Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Н. Герман, Асимптотические направления для наилучших приближений n -мерной линейной формы, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 1, 55–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 12:59:08

УДК 512.64+511.361

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ НАПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ n -МЕРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ФОРМЫ

О. Н. Герман

Доказаны некоторые факты об асимптотических направлениях для наилучших приближений линейных форм, аналогичные известным результатам для наилучших совместных приближений.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. В этой работе мы будем исследовать асимптотические направления для наилучших приближений и односторонних наилучших приближений линейных форм и получим для них результаты, аналогичные результатам К. А. Роджерса (см. [1], [2]) и Н. Г. Мощевитина (см. [3]) для наилучших совместных приближений.

Введем несколько обозначений, которыми мы будем пользоваться на протяжении всей работы. Для $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ положим $\underline{x} = (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Для $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ положим $\mathbb{M}_n(x) = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 \in \mathbb{Z}\}$. Иначе говоря, $\mathbb{M}_n(x) = \{X \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid \underline{X} = x\}$. Для $\alpha \in \mathbb{R}^n$ положим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}, & \mathcal{L}_\alpha(x) &= (\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n), \\ \overline{\mathcal{L}_\alpha}: \mathbb{R}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R}, & \overline{\mathcal{L}_\alpha}(X) &= (X_0 + \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n). \end{aligned}$$

Пусть $\|\cdot\|$ – расстояние до ближайшего целого числа, $\{\cdot\}$ – дробная часть числа, $|\cdot|$ – произвольная фиксированная норма в $\mathbb{R}^n$, задаваемая выпуклой симметричной лучевой функцией $f(x)$, $B_f^\delta(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - \alpha| \leq \delta\}$, $S_f = \partial B_f^1(0)$, $S_f^* = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in S_f \mid x_1, \dots, x_n \text{ линейно независимы над } \mathbb{Z}\}$. Ясно, что S_f^* всюду плотно в S_f .

Определим функцию натурального аргумента $\Delta(n)$ следующим образом. Положим $\Delta(1)$ равным произвольному фиксированному числу, меньшему $29/22$. При $n \geq 2$ положим $\Delta(n) = 1$.

Мы будем считать, что норма $|\cdot|$ такова, что в единичном шаре $B_f^1(0)$ есть ненулевые целые точки, причем все они лежат на границе этого шара. Это требование не ограничивает общности, однако оно помогает избежать лишних нагромождений при определении некоторых констант.

2. Наилучшие приближения и односторонние наилучшие приближения линейных форм.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00912, и INTAS.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{Z}^n$ и $\|\mathcal{L}_\alpha(m)\| < \|\mathcal{L}_\alpha(m')\|$ для любого $m' \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0, \pm m\}$ такого, что $|m'| \leq |m|$, то m будем называть *f-наилучшим приближением* (сокращенно *f-НП*) линейной формы $\mathcal{L}_\alpha$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Если $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{Z}^n$ и $\{\mathcal{L}_\alpha(m)\} < \{\mathcal{L}_\alpha(m')\}$ для любого $m' \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0, m\}$ такого, что $|m'| \leq |m|$, то m будем называть *односторонним f-наилучшим приближением* (сокращенно *f-ОНП*) линейной формы $\mathcal{L}_\alpha$.

Определение 1 является классическим. Определение 2 уже в одномерном случае отличается от классического определения (последнее см., например, в [4]).

Из определения 1 видно, что если m является *f-НП* линейной формы $\mathcal{L}_\alpha$, то и $-m$ также является *f-НП* $\mathcal{L}_\alpha$. То есть множество всех *f-НП* $\mathcal{L}_\alpha$ разбивается на пары точек. Более того, ясно, что если m – такое *f-НП* $\mathcal{L}_\alpha$, что $0 < \{\mathcal{L}_\alpha(m)\} < 1/2$, то m является еще и *f-ОНП* $\mathcal{L}_\alpha$. В обратную сторону: если m – *f-ОНП* $\mathcal{L}_\alpha$, то m – *f-НП* $\mathcal{L}_\alpha$. Таким образом, множество всех *f-ОНП* $\mathcal{L}_\alpha$ – это “половина” множества всех *f-НП* $\mathcal{L}_\alpha$.

В работе мы будем исследовать линейные формы только для тех $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, для которых $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ линейно независимы вместе с единицей над $\mathbb{Z}$. В этом (и только в этом) случае множество всех *f-НП* $\mathcal{L}_\alpha$ бесконечно.

Упорядочим все *f-ОНП* линейной формы $\mathcal{L}_\alpha$ по возрастанию нормы $|m|$. Получим последовательность $\{m_i\}_{i=1}^\infty$. Ясно, что множество $\{\pm m_i\}_{i=1}^\infty$ – это множество всех *f-НП* $\mathcal{L}_\alpha$.

Если для произвольной ненулевой точки m соответствующим направлением m^* в норме $|\cdot|$ назвать точку $m^* = m/|m| \in S_f$, то последовательности $\{m_i\}_{i=1}^\infty$ *f-ОНП* $\mathcal{L}_\alpha$ будет однозначно соответствовать последовательность $\{m_i^*\}_{i=1}^\infty$ направлений *f-ОНП* $\mathcal{L}_\alpha$ (все точки этой последовательности различны).

На направления последовательных наилучших приближений не имеется никаких ограничений. Однако, направления последовательных *односторонних* наилучших приближений не могут находиться слишком близко друг к другу. Для этих направлений имеет место факт, аналогичный теореме о направлениях отклонений наилучших совместных приближений из [3].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{m_i\}_{i=1}^\infty$ – последовательные *f-ОНП* $\mathcal{L}_\alpha$, а $\{m_i^*\}_{i=1}^\infty$ – направления последовательных *f-ОНП* $\mathcal{L}_\alpha$. Тогда

$$m_i \notin \text{int } B_f^{|m_{i+1}|}(m_{i+1}), \quad m_i^* \notin \text{int } B_f^1(m_{i+1}^*).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению *f-ОНП* в слое

$$H_i = \{x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |\underline{x}| < |m_{i+1}|, |\overline{\mathcal{L}_\alpha(x)}| < \{\mathcal{L}_\alpha(m_i)\}\}$$

ненулевых целых точек нет.

Имеет место неравенство $\{\mathcal{L}_\alpha(m_{i+1})\} < \{\mathcal{L}_\alpha(m_i)\}$, откуда получаем, что

$$\{\mathcal{L}_\alpha(m_i - m_{i+1})\} < \{\mathcal{L}_\alpha(m_i)\}.$$

Допустим теперь, что $m_i \in \text{int } B_f^{|m_{i+1}|}(m_{i+1})$, т.е. что

$$|m_i - m_{i+1}| < |m_{i+1}|.$$

Тогда получим, что существует ненулевая целая точка из $\mathbb{M}_n(m_i - m_{i+1})$, которая попадает в H_i . Пришли к противоречию. Стало быть,

$$m_i \notin \text{int } B_f^{|m_{i+1}|}(m_{i+1}).$$

Из этого соотношения следует, что

$$m_i^* \frac{|m_i|}{|m_{i+1}|} = \frac{m_i}{|m_{i+1}|} \notin \text{int } B_f^1(m_{i+1}^*).$$

Поскольку $0 \in \partial B_f^1(m_{i+1}^*)$, а $m_i^* \frac{|m_i|}{|m_{i+1}|}$ — внутренняя точка отрезка $[0, m_i^*]$, в силу выпуклости $B_f^1(m_{i+1}^*)$ имеем

$$m_i^* \notin \text{int } B_f^1(m_{i+1}^*).$$

Заметим, что если норма $|\cdot|$ строго выпукла, то $m_i^* \notin B_f^1(m_{i+1}^*)$, так как иначе $m_i^* \frac{|m_i|}{|m_{i+1}|}$ будет внутренней точкой шара $B_f^1(m_{i+1}^*)$.

