Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. А. Кац, О некоторых обобщениях понятия длины, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 6, 875–881

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm799>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 15:49:11

УДК 517

О НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕНИЯХ ПОНЯТИЯ ДЛИНЫ

Б. А. Кац

Для неспрямляемой дуги $\gamma \subset \mathbb{C}$ вводятся две количественные характеристики, обобщающие понятие длины. Во-первых, естественным геометрическим обобщением длины является точная верхняя грань сумм $\sum \Phi(a_j)$, где a_j – длины звеньев ломаной, вписанной в дугу γ , а Φ – некоторая заданная функция. Во-вторых, длина γ есть норма функционала $f \mapsto \int_\gamma f dz$ в пространстве $C(\gamma)$; его нормы в иных пространствах могут рассматриваться как аналитические обобщения длины. В статье выясняется при каких условиях из геометрической обобщенной спрямляемости кривой γ вытекает ее аналитическая обобщенная спрямляемость.

Библиография: 4 названия.

1. Определения и формулировки основных результатов. Пусть γ есть простая спрямляемая ориентированная кривая на комплексной плоскости с началом в точке a и концом в точке b . Тем самым, на этой кривой задано отношение порядка: $z \prec w$, если z предшествует w при обходе γ от a к b . Соответственно запись $z \preceq w$ означает, что точка z либо предшествует точке w , либо совпадает с ней. *Разбиениями* дуги γ будем называть всевозможные строго возрастающие в смысле отношения $\prec$ конечные последовательности $\tau = \{z_0, z_1, \dots, z_n\}$ точек кривой γ такие, что $z_0 = a$, $z_n = b$, $n = n(\tau)$.

Далее, заданная при $x \geq 0$ функция $\Phi(x)$ называется *ϕ -функцией*, если она непрерывна, строго возрастает, $\Phi(0) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) = \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть Φ есть фиксированная ϕ -функция. Кривая γ называется *Φ -спрямляемой*, если конечна величина

$$\sigma_\Phi(\gamma) \equiv \sup_\tau \sum_{j=1}^{n(\tau)} \Phi(|z_j - z_{j-1}|),$$

где верхняя грань берется по множеству всех разбиений γ .

При $\Phi(x) \equiv x^p$ мы будем говорить о *p -спрямляемости* и писать σ_p вместо σ_Φ . Очевидно, 1-спрямляемые кривые спрямляемы, а с ростом p класс p -спрямляемых кривых строго расширяется. Для любого $p > 1$ можно указать p -спрямляемую кривую, не являющуюся q -спрямляемой ни при одном $q < p$. При $p < 1$ класс p -спрямляемых кривых пуст.

Пусть теперь $\mathbb{P}$ есть множество всех алгебраических многочленов от переменной z , т.е. каждый элемент $\mathbb{P}$ имеет вид $f(z) = f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \dots + f_m z^m$, где $f_0, f_1, \dots, f_m$ –

постоянные числа, $m = m(f)$. Обозначим через $\mathbb{P}_0 \subset \mathbb{P}$ множество всех многочленов, обращающихся в нуль в точке a , а через $\mathbb{P}^*$ множество всех многочленов, не равных тождественно нулю. Если кривая γ спрямляема и $f \in \mathbb{P}_0$, то, очевидно, $f(b) = \int_{\gamma} f'(z) dz$ и, следовательно, $|f(b)| \leq \lambda \|f'\|_{C(\gamma)}$, где $\|\cdot\|_{C(\gamma)}$ есть равномерная норма на γ , т.е.

$$\|g\|_{C(\gamma)} \equiv \sup\{|g(z)| : z \in \gamma\},$$

а постоянная λ не зависит от f . Наилучшим значением этой постоянной является длина γ , т.е. мы можем положить здесь $\lambda = \sigma_1(\gamma)$. Можно показать, что величина

$$\sup \left\{ \frac{|f(b)|}{\|f'\|_{C(\gamma)}} : f \in \mathbb{P}_0, f' \in \mathbb{P}^* \right\}$$

конечна тогда и только тогда, когда кривая γ спрямляема. Заменяя здесь равномерную норму любой другой, мы получим некоторую характеристику кривой γ , которая может оказаться конечной и для некоторых неспрямляемых кривых. Пусть $\mathbf{n}$ есть некоторая норма, определенная на $\mathbb{P}$ и такая, что $\mathbf{n}(\mathbf{1}) = 1$, где $\mathbf{1}$ означает многочлен, тождественно равный единице.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Кривая γ называется $[\mathbf{n}]$ -спрямляемой, если конечна величина

$$\lambda_{\mathbf{n}}(\gamma) \equiv \sup \left\{ \frac{|f(b)|}{\mathbf{n}(f')} : f \in \mathbb{P}_0, f' \in \mathbb{P}^* \right\}.$$

