6)$$

Воспроизводящее ядро этого пространства в силу (4.2) задается тэта-функцией:

$$\mathcal{K}(\bar{z}|z) = \theta\left(\frac{\bar{z} + z}{i}, \tau\right).$$

Квантовая кэлерава форма и воспроизводящая мера определяются формулами (4.7) и, как легко видеть, корректно определены только на бесконечнолистном накрытии тора (на цилиндре).

Неприводимое представление соотношений (5.1) в гильбертовом пространстве (5.6) задается операторами вида (3.3):

$$\begin{aligned} \hat{A} &= a \exp\{i\varphi\bar{\partial}\}, & \hat{A}^* &= \bar{a} \exp\{-i\varphi\bar{\partial}\}, \\ \hat{B} &= (\zeta\hat{A} - \bar{\xi}\hat{A}^*) \exp\{\bar{z} - \tau\bar{\partial}\}, & \hat{C} &= \exp\{\tau\bar{\partial} - \bar{z}\}(\bar{\zeta}\hat{A}^* - \xi\hat{A}). \end{aligned} \quad (5.7)$$

2) *Резонансный вариант*: условие (5.3) выполнено, т.е. $\varphi = 2\pi m/N$, где m, N взаимно простые. В качестве периода берем $T = N$ (при этом минимальный период равен N/m). Тогда над m -кратным накрытием тора строится N -мерное гильбертово пространство функций с условиями квазипериодичности (3.14) (где $\hbar = 1$) и с нормой

$$\|\psi\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\substack{0 \leq \operatorname{Im} z \leq 2\pi \\ 0 \leq \operatorname{Re} z \leq \tau T}} |\psi(\bar{z})|^2 \frac{\exp\{(\bar{z} + z)^2/(4\tau)\}}{\sqrt{4\pi\tau}} d\bar{z} dz.$$

Воспроизводящее ядро этого пространства задано в лемме 4.2 (где $\hbar = 1$). Здесь форма ω_ν^N и мера dm_ν^N определяются формулами (4.13), (4.14), (4.16) при $\nu = 1$ как геометрические объекты на торе, точнее, на его m -кратном накрытии.

Поскольку в данном случае $\nu = 1$, то первое нормировочное условие (3.13) выполнено автоматически. Второе условие (3.13) можно обеспечить так: заменить изначально выбранное решение ζ, ξ системы (5.4) на другое решение $\tilde{\zeta}, \tilde{\xi}$ по формулам

$$\tilde{\zeta} = \zeta \exp\left\{i \frac{\alpha - \delta}{N}\right\}, \quad \tilde{\xi} = \xi \exp\left\{i \frac{\delta - \alpha}{N}\right\},$$

где α – параметр из (3.13), $\delta = \sum_{n=1}^N \arg \mu(n\hbar)$, а функция μ задана в (5.5) с использованием изначально выбранного решения ζ, ξ . Операторы неприводимого представления алгебры (5.1) определяются теми же формулами (5.7), где ζ, ξ нужно заменить на $\tilde{\zeta}, \tilde{\xi}$.

Отметим, что в резонансном варианте алгебра (5.1) помимо двух “классических” элементов Казимира имеет еще два “неклассических” элемента $\hat{B}^N, \hat{A}^N$ и их сопряженные (которые являются скалярами в операторно неприводимом представлении).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. В работе [16] нерезонансный вариант не изучался. Интересно, что в этом варианте бесконечномерные представления сопоставляются компактным симплектическим листам соответствующей пуассоновой алгебры. В резонансном варианте наших представлений (5.7), заданных на антиголоморфных функциях, также нет в [16] (для рассматриваемого случая в [16] представления строятся в пространстве функций на окружности).

ПРИМЕР 5.2. Рассмотрим теперь алгебру Ли $su(1, 1)$. Три ее эрмитовых генератора подчинены коммутационным соотношениям

$$[\hat{S}_1, \hat{S}_2] = i\hbar\hat{S}_3, \quad [\hat{S}_2, \hat{S}_3] = -i\hbar\hat{S}_1, \quad [\hat{S}_3, \hat{S}_1] = -i\hbar\hat{S}_2.$$

Введем обозначения $\hat{B} = \hat{S}_1 - i\hat{S}_2$, $\hat{C} = \hat{S}_1 + i\hat{S}_2$, $\hat{A} = \hat{S}_3$. Тогда соотношения приобретают вид

$$\hat{C}\hat{B} = \hat{B}\hat{C} + 2\hbar\hat{A}, \quad \hat{C}\hat{A} = (\hat{A} + \hbar)\hat{C}, \quad \hat{B}^* = \hat{C}, \quad \hat{A}^* = \hat{A}. \quad (5.8)$$