3. Асимптотические направления.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $\{m_i\}_{i=1}^\infty$ — множество всех f -ОНП $\mathcal{L}_\alpha$. Тогда $\omega \in S_f$ будем называть *асимптотическим направлением для f -ОНП* линейной формы $\mathcal{L}_\alpha$, если ω является предельной точкой последовательности $\{m_i^*\}_{i=1}^\infty$. Соответственно, ω будем называть *асимптотическим направлением для f -НП* линейной формы $\mathcal{L}_\alpha$, если ω является предельной точкой множества $\{\pm m_i^*\}_{i=1}^\infty$.

Очевидно, что для любого $\alpha \in \mathbb{R}^n$ множество всех асимптотических направлений для f -ОНП $\mathcal{L}_\alpha$ замкнуто. Однако в силу теоремы 1 не для всякого компакта Ω на сфере S_f найдется такое $\alpha \in \mathbb{R}^n$, что множество всех асимптотических направлений для f -ОНП $\mathcal{L}_\alpha$ совпадает с Ω . Например, Ω не может иметь диаметр, меньший 1, так как тогда, начиная с некоторого момента, никакие два элемента последовательности $\{m_i^*\}_{i=1}^\infty$ не будут удовлетворять соотношению из теоремы 1. Тем не менее, наложив на множество Ω некоторые ограничения, мы докажем аналог теоремы 6 из [3] для наилучших совместных приближений. Для этого нам понадобится понятие *освещаемых точек*. Вообще говоря, существует несколько определений освещаемости. Мы будем пользоваться определением из [5].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть M — замкнутое выпуклое множество, $b \in \partial M$, $a \notin M$. Тогда будем говорить, что M *освещается точкой a в точке b* , если существует такое $\lambda > 0$, что $b + \lambda(b - a)$ содержится в $\text{int } M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Множество $\Omega \subseteq S_f$ будем называть *асимптотически допустимым*, если на сфере S_f найдется последовательность $\{\theta_k\}_{k=1}^\infty$ такая, что

- 1) для любого k множество $B_f^1(\theta_{k+1})$ освещается точкой θ_k в точке начала координат;
- 2) Ω совпадает с множеством всех предельных точек последовательности $\{\theta_k\}$.

Из второго пункта этого определения видно, что всякое асимптотически допустимое множество непусто и замкнуто. Ясно, что асимптотически допустимые множества существуют. Более того, множество асимптотически допустимых множеств весьма велико. Например, любое замкнутое множество на сфере S_f , в котором есть хотя бы одна пара центрально симметричных точек, является асимптотически допустимым (см. следствие из леммы 3).

ТЕОРЕМА 2. Пусть Ω – асимптотически допустимое множество на сфере S_f . Тогда существует континуальный набор векторов α из $\mathbb{R}^n$ такой, что для любого α из этого набора множество всех асимптотических направлений для f -ОНП $\mathcal{L}_\alpha$ совпадает с Ω .

Заметим, что теорему 6 из [3] можно сформулировать в более общей форме, если воспользоваться определением 5 асимптотически допустимых множеств в терминах освещаемых точек.

Теорему 2 мы получим как следствие следующей теоремы. Она составляет основной результат работы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\{\omega_i\}_{i=1}^\infty \subset S_f^*$ – такая последовательность, что для любого i множество $B_f^1(\omega_{i+1})$ освещается точкой ω_i в точке начала координат. Пусть $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+$, ε_i убывает к 0 сколь угодно быстро при $i \rightarrow \infty$. Пусть к тому же существует целая точка $m \in S_f$, освещающая множество $B_f^1(\omega_2)$ в точке начала координат, такая, что $|\omega_1 - m| \leq \varepsilon_1$. Тогда существует такое $\alpha \in \mathbb{R}^n$, что для последовательности $\{m_i\}_{i=1}^\infty$ всех f -ОНП $\mathcal{L}_\alpha$ выполняется

$$\left| \omega_i - \frac{m_i}{|m_i|} \right| \leq \varepsilon_i |m_i|^{-\Delta(n-1)} \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что в доказательстве теоремы 3, наряду с техникой, напоминающей технику работы [6], используются диофантовы неравенства с простыми числами, недавно полученные Г. Харманом [7], [8]. Отметим также, что более слабый результат (для $\Delta(n) \equiv 0$) можно получить без использования сложных результатов о разрешимости диофантовых неравенств с простыми числами.

Рассмотрим теперь f -НП $\mathcal{L}_\alpha$. Из определения 3 видно, что для любого $\alpha \in \mathbb{R}^n$ множество всех асимптотических направлений для f -НП $\mathcal{L}_\alpha$ замкнуто и центрально симметрично. Из теоремы 2 следует обращение этого факта.

ТЕОРЕМА 4. Пусть Ω – центрально симметричное замкнутое множество на сфере S_f . Тогда существует континуальный набор векторов α из $\mathbb{R}^n$ такой, что для любого α из этого набора множество всех асимптотических направлений для f -НП $\mathcal{L}_\alpha$ совпадает с Ω .

Действительно, любое центрально симметричное множество на сфере S_f является асимптотически допустимым. Но если Ω – множество всех асимптотических направлений для f -ОНП $\mathcal{L}_\alpha$, то $\Omega \cup (-\Omega)$ – множество всех асимптотических направлений для f -НП $\mathcal{L}_\alpha$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из определения асимптотических направлений видно, что множество всех асимптотических направлений для f -ОНП $\mathcal{L}_\alpha$ пусто тогда и только тогда, когда $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ линейно зависимы вместе с единицей над $\mathbb{Z}$. Поэтому теоремы 2 и 4 верны и для пустых множеств.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. К. А. Роджерс в своей работе [1] рассматривает совместные приближения порядка $O(f(x))$ для $f(x) = o(1)$ и порядка $o(f(x))$ для $f(x) = O(1)$. Им доказано, что для произвольной функции $f(x)$ порядка $o(1)$ и произвольного непустого замкнутого подмножества Ω единичной сферы, симметричного относительно начала координат, найдется вектор, для которого множества асимптотических направлений порядка $O(f(x))$ и порядка $o(f(x))$ совпадают с Ω , что весьма напоминает теорему 4.

4. Некоторые свойства освещаемости.

ЛЕММА 1. *Множество точек, освещающих M в точке b , является открытым конусом с вершиной в точке b .*

Лемма 1 очевидна, и мы ее не доказываем.

ЛЕММА 2. *Множество точек $x \in \mathbb{R}^n$ таких, что точка a освещает шар $B_f^{|x-b|}(x)$ в точке b , является открытым конусом с вершиной в точке b .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть точка a освещает $B_f^{|x-b|}(x)$ в точке b . Тогда по определению существует такое $\lambda > 0$, что $b + \lambda(b - a)$ содержится вместе с некоторой своей окрестностью в $B_f^{|x-b|}(x)$. Стало быть, существует такая окрестность точки x , что для любого y из этой окрестности шар $B_f^{|y-b|}(y)$ содержит точку $b + \lambda(b - a)$. Открытость доказана.

Пусть $\mu > 0$. Тогда если

$$b + \lambda(b - a) \in \text{int } B_f^{|x-b|}(x),$$

то, очевидно,

$$b + \lambda\mu(b - a) \in \text{int } B_f^{|\mu(x-b)|}(b + \mu(x - b)),$$

что доказывает лемму.

ЛЕММА 3. *Пусть $a, b \in S_f$ и пусть $[0, a] \cap \text{int } B_f^1(b) = \emptyset$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие точки $a', b' \in S_f$, что $|a - a'| < \varepsilon$, $|b - b'| < \varepsilon$ и a' освещает $B_f^1(b')$ в точке начала координат.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $0 \in \text{int } B_f^1(0)$, а множество $B_f^1(0)$ выпукло, то внутренность 2-мерного (или 1-мерного) множества $\langle a, b \rangle_{\mathbb{R}} \cap B_f^1(b)$ содержится в $\text{int } B_f^1(b)$. Следовательно, достаточно доказать лемму в размерности $n = 2$.