Ниже мы используем следующий класс норм. Пусть $\psi(x)$ есть фиксированная ϕ -функция. Пространство $H_{\psi}(\gamma)$ состоит из всех непрерывных на γ функций $f(z)$, удовлетворяющих условию

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq c\psi(|z_1 - z_2|)$$

при всех $z_{1,2} \in \gamma$ и некотором $c = c(f) > 0$. Точная нижняя грань значений c , для которых выполняется это неравенство, обозначается ниже через $c_{\psi}(f)$; величина $\mathbf{n}_{\psi}(f) = |f(a)| + c_{\psi}(f)$ является нормой пространства $H_{\psi}(\gamma)$. Если

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\psi(x)}{x} = 0,$$

то это пространство состоит из постоянных; напротив, если величина $x/\psi(x)$ ограничена при малых x , то $\mathbb{P} \subset H_{\psi}(\gamma)$. При $\psi(x) \equiv x^{\nu}$, $0 < \nu \leq 1$, мы будем говорить о $[\nu]$ -спрямляемости и писать H_{ν} , c_{ν} , h_{ν} и λ_{ν} вместо H_{ψ} , c_{ψ} , $\mathbf{n}_{\psi}$ и $\lambda_{\mathbf{n}_{\psi}}$ соответственно. Если $0 < \mu < \nu \leq 1$, то всякая $[\mu]$ -спрямляемая кривая является $[\nu]$ -спрямляемой, т.е. с ростом ν класс $[\nu]$ -спрямляемых кривых расширяется. Основным результатом данной работы является

ТЕОРЕМА 1. Пусть Φ и ψ — логарифмически выпуклые ϕ -функции такие, что $\psi(x) \geq x$ при малых x и сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \psi\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right) < \infty, \quad (1)$$

где φ есть функция, обратная к Φ . Тогда всякая Φ -спрямляемая кривая $[\mathbf{n}_{\psi}]$ -спрямляема.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $\Phi(x)$ есть логарифмически выпуклая ϕ -функция, то при условии

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{1+\nu} \left(\frac{1}{n} \right) < \infty$$

всякая Φ -спрямляемая кривая является $[\nu]$ -спрямляемой.

В частности, всякая p -спрямляемая кривая $[\nu]$ -спрямляема при условии $1 \geq \nu > p - 1 > 0$, а при $p < 2$ всякая p -спрямляемая кривая $[1]$ -спрямляема.

Напротив, из $[\nu]$ -спрямляемости кривой, вообще говоря, не следует, что она p -спрямляема для какого-либо p . На это указывает

ТЕОРЕМА 2. Существует кривая γ , для которой $\sigma_p(\gamma) = \infty$ при любом $p \geq 1$, но $\lambda_1(\gamma) < \infty$.

2. Доказательства и комментарии. Доказательства теорем основываются на ряде лемм, первая из которых является известным результатом. Чтобы ее сформулировать, напомним определение так называемой Φ -вариации (см. [1], а также [2]). Если $\Phi(x)$ есть фиксированная ϕ -функция, то Φ -вариацией функции $x(t)$, заданной на отрезке $I = [0, 1]$, называют величину

$$v_{\Phi}(x) \equiv \sup_{\tau} \sum_{j=1}^{n(\tau)} \Phi(|x(t_j) - x(t_{j-1})|),$$

где верхняя грань берется по множеству всех разбиений отрезка I , т.е. конечных последовательностей $\tau = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ точек этого отрезка таких, что $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$, $n = n(\tau)$. Класс $V_{\Phi}(I)$ состоит из всех заданных на I функций конечной Φ -вариации. Хорошо известен следующий результат Юнга (см. [1, разд. 4]).