Это частный случай соотношений (2.3), в которых поток $\Phi_t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ имеет вид

$$\Phi_t(A_0, A) = (t^2 + t(2A - \hbar) + A_0, A + t).$$

Предположим, что параметры a_0, a выбраны так, что $a_0 - (a - \hbar/2)^2 \stackrel{\text{def}}{=} \lambda^2 > 0$. Тогда функция (3.2) положительна: $\mathcal{F}(t) = t^2 + t(2a - \hbar) + a_0 > 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, поверхность $\mathfrak{X}$ диффеоморфна цилиндру, который вкладывается в $\mathbb{R}^3$ как однопольстный гиперboloид

$$\mathfrak{X} = \left\{ BC - \left(A - \frac{\hbar}{2} \right)^2 = \lambda^2 \right\}.$$

Выберем функцию $\mu(t)$ из (3.2): $\mu(t) = t + a - \hbar/2 - i\lambda$. Рассмотрим два варианта выбора множителя $\mathcal{B}$ в (3.4), а именно: $\mathcal{B}(t) \equiv \mu(t)$ или $\mathcal{B}(t) \equiv \mathcal{F}(t)$.

Вариант I. Выберем $\mathcal{B} = \mu$. Тогда $\nu = 1$ и гильбертово пространство антиголоморфных функций на цилиндре задается нормой (4.5) (где $p_\nu \equiv 1$). Неприводимое представление алгебры Ли $su(1, 1)$ (т.е. представление соотношений (5.8)) задается следующими операторами, действующими в этом гильбертовом пространстве:

$$\hat{A} = a + \hbar\bar{\partial}, \quad \hat{B} = \left(\hat{A} - \frac{\hbar}{2} - i\lambda \right) e^{\bar{z} - \tau\hbar\bar{\partial}}, \quad \hat{C} = e^{\tau\hbar\bar{\partial} - \bar{z}} \left(\hat{A} - \frac{\hbar}{2} + i\lambda \right). \quad (5.9)$$

Вариант II. Выберем $\mathcal{B} = \mathcal{F}$. Тогда $\nu = \bar{\mu}^{-1}$ и комплексная структура на $\mathfrak{X}$ задается формулой (3.7), в которой

$$g(t) = -\frac{\hbar}{a+t-\hbar/2+i\lambda} - \hbar \frac{d}{dt} \ln \Gamma \left(\frac{a+t}{\hbar} - \frac{1}{2} + \frac{i\lambda}{\hbar} \right) - \ln \hbar,$$

где Γ – стандартная гамма-функция. Следовательно,

$$\nu_!(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{a}{\hbar} + \frac{1}{2} + \frac{i\lambda}{\hbar}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+t}{\hbar} + \frac{1}{2} + \frac{i\lambda}{\hbar}\right)} \exp \left\{ -\frac{t}{\hbar} \ln \hbar \right\}.$$

Отсюда получаем функцию (4.4)

$$p_\nu(x) = \frac{|\Gamma(\frac{a}{\hbar} + \frac{1}{2} + \frac{i\lambda}{\hbar})|^2}{\sqrt{\pi\hbar\tau}} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\{-\frac{t^2}{\tau\hbar}\} \exp\{-\frac{x+2it}{\tau\hbar} \ln \hbar\}}{\Gamma(\frac{a}{\hbar} + \frac{1}{2} + \frac{x}{2\tau\hbar} + \frac{it}{\tau\hbar} + \frac{i\lambda}{\hbar}) \Gamma(\frac{a}{\hbar} + \frac{1}{2} + \frac{x}{2\tau\hbar} + \frac{it}{\tau\hbar} - \frac{i\lambda}{\hbar})} dt. \quad (5.10)$$

Таким образом, в этом варианте гильбертово пространство $\mathcal{L}_\nu$ антиголоморфных функций на цилиндре задается нормой (4.5), где p_ν определена в (5.10). Воспроизводящее ядро этого пространства задано модифицированной тэта-функцией (4.2)

$$\mathcal{K}_\nu(\bar{z}|z) = \frac{|\Gamma(\frac{a}{\hbar} + \frac{1}{2} + \frac{i\lambda}{\hbar} + \partial)|^2}{|\Gamma(\frac{a}{\hbar} + \frac{1}{2} + \frac{i\lambda}{\hbar})|^2} \theta\left(\frac{\bar{z} + z + 2 \ln \hbar}{i}, \tau\hbar\right).$$

Неприводимые представления алгебры Ли $su(1, 1)$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_\nu$ имеют вид (3.3):