Если $n = 2$, то прямая $\langle b \rangle_{\mathbb{R}}$ делит все пространство на две полуплоскости, левую и правую. Пусть точка a лежит в правой полуплоскости. Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ для любой точки $b' \in S_f$ из левой ε -окрестности точки b выполняется $[0, a] \cap \text{int } B_f^1(b') = \emptyset$. Далее, из теоремы Лебега о дифференцируемости монотонной функции почти всюду следует, что выпуклая на отрезке функция также почти всюду дифференцируема. Следовательно, в левой ε -окрестности точки b можно найти точку b' , в которой существует касательная к шару $B_f^1(0)$. В ε -окрестности a можно найти точку a' , не лежащую на этой касательной и для которой тоже выполняется $[0, a'] \cap \text{int } B_f^1(b') = \emptyset$. Но тогда для некоторого $\lambda > 0$ $-\lambda a' \in \text{int } B_f^1(b')$, т.е. a' освещает $B_f^1(b')$ в точке начала координат.

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть $\Omega \subset S_f$ – замкнутое множество, в котором есть хотя бы одна пара центрально-симметричных точек $\pm\omega$. Тогда Ω асимптотически допустимо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим пространство Θ последовательностей $\{\theta_k\}_{k=1}^{\infty} \subset S_f$ и определим отображение $\varphi_{\omega} : \Theta \rightarrow \Theta$ следующим образом. Пусть $\theta \in \Theta$ и пусть k_o – минимальное k такое, что θ_k не освещает $B_f^1(\theta_{k+1})$ в точке начала координат. Из выпуклости нормы $|\cdot|$ очевидным образом следует, что найдутся такие точки $\tau_1, \tau_2 \in \{\pm\omega\}$, что $[0, \theta_{k_o}] \cap \text{int } B_f^1(\tau_1) = \emptyset$ и $[0, \tau_2] \cap \text{int } B_f^1(\theta_{k_o+1}) = \emptyset$. По лемме 3 найдутся такие

точки $\theta'_{k_o}, \tau'_1 \in S_f$, что $|\theta_{k_o} - \theta'_{k_o}| < 2^{-k_o}$, $|\tau_1 - \tau'_1| < 2^{-k_o}$ и θ'_{k_o} освещает $B_f^1(\tau'_1)$ в точке начала координат. В силу лемм 1, 2 точки θ'_{k_o}, τ'_1 можно выбрать таким образом, чтобы θ_{k_o-1} освещала шар $B_f^1(\theta'_{k_o})$, а τ'_1 – шар $B_f^1(-\tau_1)$ в точке начала координат.

Возможны два случая: $\tau_1 = \tau_2$ и $\tau_1 = -\tau_2$. Для удобства положим $\tau'' = -\tau_1$, если $\tau_1 = \tau_2$ и $\tau'' = \tau'_1$, если $\tau_1 = -\tau_2$. Применим опять лемму 3, на этот раз к точкам τ_2, θ_{k_o+1} . Получим точки $\tau'_2, \theta'_{k_o+1} \in S_f$ такие, что $|\tau_2 - \tau'_2| < 2^{-k_o}$, $|\theta_{k_o+1} - \theta'_{k_o+1}| < 2^{-k_o}$ и τ'_2 освещает $B_f^1(\theta'_{k_o+1})$ в точке начала координат. И вновь в силу леммы 2 точку τ'_2 можно выбрать таким образом, чтобы τ'' освещала шар $B_f^1(\tau'_2)$ в точке начала координат.

Перейдем непосредственно к определению $\varphi_\omega(\theta)$. Если $\tau_1 = \tau_2$, то заменим фрагмент $\{\theta_{k_o}, \theta_{k_o+1}\}$ последовательности θ на $\{\theta'_{k_o}, \tau'_1, -\tau_1, \tau'_2, \theta'_{k_o+1}\}$, а если $\tau_1 = -\tau_2$, – то на $\{\theta'_{k_o}, \tau'_1, \tau'_2, \theta'_{k_o+1}\}$. Получившуюся последовательность и возьмем в качестве $\varphi_\omega(\theta)$.

Рассмотрим теперь последовательность $\theta = \{\theta_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \Omega$, всюду плотную в Ω , и положим

$$\theta' = \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_\omega^m(\theta).$$

Нетрудно видеть, что последовательность θ' удовлетворяет всем требованиям определения 5. Следовательно, множество Ω асимптотически допустимо.

5. Аналог теоремы о сигнатуре для односторонних наилучших приближений линейных форм. Сигнатурой вектора $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ называется набор $\text{sign } \omega = (\text{sign } \omega_1, \dots, \text{sign } \omega_n)$. Для обычных ОНП $\mathcal{L}_\alpha$, т.е. в случае, когда $|x| = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$, из теоремы 1 следует, что $\text{sign } m_{k+1} \neq \text{sign } m_k$. Для наилучших совместных приближений аналогичный факт был доказан Роджерсом [2] и впоследствии был обобщен Мошевитиным [3].

Для наилучших совместных приближений в [9] показано, что для любой последовательности сигнатур $\{\sigma_i\}_{i=1}^\infty$ такой, что $\sigma_i \neq \sigma_{i+1}$, существует набор $\alpha \in \mathbb{R}^n$ чисел $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, независимых вместе с 1 над $\mathbb{Z}$, таких, что $\text{sign } \xi_i = \sigma_i$, где ξ_i – отклонение от i -го наилучшего приближения вектора α .

Докажем аналогичный факт для обычных ОНП $\mathcal{L}_\alpha$. Пусть далее в этом разделе $|x| = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$.

ТЕОРЕМА 5. Если задана последовательность сигнатур $\{\sigma_i\}_{i=1}^\infty$ такая, что $\sigma_i \neq \sigma_{i+1}$ и все координаты этих сигнатур отличны от нуля, то существует вектор $\alpha \in \mathbb{R}^n$ такой, что $\text{sign } m_i = \sigma_i$ для всех i , где m_i – i -е ОНП $\mathcal{L}_\alpha$.

Для доказательства теоремы 5 построим индукцией по i последовательность $\{\omega_i\}_{i=1}^\infty \subset S_f^*$ такую, что $\text{sign } \omega_i = \sigma_i$ и ω_i освещает $B_f^1(\omega_{i+1})$ в точке начала координат. Для сигнатуры σ положим

$$U(\sigma) = \{x \in S_f^* \mid \text{sign } x = \sigma\}.$$

ЛЕММА. Пусть σ, σ' – различные сигнатуры без нулевых координат. Тогда в $U(\sigma')$ найдется такая точка ω' , что любая точка $\omega \in U(\sigma)$ освещает множество $B_f^1(\omega')$ в точке начала координат.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\sigma \neq \sigma'$, существует такое число $j \in \{1, \dots, n\}$, что $U(\sigma)$ и $U(\sigma')$ лежат по разные стороны от координатной гиперплоскости $\pi = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_j = 0\}$.

В качестве ω' возьмем любую точку из множества $\{x \in U(\sigma') \mid |x_j| = 1, |x_i| \neq 1, i \neq j\}$. Тогда множество $U(\sigma)$ и шар $B_f^1(\omega')$ находятся по разные стороны от плоскости

π , причем начало координат лежит во внутреннейности $(n-1)$ -мерной грани шара $B_f^1(\omega')$, откуда и следует утверждение леммы.

Эта лемма доказывает шаг индукции. Основание индукции очевидно. В итоге получаем последовательность $\{\omega_i\}_{i=1}^\infty \subset S_f^*$ такую, что $\text{sign } \omega_i = \sigma_i$ и ω_i освещает $B_f^1(\omega_{i+1})$ в точке начала координат при любом i . Возьмем теперь подходящую последовательность $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^\infty$ и применим теорему 3. Получим требуемую линейную форму.

Заметим, что из теоремы 4 работы [3] следует аналогичный результат для наилучших совместных приближений, полученный ранее в [9]. Эту теорему можно сформулировать в более общей форме, если воспользоваться понятием освещаемости.

ТЕОРЕМА 6. Пусть последовательность $\{\theta_i\}_{i=1}^\infty \subset S_f$ такова, что для любого i множество $B_f^1(\theta_i)$ освещается точкой θ_{i+1} в точке начала координат. Тогда существует набор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ чисел, линейно независимых вместе с единицей над $\mathbb{Z}$, такой, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left| \theta_i - \frac{\xi_i}{|\xi_i|} \right| = 0,$$

где $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ – последовательность отклонений от всех наилучших совместных приближений вектора α .