ЛЕММА 1. Пусть Φ и Ψ суть две логарифмически выпуклые ϕ -функции, а φ и ψ — их обратные функции. Если функции $x(t) \in V_{\Psi}(I)$ и $y(t) \in V_{\Phi}(I)$ не имеют на I общих точек разрыва и сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi \left(\frac{1}{n} \right) \psi \left(\frac{1}{n} \right) < \infty, \quad (2)$$

то интеграл Стильеса $\int_0^1 x dy$ существует и при $x(0) = 0$ допускает оценку

$$\left| \int_0^1 x dy \right| \leq \psi(v_{\Psi}(x)) \varphi(v_{\Phi}(y)) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi \left(\frac{v_{\Psi}(x)}{n} \right) \varphi \left(\frac{v_{\Phi}(y)}{n} \right).$$

Понятие Φ -вариации без труда переносится с отрезка на ориентированную кривую γ , поскольку использует лишь упорядоченность области определения функции. Обозначим

$$v_{\Phi}(x; \gamma) \equiv \sup_{\tau} \sum_{j=1}^{n(\tau)} \Phi(|x(z_j) - x(z_{j-1})|),$$

где верхняя грань берется по множеству всех разбиений кривой γ , а функция $x(z)$ определена на этой кривой. Аналогично, класс $V_\Phi(\gamma)$ состоит из всех заданных на γ функций конечной Φ -вариации. Нетрудно определить и интеграл Стильеса $\int_\gamma x dy$ по ориентированной кривой γ . Он существует и равен A , если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\left| A - \sum_{j=1}^{n(\tau)} x(w_j)(y(z_j) - y(z_{j-1})) \right| \leq \varepsilon$$

для любого разбиения τ такого, что $|z_j - z_{j-1}| \leq \delta$, $j = 1, 2, \dots, n(\tau)$, и любых точек $w_1, w_2, \dots, w_n$ таких, что $a = z_0 \preccurlyeq w_1 \preccurlyeq z_1 \preccurlyeq w_2 \preccurlyeq \dots \preccurlyeq w_n \preccurlyeq z_n = b$. Далее, пусть $\zeta = \zeta(t)$ есть непрерывное взаимно однозначное отображение I на γ , причем $\zeta(0) = a$, $\zeta(1) = b$. Очевидно, интегралы Стильеса $\int_\gamma x dy$ и $\int_0^1 x(\zeta(t)) dy(\zeta(t))$ существуют или не существуют одновременно, причем в первом случае они совпадают. Поэтому из леммы 1 немедленно следует

ЛЕММА 2. Пусть Φ и Ψ суть две логарифмически выпуклые ϕ -функции, а φ и ψ — их обратные функции. Если функции $x(z) \in V_\Psi(\gamma)$ и $y(z) \in V_\Phi(\gamma)$ не имеют на γ общих точек разрыва и сходится ряд (2), то интеграл Стильеса $\int_\gamma x dy$ существует и при $x(a) = 0$ допускает оценку

$$\left| \int_\gamma x dy \right| \leq \psi(v_\Psi(x; \gamma)) \varphi(v_\Phi(y; \gamma)) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi\left(\frac{v_\Psi(x; \gamma)}{n}\right) \varphi\left(\frac{v_\Phi(y; \gamma)}{n}\right).$$

Пусть теперь $y(z) \equiv z$. Тогда $v_\Phi(y; \gamma) = \sigma_\Phi(\gamma)$ и результат леммы 2 приобретает следующий вид.

ЛЕММА 3. Пусть Φ и Ψ суть две логарифмически выпуклые ϕ -функции, а φ и ψ — их обратные функции. Если кривая γ является Φ -спрямляемой, $x(z) \in V_\Psi(\gamma)$ и сходится ряд (2), то интеграл Стильеса $\int_\gamma x dz$ существует и при $x(a) = 0$ допускает оценку

$$\left| \int_\gamma x(z) dz \right| \leq \psi(v_\Psi(x; \gamma)) \varphi(\sigma_\Phi(\gamma)) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi\left(\frac{v_\Psi(x; \gamma)}{n}\right) \varphi\left(\frac{\sigma_\Phi(\gamma)}{n}\right). \quad (3)$$

Теперь мы можем выяснить при каких условиях существует интеграл Стильеса от многочлена по неспрямляемой дуге.