$$\hat{A} = a + \hbar\bar{\partial}, \quad \hat{B} = [(\hat{A} - \hbar/2)^2 + \lambda^2]e^{\bar{z} - \tau\hbar\bar{\partial}}, \quad \hat{C} = e^{\tau\hbar\bar{\partial} - \bar{z}}. \quad (5.11)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Представления (5.9) и (5.11), по-видимому, не рассматривались в стандартной теории представлений алгебр Ли. Они ассоциированы с комплексной структурой (комплексной поляризацией), которая не является инвариантной относительно коприсоединенного действия $su(1, 1)$ на симплектическом листе $\mathfrak{X}$. Обычно рассматриваются представления, соответствующие инвариантной вещественной поляризации $\mathfrak{X}$ (расслоение окружностями $A = \text{const}$).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Klauder J. R. Continuous representation theory // J. Math. Phys. 1963. V. 4. P. 1055–1073.
- [2] Березин Ф. А. Виковские и анти-виковские символы операторов // Матем. сб. 1971. Т. 86. С. 578–610.
- [3] Березин Ф. А. Ковариантные и контравариантные символы операторов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36. № 5. С. 1134–1167.
- [4] Переломов А. М. Обобщенные когерентные состояния и их приложения. М.: Наука, 1987.
- [5] Zhang W.-M., Feng D. H., Gilmore R. Coherent states. Theory and some applications // Rev. Modern Phys. 1990. V. 26. P. 867–927.
- [6] Blattner R. On geometric quantization // Lecture Notes in Math. 1983. V. 1037. P. 209–241.
- [7] Кириллов А. А. Геометрическое квантование // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 4. М.: ВИНТИ, 1985. С. 141–178.
- [8] Карасев М. В., Маслов В. П. Асимптотическое и геометрическое квантование // УМН. 1984. Т. 39. № 6. С. 115–173.
- [9] Arik M., Coon D. Hilbert spaces of analytic functions and generalized coherent states // J. Math. Phys. 1976. V. 17. P. 524–527.
- [10] Bergmann S. The kernel functions and conformal mapping // Amer. Math. Soc. Math. Surveys. 1950. V. 5.
- [11] Tuynman G. M. Generalized Bergmann kernels and geometric quantization // J. Math. Phys. 1987. V. 28. № 3. P. 573–583.
- [12] Bargmann V. On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform // Comm. Pure Appl. Math. 1961. V. 14. P. 187–214.

- [13] Berezin F. A. General concept of quantization // *Comm. Math. Phys.* 1975. V. 40. P. 153–174.
- [14] Rawnsley J. Coherent states and Kähler manifolds // *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*. 1977. V. 28. P. 403–415.
- [15] Cahen M., Gutt S., Rawnsley J. Quantization of Kähler manifolds. I // *J. Geom. Phys.* 1990. V. 7. P. 45–62; II // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1993. V. 337. P. 73–98; III // *Lett. Math. Phys.* 1994. V. 30. P. 291–305; IV // *Lett. Math. Phys.* 1995. V. 30. P. 159–168.
- [16] Склянин Е. О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга–Бакстера // *Функцион. анализ и прилож.* 1982. Т. 16. № 4. С. 27–34; 1983. Т. 17. № 4. С. 34–48.
- [17] Zhedanov A. Nonlinear shift of q -Bose operators and q -coherent states // *J. Phys. A*. 1991. V. 24. P. L1129–L1131.
- [18] Карасев М. В., Новикова Е. М. Квадратичные скобки Пуассона в эффекте Зеемана. Неприводимые представления и когерентные состояния // *УМН*. 1994. Т. 49. № 5. С. 169–170.
- [19] Karasev M. V. Quantization and coherent states over Lagrangian submanifolds // *Russian J. Math. Phys.* 1995. V. 3. № 3. P. 393–400.
- [20] Карасев М. В., Новикова Е. М. Представление точных и квазиклассических собственных функций через когерентные состояния. Атом водорода в магнитном поле // *ТМФ*. 1996. Т. 108. № 3. С. 339–387.
- [21] Karasev M. V., Novikova E. M. Coherent transform of spectral problem and algebras with nonlinear commutation relations // *J. Math. Sci.* 1999. V. 95. № 6. P. 2703–2798.
- [22] Karasev M. V. Advances in quantization: quantum tensors, explicit $*$ -products, and restriction to irreducible leaves // *Differential Geom. Appl.* 1998. V. 9. P. 89–134.
- [23] Karasev M. V., Novikova E. M. Non-Lie permutation relations, coherent states, and quantum embedding // *Coherent Transform, Quantization, and Poisson Geometry* / ed. M. V. Karasev. Providence, RI: Publ. AMS, 1998. P. 1–202.
- [24] Odziejewicz A. Quantum algebras and q -special functions related to coherent states maps of the disk // *Comm. Math. Phys.* 1999. V. 192. P. 183–215.
- [25] Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1991.
- [26] Cartier P. Quantum mechanical commutation relations and theta-functions // *Proc. Symp. Pure Math.* 1966. V. 9. P. 361–383.
- [27] Лион Ж., Вернь М. Представление Вейля, индекс Маслова и тэта-ряды. М.: Мир, 1983.
- [28] Мамфорд Д. Лекции о тэта-функциях. М.: Мир, 1988.
- [29] Weinstein A. Classical theta-functions and quantum tori // *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* 1994. V. 30. P. 327–333.
- [30] Varchenko A. Multidimensional hypergeometric functions and representation theory of Lie-algebras and quantum groups: World Scientific, 1995.
- [31] Karasev M. Quantum surfaces, special functions, and the tunneling effect // *Lett. Math. Phys.* 2001. V. 56. № 3.