Не удивительно, что для совместных приближений α в теореме 6 мы требуем “обратную” освещаемость, в отличие от теоремы 3 для ОНП $\mathcal{L}_\alpha$. Такое же явление наблюдается и в результатах типа теоремы 1.

Как было сказано выше, из теоремы 6 следует

ТЕОРЕМА 7. Если задана последовательность сигнатур $\{\sigma_i\}_{i=1}^\infty$ такая, что $\sigma_i \neq \sigma_{i+1}$ и все координаты этих сигнатур отличны от нуля, то существует вектор $\alpha \in \mathbb{R}^n$ такой, что $\text{sign } \xi_i = \sigma_i$ для всех i , где ξ_i – отклонение от i -го наилучшего приближения вектора α .

Вывод теоремы 7 из теоремы 6 аналогичен выводу теоремы 5 из теоремы 3. Единственным существенным отличием является то, что нужно строить последовательность $\{\theta_i\}_{i=1}^\infty$ такую, что $\text{sign } \theta_i = \sigma_i$ и θ_{i+1} освещает $B_f^1(\theta_i)$ в точке начала координат. Если уже выбраны θ_i , $i \leq k$, то в зависимости от того, каково σ_{k+2} , выбираем $\theta_{k+1} \in U(\sigma_{k+1})$, пользуясь все той же леммой.

Хотелось бы сделать еще одно замечание по поводу теоремы 6. В тексте доказательства этой теоремы в [3] имеется недочет, который легко устранить, если на ν -м шаге индукции требовать вдобавок ко всему, чтобы для всех $k = 1, 2, \dots, \nu - 2$ на боковых поверхностях цилиндров

$$\Omega_k = \{z = (x, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| < p_{k+1}, f(\alpha x - y) < f(\xi_k)\}$$

не было целых точек, кроме наилучших приближений.

6. Вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 4. Пусть $x^1, x^2, x^3 \in \mathbb{R}^{n+1}$. Пусть $\overline{\mathcal{L}_\alpha}(x^i) = 0$ для всех $\alpha \in \pi \subset \mathbb{R}^n$, где π – некоторая $(n-2)$ -мерная плоскость, $0 \notin \pi$. Тогда x^1, x^2, x^3 линейно зависимы над $\mathbb{R}$.

Лемма 4 очевидна и мы ее не доказываем.

ЛЕММА 5. Пусть вектор $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$ таков, что $\omega_1, \dots, \omega_n$ линейно независимы вместе с 1 над $\mathbb{Z}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда существует бесконечно много простых q и точек $b \in \mathbb{Z}^n$ таких, что

$$|q\omega - b| \leq \varepsilon q^{1-\Delta(n)}.$$

Если $n = 1$, то лемма 5 вытекает из следующей теоремы, доказанной Г. Харманом [7], которая является усилением известной теоремы Виноградова [10].

ТЕОРЕМА. Пусть α иррационально. Тогда для всех действительных β существует бесконечно много простых q таких, что

$$\|\alpha q + \beta\| < q^{-7/22}.$$

Если же $n \geq 2$, то лемма 5 следует из того факта, что

$$\liminf_{q \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} \|q\omega_i\| = 0,$$

если $\omega_1, \dots, \omega_n$ линейно независимы вместе с 1 над $\mathbb{Z}$, а q простое. Этот факт был доказан Харманом в [8]. В случае $n \geq 2$ невозможно получить никакую равномерную по ω оценку на стремление к нулю $|q\omega - b|$ лучше, чем константа (см. контрпример в [8]).

ЛЕММА 6. Пусть вектор $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$ таков, что $\omega_1, \dots, \omega_n$ линейно независимы вместе с 1 над $\mathbb{Z}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда существует бесконечно много целых p и точек $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$ таких, что $|b_n|$ – простое число и

$$|p\omega - b| \leq \varepsilon p^{1-\Delta(n)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{(2|\omega_n|)^{1-\Delta(n)} \max(1 + |\omega_1|, \dots, 1 + |\omega_{n-1}|, |\omega_n|)},$$

$$\gamma_1 = \frac{\omega_1}{\omega_n}, \quad \dots, \quad \gamma_{n-1} = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}, \quad \gamma_n = \frac{1}{\omega_n}.$$

Очевидно, $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ линейно независимы вместе с 1 над $\mathbb{Z}$; следовательно, по лемме 5 существует бесконечно много простых q и точек $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ таких, что

$$|q\gamma_i - a_i| \leq \varepsilon_1 q^{1-\Delta(n)} \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

откуда получаем, что

$$\begin{cases} |a_n \omega_i - a_i + (q - a_n \omega_n) \omega_i \omega_n^{-1}| \leq \varepsilon_1 q^{1-\Delta(n)} & \forall i = 1, \dots, n-1, \\ |a_n \omega_n - q| \leq \varepsilon_1 |\omega_n| q^{1-\Delta(n)}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} |a_n \omega_i - a_i| \leq \varepsilon_1 (1 + |\omega_i|) q^{1-\Delta(n)} & \forall i = 1, \dots, n-1, \\ |a_n \omega_n - q| \leq \varepsilon_1 |\omega_n| q^{1-\Delta(n)}. \end{cases}$$

Легко видеть, что $q \leq |a_n \omega_n| + \varepsilon_1 |\omega_n|$. Без ограничения общности можно считать, что $a_n \neq 0$ и $\varepsilon_1 \leq |a_n|$, откуда $q \leq 2|a_n \omega_n|$.

Положим

$$p = |a_n|, \quad b_1 = \text{sign}(a_n) a_1, \quad \dots, \quad b_{n-1} = \text{sign}(a_n) a_{n-1}, \quad b_n = \text{sign}(a_n) q.$$

Тогда

$$|p\omega_i - b_i| \leq \varepsilon p^{1-\Delta(n)} \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

что доказывает лемму.

ЛЕММА 7. Пусть $\omega \in S_f^*$, $\varepsilon > 0$. Пусть $A \in \mathbb{Z}^{n+1}$ – примитивная точка. Тогда существует бесконечно много $b \in \mathbb{Z}^n$ таких, что

- 1) $\left| \omega - \frac{b}{|b|} \right| \leq \varepsilon |b|^{-\Delta(n-1)}$;
- 2) для любых двух соседних B_1 и $B_2 \in \mathbb{M}_n(b)$ (т.е. таких B_1 и B_2 , которые отличаются друг от друга на вектор стандартного базиса $\mathbb{R}^n$) хотя бы одна из двух пар векторов $\{A, B_1\}$ и $\{A, B_2\}$ дополнима до базиса $\mathbb{Z}^{n+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что $A = (A_0, \dots, A_n)$. Проекция $\underline{A}$ точки A (полученная отбрасыванием координаты A_0) не обязательно является примитивной точкой. Поэтому мы рассмотрим $a = \underline{A}/\lambda$, где $\lambda = \text{НОД}(|A_1|, \dots, |A_n|)$; a – примитивная точка решетки $\mathbb{Z}^n$; следовательно, в $\mathbb{Z}^n$ существует базис $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ такой, что $f_1 = a$. Пусть $G \in \text{Sl}_n(\mathbb{Z})$, $G(\mathcal{E}^n) = \mathcal{F}$ (здесь $\mathcal{E}^n = \{e_1, \dots, e_n\}$ – стандартный базис $\mathbb{R}^n$), т.е. G – автоморфизм $\mathbb{Z}^n$, переводящий e_1 в a .