ЛЕММА 4. Пусть Φ есть логарифмически выпуклая ϕ -функция, кривая γ является Φ -спрямляемой и $f \in \mathbb{P}$. Тогда интеграл Стильеса $\int_\gamma f dz$ существует при условии сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^2\left(\frac{1}{n}\right) < \infty. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, $\mathbb{P} \subset H_1(\gamma)$, т.е. для любых точек $z_1 \in \gamma$ и $z_2 \in \gamma$ справедливо неравенство $|f(z_1) - f(z_2)| \leq h_1|z_1 - z_2|$, $h_1 = h_1(f)$. Положим $f^*(z) = f(z)/h_1$. Тогда $|f^*(z_1) - f^*(z_2)| \leq |z_1 - z_2|$ и, следовательно, $v_\Phi(f^*; \gamma) \leq \sigma_\Phi(\gamma)$. Таким образом, $f^* \in V_\Phi(\gamma)$ и в силу леммы 3 интеграл $\int_\gamma f^* dz$ существует при условии сходимости ряда (4). Но тогда, очевидно, существует и интеграл

$$\int_\gamma f dz = h_1 \int_\gamma f^* dz.$$

ЛЕММА 5. Пусть Φ есть логарифмически выпуклая ϕ -функция, для которой сходится ряд (4), кривая γ является Φ -спрямляемой и $f \in \mathbb{P}$. Тогда

$$\int_\gamma f' dz = f(b) - f(a). \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предыдущей леммы интеграл в левой части равенства (5) существует. Очевидно, интеграл $\int_\gamma df$ также существует и равен $f(b) - f(a)$. Таким образом, мы должны доказать равенство

$$\int_\gamma f' dz = \int_\gamma df, \quad (6)$$

причем существование интегралов в обеих его частях уже установлено. Рассмотрим любое разбиение $\tau = \{z_0, z_1, \dots, z_n\}$ дуги γ . Обозначим через s_j прямолинейный отрезок, соединяющий точки z_{j-1} и z_j . Тогда одна из интегральных сумм, соответствующих левой части (6), имеет вид

$$S_1 = \sum_{j=1}^n f'(z_{j-1})(z_j - z_{j-1}) = \sum_{j=1}^n \int_{s_j} f'(z_{j-1}) dz,$$

а интегральная сумма для правой части (6) есть

$$S_2 = \sum_{j=1}^n f(z_j) - f(z_j) = \sum_{j=1}^n \int_{s_j} f'(z) dz.$$

Разность этих сумм допускает оценку

$$|S_1 - S_2| \leq \sum_{j=1}^n \int_{s_j} |f'(z) - f'(z_{j-1})| |dz| \leq h_1(f') \sum_{j=1}^n |z_j - z_{j-1}|^2.$$

Очевидно, $|z_j - z_{j-1}|^2 = \varphi^2(\Phi(|z_j - z_{j-1}|))$. Поскольку последовательность чисел $\varphi^2(1/n)$, $n = 1, 2, \dots$, монотонно убывает и ряд (4) сходится, то $\varphi^2(1/n) = o(1/n)$ (см., например, [3]). Поэтому функция $\rho(x) \equiv \varphi^2(x)/x$ стремится к 0 при $x \rightarrow 0$; тогда этим

свойством обладает и функция $\rho^*(x) = \max\{\rho(x') : 0 < x' \leq x\}$. Теперь мы можем продолжить оценку разности интегральных сумм:

$$|S_1 - S_2| \leq h_1(f') \sum_{j=1}^n \rho(\Phi(|z_j - z_{j-1}|)) \Phi(|z_j - z_{j-1}|) \leq h_1(f') \sigma_\Phi(\gamma) \rho^*(\Phi(\delta)),$$

где $\delta = \max\{|z_j - z_{j-1}| : j = 1, 2, \dots, n(\tau)\}$. Итак, эта разность стремится к нулю вместе с δ , что и завершает доказательство леммы.

Теперь мы можем закончить доказательство теоремы 1. Пусть $f \in \mathbb{P}_0$ и $f' \in \mathbb{P}^*$. Поскольку $\psi(x) \geq x$ при малых x , то сходимости ряда (1) влечет выполнение условия (4). Тогда согласно двум последним леммам интеграл $\int_\gamma f' dz$ существует и равен $f(b)$. Как уже отмечалось, при условии ограниченности величины $x/\psi(x)$ пространство $H_\psi(\gamma)$ содержит все многочлены. Обозначим $f_1(z) = (f'(z) - f'(a))/c_\psi(f')$. Очевидно,

$$f(b) = f'(a)(b - a) + c_\psi(f') \int_\gamma f_1 dz. \quad (7)$$

Поскольку $|f_1(z') - f_2(z'')| \leq \psi(|z' - z''|)$ для любых $z' \in \gamma$ и $z'' \in \gamma$, то $f_1 \in V_\Xi(\gamma)$, где $\Xi(x) = \Phi(\Psi(x))$, и $v_\Xi(f_1) \leq \sigma_\Phi(\gamma)$. Обратная к $\Xi(x)$ функция есть $\xi(x) = \psi(\varphi(x))$, поэтому при выполнении условия (1) мы согласно (3) имеем

$$\left| \int_\gamma f_1(z) dz \right| \leq \psi(\varphi(\sigma)) \varphi(\sigma) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi\left(\varphi\left(\frac{\sigma}{n}\right)\right) \varphi\left(\frac{\sigma}{n}\right), \quad (8)$$