Легко видеть, что

$$\exists \varepsilon_1 > 0: \text{ если } \left| \frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|} \right| \leq \varepsilon_1 |z|^{-\Delta(n-1)}, \quad \text{то } \left| \frac{G(x)}{|G(x)|} - \frac{G(y)}{|G(y)|} \right| \leq \varepsilon |G(z)|^{-\Delta(n-1)}.$$

Пусть $G^{-1}(\omega)_1$ – первая координата вектора $G^{-1}(\omega)$ – отлична от нуля. Положим

$$\omega' = \frac{G^{-1}(\omega)}{|G^{-1}(\omega)_1|} = \left(1, \frac{G^{-1}(\omega)_2}{|G^{-1}(\omega)_1|}, \dots, \frac{G^{-1}(\omega)_n}{|G^{-1}(\omega)_1|} \right).$$

Рассмотрим $\omega'' = \underline{\omega'}$ – проекцию ω' вдоль e_1 . Ясно, что $\omega'_2, \dots, \omega'_n$ линейно независимы вместе с 1 над $\mathbb{Z}$. Значит, можно применить лемму 6. Тогда получим, что для любого $\varepsilon_2 > 0$ существует бесконечно много целых p и точек $b'' \in \mathbb{Z}^{n-1}$ таких, что $|b''_n|$ – простое число и

$$\left| \omega'' - \frac{b''}{p} \right| \leq \varepsilon_2 p^{-\Delta(n-1)}.$$

Для всех таких b'' существует $b' = (p, b'_2, \dots, b'_n) \in \mathbb{M}_{n-1}(b'') \subset \mathbb{Z}^n$ такое, что

$$\left| \omega' - \frac{b'}{p} \right| \leq \varepsilon_2 p^{-\Delta(n-1)}.$$

Из этого неравенства легко видеть, что при фиксированных ω и G можно выбрать ε_2 столь малым, что для бесконечного числа точек $b' \in \mathbb{Z}^n$ с простой координатой b'_n будет выполнено

$$\left| \frac{G^{-1}(\omega)}{|G^{-1}(\omega)|} - \frac{b'}{|b'|} \right| \leq \varepsilon_1 |b'|^{-\Delta(n-1)}.$$

Зафиксируем такое b' и положим $b = G(b')$. Точка b такова, что

$$\left| \omega - \frac{b}{|b|} \right| \leq \varepsilon |b|^{-\Delta(n-1)}.$$

Осталось доказать второй пункт леммы для точки b . Пусть $|b'_n| = q$. Без ограничения общности можно считать, что $q > \lambda$. $\text{НОД}(|b'_2|, \dots, |b'_n|)$ равен либо 1, либо q . Мы рассмотрим эти два случая по очереди.

1) $\text{НОД}(|b'_2|, \dots, |b'_n|) = 1$. b'' – примитивная точка; следовательно, пара векторов $\{e_1, b'\}$ дополнима до базиса $\mathbb{Z}^n$, поскольку b'' – проекция b' вдоль e_1 ($b'' = \underline{b}'$). Стало быть, и пара векторов $\{a, b\}$ дополнима до базиса $\mathbb{Z}^n$.

Остается показать, что из дополнимости $\{a, b\}$ до базиса $\mathbb{Z}^n$ следует дополнимость $\{A, B\}$ до базиса $\mathbb{Z}^{n+1}$ для $\forall B \in \mathbb{M}_n(b)$. Заметим, что для $\forall B \in \mathbb{M}_n(b)$ решетка $\langle \underline{A}, b \rangle_{\mathbb{Z}}$ является проекцией решетки $\langle A, B \rangle_{\mathbb{Z}}$ на пространство $\langle e_1, \dots, e_n \rangle_{\mathbb{R}}$ параллельно e_0 ($\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ – стандартный базис $\mathbb{R}^{n+1}$).

Пусть $C = xA + yB \in \mathbb{Z}^{n+1}$. Достаточно доказать, что $x, y \in \mathbb{Z}$. Имеем $\underline{C} = x\underline{A} + yb = x\lambda a + yb \in \langle a, b \rangle_{\mathbb{Z}}$, так как пара $\{a, b\}$ дополнима до базиса $\mathbb{Z}^n$. Следовательно, $y \in \mathbb{Z}$. Но тогда $xA = C - yB \in \mathbb{Z}^{n+1}$, в то время, как точка A примитивна. Отсюда получаем, что $x \in \mathbb{Z}$.

Дополнимость $\{A, B\}$ до базиса $\mathbb{Z}^{n+1}$ доказана.

2) $\text{НОД}(|b'_2|, \dots, |b'_n|) = q$. В этом пункте будем считать b'' элементом $\mathbb{R}^n$, приписав в начало нулевую координату. Это естественно, поскольку $b'' = \underline{b}'$. Тогда все целые точки, которые находятся в плоскости $\langle e_1, b'' \rangle_{\mathbb{R}}$, лежат в решетке $\langle e_1, b''/q \rangle_{\mathbb{Z}}$. К тому же решетка $\langle e_1, b'' \rangle_{\mathbb{Z}}$ является подрешеткой простого индекса решетки $\langle e_1, b''/q \rangle_{\mathbb{Z}}$.

Обозначим

$$\Lambda_A = \langle \underline{A}, b \rangle_{\mathbb{Z}}, \quad \Lambda_a = \langle a, b \rangle_{\mathbb{Z}}, \quad \Lambda = \left\langle a, \frac{G(b'')}{q} \right\rangle_{\mathbb{Z}}.$$

Ясно, что Λ_a – подрешетка простого индекса решетки Λ в силу аналогичного свойства для прообразов этих решеток.

Пусть B_1, B_2 – соседние точки из $\mathbb{M}_n(b)$, т.е. $B_1 - B_2 = \pm e_0$ ($\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ – стандартный базис $\mathbb{R}^{n+1}$). Через Λ_i обозначим проекции решеток $\langle A, B_i \rangle_{\mathbb{R}} \cap \mathbb{Z}^{n+1}$ на пространство $\langle e_1, \dots, e_n \rangle_{\mathbb{R}}$ вдоль e_0 , $i = 1, 2$.

Обозначим $\Lambda_i(a) = \langle \Lambda_i, a \rangle_{\mathbb{Z}} \supset \Lambda_i$. Тогда

$$\Lambda_a \subseteq \Lambda_i(a) \subseteq \Lambda, \quad i = 1, 2;$$

следовательно,

$$\Lambda_i(a) \in \{\Lambda_a, \Lambda\}, \quad i = 1, 2,$$

поскольку Λ_a – подрешетка простого индекса решетки Λ . Покажем, что $\Lambda_1(a)$ и $\Lambda_2(a)$ одновременно не могут быть равны Λ . Допустим противное:

$$\Lambda_1(a) = \Lambda_2(a) = \Lambda.$$

Возьмем α и $\beta \in \mathbb{R}^n$ такие, что

$$\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \overline{\mathcal{L}_\alpha}(x) = 0\} = \langle A, B_1 \rangle_{\mathbb{R}} \quad \text{и} \quad \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \overline{\mathcal{L}_\beta}(x) = 0\} = \langle A, B_2 \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Линейные формы $\mathcal{L}_\alpha$ и $\mathcal{L}_\beta$ принимают целые значения соответственно на Λ_1 и Λ_2 . Кроме того, очевидно, что $\lambda \mathcal{L}_\alpha(a) = \lambda \mathcal{L}_\beta(a) \in \mathbb{Z}$. Стало быть, на решетке $\Lambda_1(a) = \Lambda_2(a) = \Lambda$ функции $\lambda \mathcal{L}_\alpha$ и $\lambda \mathcal{L}_\beta$ принимают целые значения. Рассмотрим точку $G(b'') \in \Lambda$. Эта точка представима в виде $b + \mu a$, где μ – некоторое целое число (поскольку $b'' = \underline{b}'$). Из линейности получаем, что

$$\frac{1}{q} \mathcal{L}_\alpha(G(b'')) - \frac{1}{q} \mathcal{L}_\beta(G(b'')) = \pm \frac{1}{q}.$$

Но $0 < \lambda/q < 1$; следовательно,

$$\lambda \mathcal{L}_\alpha \left(\frac{G(b'')}{q} \right) - \lambda \mathcal{L}_\beta \left(\frac{G(b'')}{q} \right) \notin \mathbb{Z},$$

в то время, как точка $G(b'')/q$ содержится в Λ . Пришли к противоречию; стало быть, хотя бы одна из решеток $\Lambda_i(a)$ равна Λ_a . Допустим, без ограничения общности, что это $\Lambda_1(a)$. Докажем, что

$$\Lambda_1 \cap \Lambda_a = \Lambda_A.$$

Вложение $\Lambda_A \subseteq \Lambda_1 \cap \Lambda_a$ сразу следует из определения решеток. Пусть $x \in \Lambda_1 \cap \Lambda_a$. Тогда, во-первых, x представим в виде $x_1 a + x_2 b$ с целыми x_1 и x_2 , во-вторых, $x = \underline{X}$, где X принадлежит решетке $\langle A, B_1 \rangle_{\mathbb{R}} \cap \mathbb{Z}^{n+1}$, т.е. $X = (x_1/\lambda)A + x_2 B_1 \in \mathbb{Z}^{n+1}$. Но x_2 целое, значит, $(x_1/\lambda)A \in \mathbb{Z}^{n+1}$. Следовательно, в силу примитивности A x_1/λ целое, т.е. $x = \underline{X} \in \Lambda_A$.

Получаем цепочку равенств: $\Lambda_1 = \Lambda_1 \cap \Lambda_1(a) = \Lambda_1 \cap \Lambda_a = \Lambda_A$, т.е.

$$\Lambda_1 = \Lambda_A.$$

Но это значит, что

$$\langle A, B_1 \rangle_{\mathbb{R}} \cap \mathbb{Z}^{n+1} = \langle A, B_1 \rangle_{\mathbb{Z}},$$

т.е. пара векторов $\{A, B_1\}$ дополнима до базиса $\mathbb{Z}^{n+1}$. Лемма 7 доказана.

ЛЕММА 8 (основная). Пусть $\varepsilon > 0$, $\omega, \omega' \in S_f^*$, ω освещает множество $B_f^1(\omega')$ в точке начала координат. Пусть $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ — n -мерный замкнутый параллелепипед с выделенной $(n-1)$ -мерной гранью Γ . Пусть $\exists t_k \in \mathbb{Z}^n$:

- 1) t_k освещает множество $B_f^1(\omega)$ в точке начала координат;
- 2) для всех $\alpha \in \Pi \setminus \Gamma$ t_k — k -е f -ОМП $\mathcal{L}_\alpha$;
- 3) для всех $\alpha \in \Gamma$ $\{\mathcal{L}_\alpha(t_k)\} = 0$;
- 4) функция $\{\mathcal{L}_\alpha(t_k)\}$ непрерывна по α в Π .

Тогда существует n -мерный замкнутый параллелепипед $\Pi' \subset \text{int } \Pi$ с выделенной $(n-1)$ -мерной гранью Γ' и $t_{k+1} \in \mathbb{Z}^n$:

- 1) $\left| \omega - \frac{t_{k+1}}{|t_{k+1}|} \right| \leq \varepsilon |t_{k+1}|^{-\Delta(n-1)}$;
- 2) t_{k+1} освещает множество $B_f^1(\omega')$ в точке начала координат;
- 3) для всех $\alpha \in \Pi' \setminus \Gamma'$ t_{k+1} — $(k+1)$ -е f -ОМП $\mathcal{L}_\alpha$;
- 4) для всех $\alpha \in \Gamma'$ $\{\mathcal{L}_\alpha(t_{k+1})\} = 0$;
- 5) функция $\{\mathcal{L}_\alpha(t_{k+1})\}$ непрерывна по α в Π' .

Для доказательства основной леммы нам понадобится следующее обозначение. Пусть фиксировано $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда положим для целых ν

$$\pi_\nu(a) = \{\alpha \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{L}_\alpha(a) = \nu\}.$$

Отметим также следующий очевидный факт.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Для любого $\nu \in \mathbb{Z}$ $\pi_\nu(a) \perp a$, причем расстояние между $\pi_\nu(a)$ и $\pi_{\nu+1}(a)$ равно $1/\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$. Кроме того, для всех $\nu \in \mathbb{Z}$ функция $\{\mathcal{L}_\alpha(a)\}$ непрерывна по α в слое

$$\{\alpha \in \mathbb{R}^n \mid \nu \leq \mathcal{L}_\alpha(a) < \nu + 1\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ЛЕММЫ. Поскольку для всех $\alpha \in \Gamma$ $\{\mathcal{L}_\alpha(m_k)\} = 0$, существует точка $A \in \mathbb{M}_n(m_k)$ такая, что для всех $\alpha \in \Gamma$ $\mathcal{L}_\alpha(A) = 0$. Но функция $\{\mathcal{L}_\alpha(m_k)\}$ непрерывна по α в Π и для всех $\alpha \in \Pi \setminus \Gamma$ $m_k - k$ -е f -ОНП $\mathcal{L}_\alpha$. Поэтому точка A примитивна. Применим к точкам A и ω лемму 7. Получим бесконечно много точек $b \in \mathbb{Z}^n$, удовлетворяющих утверждению леммы 7.

Для всех таких достаточно далеких b выполняются следующие три условия:

- 1) $\exists \nu \in \mathbb{Z}$: $\pi_\nu(b) \cap \text{int } \Gamma \neq \emptyset$ и $\pi_{\nu+1}(b) \cap \text{int } \Gamma \neq \emptyset$;
- 2) m_k освещает множество $B_f^{|b|}(b)$ в точке начала координат;
- 3) b освещает множество $B_f^{|\omega'|}(\omega')$ в точке начала координат.

Действительно, первый пункт выполняется в силу приведенного выше утверждения и того факта, что $\omega \nparallel m_k$, ибо $\omega \in S_f^*$. Заметим, отсюда следует, что $b \nparallel m_k$. Чтобы выполнялись второй и третий пункты, в силу лемм 1 и 2 достаточно, чтобы $b/|b|$ было близко к ω .

В качестве m_{k+1} возьмем любую такую точку b . Тогда $\exists B \in \mathbb{M}_n(m_{k+1})$:

- 1) пара векторов $\{A, B\}$ дополнима до базиса $\mathbb{Z}^{n+1}$;
- 2) существует гиперплоскость $\pi \subset \mathbb{R}^n$ такая, что $\pi \cap \text{int } \Gamma \neq \emptyset$ и для всех $\alpha \in \pi$ $\mathcal{L}_\alpha(B) = 0$ (в качестве π надо брать $\pi_\nu(b)$ или $\pi_{\nu+1}(b)$).

Введем следующие обозначения:

$$K = \{a \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0, m_{k+1}\} \mid |a| \leq |m_{k+1}|\}, \quad K^- = K \setminus \langle m_k, m_{k+1} \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

Если мы добьемся того, что $\{\mathcal{L}_\alpha(m_{k+1})\} < \{\mathcal{L}_\alpha(m_k)\} \leq \{\mathcal{L}_\alpha(a)\}$ для любого $a \in K$, кроме m_k и m_{k+1} , то m_{k+1} будет $(k+1)$ -м f -ОНП $\mathcal{L}_\alpha$. Для этого точки решетки $\langle m_k, m_{k+1} \rangle_{\mathbb{Z}}$ придется рассматривать отдельно, поскольку с этими точками возникают определенные трудности.

Для доказательства леммы достаточно показать, что существуют два замкнутых параллелепипеда Π_1 и Π' такие, что

$$\Pi \supseteq \Pi_1 \supseteq \Pi',$$

удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) для всех $\alpha \in \Pi_1$ и $a \in K^-$ $\{\mathcal{L}_\alpha(m_k)\} < \{\mathcal{L}_\alpha(a)\}$;
- 2) $\exists \Gamma' - (n-1)$ -мерная грань Π' такая, что для всех $\alpha \in \Gamma'$ $\{\mathcal{L}_\alpha(m_{k+1})\} = 0$ и для всех $\alpha \in \Pi' \setminus \Gamma'$ и $a \in K$ $\{\mathcal{L}_\alpha(m_{k+1})\} < \{\mathcal{L}_\alpha(a)\}$;
- 3) для всех $\alpha \in \Pi'$ и $a \in \langle m_k, m_{k+1} \rangle_{\mathbb{Z}} \setminus \{0, m_k, m_{k+1}\}$ таких, что $|a| \leq |m_{k+1}|$, выполнено неравенство $\{\mathcal{L}_\alpha(m_k)\} < \{\mathcal{L}_\alpha(a)\}$, т.е. m_{k+1} является $(k+1)$ -м f -ОНП $\mathcal{L}_\alpha$ для всех $\alpha \in \Pi' \setminus \Gamma'$;
- 4) $\Pi' \subset \text{int } \Pi$;
- 5) функция $\{\mathcal{L}_\alpha(m_{k+1})\}$ непрерывна по α в Π' .