где $\sigma = \sigma_\Phi(\gamma)$. Обозначим правую часть (8) через $Z_{\varphi, \psi}(\sigma)$. Эта величина не зависит от f . Теперь из (7) следует оценка

$$|f(b)| \leq n_\psi(f') \max\{|b - a|, Z_{\varphi, \psi}(\sigma_\Phi(\gamma))\},$$

которая означает, что кривая γ является $[n_\psi]$ -спрямляемой. Теорема доказана.

Отметим, что при условиях этой теоремы $|b - a| = \varphi(\Phi(|b - a|)) \leq \varphi(\sigma_\Phi(\gamma))$. Поэтому из доказательства теоремы 1 следует оценка

$$\lambda_{n_\psi}(\gamma) \leq \max\{\varphi(\sigma), Z_{\varphi, \psi}(\sigma)\}, \quad \sigma = \sigma_\Phi(\gamma),$$

означающая, что при фиксированных Φ и ψ “длина” $\lambda_{n_\psi}(\gamma)$ оценивается сверху величиной, зависящей только от “длины” $\sigma_\Phi(\gamma)$.

Положив в теореме 1 $\psi(x) = x^\nu$, получаем следствие 1. Это следствие влечет, в частности, доказанное в [4] утверждение о $[\nu]$ -спрямляемости любой p -спрямляемой кривой при условии $\nu > p - 1$. Докажем теперь теорему 2, показывающую, что обратное утверждение неверно. Ее доказательство основано на следующем достаточном условии $[1]$ -спрямляемости, установленном в [4].

ЛЕММА 6. Если кривая γ имеет нулевую площадь и однозначная в $\mathbb{C} \setminus \gamma$ функция

$$K_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \log \frac{z-b}{z-a}$$

интегрируема в любой конечной части плоскости, то $\lambda_1(\gamma) < \infty$.

Теперь для доказательства теоремы 2 достаточно фиксировать три монотонно убывающие и стремящиеся к нулю последовательности вещественных чисел $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{\varepsilon_n\}$ такие, что $\varepsilon_n < x_n - x_{n+1}$ при $n = 1, 2, \dots$, и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^p = \infty$ для любого $p \geq 1$, и рассмотреть кривую γ , состоящую из горизонтальных отрезков $[x_{n+1}, x_n - \varepsilon_n]$ и $[x_n - \varepsilon_n + iy_n, x_n + iy_n]$ и вертикальных отрезков $[x_n, x_n + iy_n]$ и $[x_n - \varepsilon_n, x_n - \varepsilon_n + iy_n]$, где $n = 1, 2, \dots$. Очевидно, эта кривая имеет нулевую площадь, и особенности функции $K_\gamma(z)$ вблизи ее концов 0 и x_1 имеют логарифмический порядок роста, т.е. эта функция интегрируема в любой конечной части плоскости в сколь угодно высокой степени. Поэтому эта кривая [1]-спрямляема в силу последней леммы. Но предположение о p -спрямляемости этой кривой влечет сходимость ряда $\sum y_n^p$, и поэтому эта кривая не является p -спрямляемой ни при каком $p \geq 1$.

Таким образом, обобщенная спрямляемость в смысле определения 1 влечет спрямляемость в гёльдеровской шкале в смысле определения 2, но не эквивалентна ей. Было бы интересно описать шкалу норм, спрямляемость относительно которых эквивалентна p -спрямляемости.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Young L. C. General inequalities for Stieltjes integrals and the convergence of Fourier series // Math. Ann. 1938. V. 115. № 4. P. 581–612.
- [2] Lesniewicz R., Orlicz W. On generalized variation. II // Studia Math. 1973. V. 45. № 1. P. 71–109.
- [3] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II. М.: Наука, 1969.
- [4] Kats B. A. The inequalities for polynomials and integration over fractal arcs // Canad. Math. Bull. (to appear).