Докажем существование Π_1 . Положим

$$\mathcal{P} = \pi \cap \text{int } \Gamma.$$

Поскольку $m_{k+1} \nparallel m_k$, то $\dim \mathcal{P} = n - 2$.

Покажем, что если $a \in \mathbb{Z}^n$ и $\nu \in \mathbb{Z}$ таковы, что $\dim(\pi \cap \Gamma \cap \pi_\nu(a)) = n - 2$, то точка a лежит в решетке $\langle m_k, m_{k+1} \rangle_{\mathbb{Z}}$. Действительно, тогда существует точка $X \in \mathbb{M}_n(a)$ такая, что $\overline{\mathcal{L}_\alpha}(X) = \overline{\mathcal{L}_\alpha}(A) = \overline{\mathcal{L}_\alpha}(B) = 0$ для всех $\alpha \in \pi \cap \Gamma \cap \pi_\nu(a)$. По лемме 4 точки A, B, X линейно зависимы. Но пара $\{A, B\}$ дополнима до базиса $\mathbb{Z}^{n+1}$. Следовательно, точка X лежит в решетке $\langle A, B \rangle_{\mathbb{Z}}$. Но тогда и точка $a = \underline{X}$ лежит в решетке $\langle m_k, m_{k+1} \rangle_{\mathbb{Z}}$.

Получили, что для всех $a \in K^-$ и $\nu \in \mathbb{Z}$

$$\dim(\pi_\nu(a) \cap \mathcal{P}) \leq n - 3.$$

Но множество $\{\pi_\nu(a) \mid \pi_\nu(a) \cap \Gamma \neq \emptyset, a \in K^-, \nu \in \mathbb{Z}\}$ конечно. Следовательно, $\exists \mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$ – куб размерности $n - 2$ такой, что для всех $a \in K^-, \nu \in \mathbb{Z}$

$$\pi_\nu(a) \cap \mathcal{P}' = \emptyset,$$

т.е. для всех $a \in K^-, \alpha \in \mathcal{P}'$

$$\{\mathcal{L}_\alpha(a)\} \neq 0.$$

Кроме того, поскольку $\mathcal{P}' \subseteq \Gamma$, для всех $\alpha \in \mathcal{P}'$

$$\{\mathcal{L}_\alpha(m_k)\} = 0.$$

Тогда из непрерывности функции $\{\mathcal{L}_\alpha(m_k)\}$ по α в Π и того факта, что $\mathcal{P}'$ находится во внутренности слоя непрерывности $\{\mathcal{L}_\alpha(a)\}$ для любого $a \in K^-$, получаем, что существует замкнутый параллелепипед $\Pi_1 \subset \Pi$ такой, что $\mathcal{P}'$ содержится во внутренности некоторой его $(n - 1)$ -мерной грани, и такой, что для всех $a \in K^-$ и $\alpha \in \Pi_1$

$$\{\mathcal{L}_\alpha(m_k)\} < \{\mathcal{L}_\alpha(a)\}.$$

Теперь докажем существование Π' . Положим

$$\mathcal{R} = \pi \cap \text{int } \Pi_1.$$

Очевидно, $\dim \mathcal{R} = n - 1$.

Если $a \nparallel m_{k+1}$, то для всех $\nu \in \mathbb{Z}$ $\pi \neq \pi_\nu(a)$. Но m_{k+1} не обязательно примитивна. Допустим, существуют такие $q, \nu \in \mathbb{Z}$, что $m_{k+1}/q \in \mathbb{Z}^n$ и $\pi = \pi_\nu(m_{k+1}/q)$. Тогда существует целая точка $X \in \mathbb{M}_n(m_{k+1}/q)$ такая, что $\overline{\mathcal{L}_\alpha}(X) = 0$ для всех $\alpha \in \pi$. Но для всех таких α $\overline{\mathcal{L}_\alpha}(B) = 0$, т.е. $B = qX$, в то время, как точка B примитивна. Значит, $|q| \leq 1$. Стало быть, для всех $a \in K \setminus \{-m_{k+1}\}$ и $\nu \in \mathbb{Z}$ $\pi \neq \pi_\nu(a)$, т.е.

$$\dim(\pi_\nu(a) \cap \mathcal{R}) \leq n - 2.$$

Следовательно, $\exists \mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R}$ – куб размерности $n - 1$ такой, что для всех $a \in K \setminus \{-m_{k+1}\}$ и $\nu \in \mathbb{Z}$

$$\pi_\nu(a) \cap \mathcal{R}' = \emptyset,$$

т.е. для всех $a \in K \setminus \{-m_{k+1}\}$, $\alpha \in \mathcal{R}'$

$$\{\mathcal{L}_\alpha(a)\} \neq 0.$$

Кроме того, поскольку $\mathcal{R}' \subset \pi$, для всех $\alpha \in \mathcal{R}'$

$$\{\mathcal{L}_\alpha(\pm m_{k+1})\} = 0.$$

Пусть $\mathcal{E}_{\mathcal{R}}$ – такой ортонормированный базис $\mathbb{R}^n$ (здесь мы рассматриваем $\mathbb{R}^n$ как аффинное пространство, т.е. начало координат можно сдвинуть), в котором $\mathcal{R}'$ имеет вид

$$\mathcal{R}' = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_1 = 0, |\alpha_i| \leq \delta_0, i = 2, 3, \dots, n\}.$$

Тогда из того факта, что $\mathcal{R}'$ находится во внутренности слоя непрерывности $\{\mathcal{L}_\alpha(a)\}$ для любого $a \in K \setminus \{-m_{k+1}\}$ получаем, что существует положительное δ_1 такое, что для всех $a \in K$ и $\alpha \in \Pi' \setminus \pi$

$$\{\mathcal{L}_\alpha(m_{k+1})\} < \{\mathcal{L}_\alpha(a)\},$$

где Π' в базисе $\mathcal{E}_{\mathcal{R}}$ имеет вид либо

$$\Pi' = \{\alpha \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq \alpha_1 \leq \delta_1, |\alpha_i| \leq \delta_1, i = 2, 3, \dots, n\},$$

либо

$$\Pi' = \{\alpha \in \mathbb{R}^n \mid -\delta_1 \leq \alpha_1 \leq 0, |\alpha_i| \leq \delta_1, i = 2, 3, \dots, n\},$$

в зависимости от того, с какой стороны от плоскости π находится слой непрерывности функции $\{\mathcal{L}_\alpha(m_{k+1})\}$. Из-за малости δ_1 можно считать, что $\Pi' \subset \text{int } \Pi_1$.

Положим

$$\Gamma' = \pi \cap \Pi'$$

и заметим, что $\{\mathcal{L}_\alpha(m_{k+1})\} = 0$ для всех $\alpha \in \Gamma'$. Кроме того, функция $\{\mathcal{L}_\alpha(m_{k+1})\}$ непрерывна в Π' . Следовательно, остается показать, что для всех $\alpha \in \Pi'$ и $a \in \langle m_k, m_{k+1} \rangle_{\mathbb{Z}} \setminus \{0, m_k, m_{k+1}\}$ таких, что $|a| \leq |m_{k+1}|$, выполнено неравенство $\{\mathcal{L}_\alpha(m_k)\} < \{\mathcal{L}_\alpha(a)\}$, и тогда лемма будет доказана.

Для этого введем следующие обозначения:

$$\mathcal{M} = \langle A, B \rangle_{\mathbb{R}} \cap \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| \leq |m_{k+1}|\}, \quad \ell_\alpha = \langle A, B \rangle_{\mathbb{R}} \cap \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \overline{\mathcal{L}_\alpha}(x) = 0\};$$

$\mathcal{M}$ – выпуклое, центрально симметричное, замкнутое 2-мерное множество, точка B принадлежит границе множества $\mathcal{M}$, а ℓ_α – прямая, проходящая через 0.

Поскольку $\alpha \in \Pi'$, то A и B лежат по одну сторону от гиперплоскости

$$\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \overline{\mathcal{L}_\alpha}(x) = 0\}$$

(или может быть на ней), причем B лежит к ней ближе, чем A . Следовательно, и в двумерной плоскости $\langle A, B \rangle_{\mathbb{R}}$ точки A и B лежат по одну сторону от прямой ℓ_α , причем B к ней ближе, чем A .

Докажем, что среди всех целых точек множества $\mathcal{M}$, лежащих с точкой A по одну сторону от ℓ_α , кроме B и начала координат, точка A ближайшая к прямой ℓ_α . Воспользуемся тем, что m_k освещает множество $B_f^{|m_{k+1}|}(m_{k+1})$ в точке начала координат. Отсюда следует, что $|m_k - m_{k+1}| > |m_k|$, и, стало быть, $A - B \notin \mathcal{M}$. Но $\pm B \in \partial \mathcal{M}$, $\pm A \in \text{int } \mathcal{M}$, а множество $\mathcal{M}$ выпукло; следовательно, все точки вида $\pm(B - \lambda A + \mu(A + B))$ с натуральными λ и μ лежат вне $\mathcal{M}$. Поэтому достаточно рассмотреть точки вида $\lambda A + \mu(A + B)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{N}$. Но среди них точка A – ближайшая к ℓ_α , поскольку $(\lambda - 1)A + \mu(A + B)$ лежат по ту же сторону от ℓ_α , что и A . Это значит, что для всех $\alpha \in \Pi'$ и $a \in \langle m_k, m_{k+1} \rangle_{\mathbb{Z}} \setminus \{0, m_k, m_{k+1}\}$ таких, что $|a| \leq |m_{k+1}|$, выполнено неравенство $\{\mathcal{L}_\alpha(m_k)\} < \{\mathcal{L}_\alpha(a)\}$.

Лемма доказана.

7. Доказательство теорем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Проведем индукцию по вложенным параллелепипедам.

(I) *Основание индукции.* В качестве m_1 возьмем точку m , о которой говорится в условии теоремы. Для всех $\alpha \in \pi_0(m_1)$

$$\mathcal{L}_\alpha(m_1) = 0.$$

Ясно, что можно выбрать такое $\alpha' \in \pi_0(m_1)$, что для всех $a \in \mathbb{Z}^n \cap S_f \setminus \{\pm m_1\}$

$$\mathcal{L}_{\alpha'}(a) \neq 0.$$

Это значит, что для любого $a \in \mathbb{Z}^n \cap S_f \setminus \{\pm m_1\}$ точка α' лежит во внутренности слоя непрерывности функции $\mathcal{L}_\alpha(a)$. Следовательно, существует положительное δ такое, что, если обозначить через $\mathcal{E}_\pi$ базис $\mathbb{R}^n$ с началом координат в α' , в котором плоскость $\pi_0(m_1)$ имеет вид $\{\alpha \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 = 0\}$ и первая координата вектора m_1 положительна, то для всех $a \in \mathbb{Z}^n \cap S_f \setminus \{m_1\}$ и $\alpha \in \Pi_1 \setminus \pi_0(m_1)$

$$\{\mathcal{L}_\alpha(m_1)\} < \{\mathcal{L}_\alpha(a)\},$$

где Π_1 в базисе $\mathcal{E}_\pi$ имеет вид

$$\Pi_1 = \{\alpha \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq \alpha_1 \leq \delta, |\alpha_i| \leq \delta, i = 2, 3, \dots, n\}.$$

Положим

$$\Gamma_1 = \Pi_1 \cap \pi_0(m_1).$$

Тогда для всех $\alpha \in \Pi_1 \setminus \Gamma_1$ m_1 является первым f -ОНП $\mathcal{L}_\alpha$, в то время как $\mathcal{L}_\alpha(m_1) = 0$ для всех $\alpha \in \Gamma_1$. Легко видеть, что функция $\{\mathcal{L}_\alpha(m_1)\}$ непрерывна по α в Π_1 . Наконец, по условию теоремы m_1 освещает множество $B_f^1(\omega_2)$ в точке начала координат.

(II) *Шаг индукции.* Пусть Π_k — n -мерный замкнутый параллелепипед с выделенной $(n-1)$ -мерной гранью Γ_k . Пусть существуют $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{Z}^n$ такие, что

- 1) m_k освещает множество $B_f^1(\omega_{k+1})$ в точке начала координат;
- 2) для всех $\alpha \in \Pi_k \setminus \Gamma_k$ m_i — i -е f -ОНП $\mathcal{L}_\alpha$, $i = 1, \dots, k$;
- 3) для всех $\alpha \in \Gamma_k$ $\{\mathcal{L}_\alpha(m_k)\} = 0$;
- 4) функция $\{\mathcal{L}_\alpha(m_k)\}$ непрерывна по α в Π_k .

По условию теоремы ω_{k+1} освещает множество $B_f^1(\omega_{k+2})$ в точке начала координат. Применив основную лемму, получим, что существует n -мерный замкнутый параллелепипед $\Pi_{k+1} \subset \text{int } \Pi_k$ с выделенной $(n-1)$ -мерной гранью Γ_{k+1} и $m_{k+1} \in \mathbb{Z}^n$:

- 1) $\left| \omega_{k+1} - \frac{m_{k+1}}{|m_{k+1}|} \right| \leq \varepsilon_{k+1} |m_{k+1}|^{-\Delta(n-1)}$;
- 2) m_{k+1} освещает множество $B_f^1(\omega_{k+2})$ в точке начала координат;
- 3) для всех $\alpha \in \Pi_{k+1} \setminus \Gamma_{k+1}$ m_{k+1} — $(k+1)$ -е f -ОНП $\mathcal{L}_\alpha$;
- 4) для всех $\alpha \in \Gamma_{k+1}$ $\{\mathcal{L}_\alpha(m_{k+1})\} = 0$;
- 5) функция $\{\mathcal{L}_\alpha(m_{k+1})\}$ непрерывна по α в Π_{k+1} .

(III) Получаем последовательность замкнутых параллелепипедов $\{\Pi_k\}_{k=1}^\infty$, обладающую следующим свойством:

$$\Pi_{k+1} \subset \text{int } \Pi_k \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, $\exists \alpha \in \mathbb{R}^n$: $\alpha \in \text{int } \Pi_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$, для которого и будет выполнено утверждение теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. По условию множество Ω асимптотически допустимо. Пусть $\{\theta_i\}_{i=1}^\infty$ – последовательность в S_f , о которой говорится в определении 5. Мы можем считать, что $\{\theta_i\}_{i=1}^\infty \subset S_f^*$. Действительно, поскольку S_f^* всюду плотно в S_f , то, применяя леммы 1, 2 последовательно к точкам $\{\theta_i\}_{i=1}^\infty$, мы можем пошевелить их так, чтобы они все стали принадлежать S_f^* , свойство освещаемости сохранилось и множество предельных точек осталось прежним. Не ограничивая общности, можно также считать, что существует целая точка $m \in S_f$, освещающая множество $B_f^1(\theta_2)$ в точке начала координат. Пусть $\sigma \in \Omega$, $\{\theta_{i_j}\}_{j=1}^\infty$ – подпоследовательность, сходящаяся к σ (будем считать, что $i_1 > 2$). Из лемм 1 и 2 следует, что существует последовательность $\{\tau_j\}_{j=1}^\infty \subset S_f^*$ такая, что $\forall j$ $|\theta_{i_j} - \tau_j| = \delta_j \neq 0$, $\delta_j \rightarrow 0$, и при этом θ_{i_j-1} освещает множество $B_f^1(\tau_j)$ в точке начала координат, а τ_j освещает $B_f^1(\theta_{i_j+1})$ в точке начала координат.

Определим последовательность $\{\omega_i\}_{i=1}^\infty$ следующим образом: ω_{i_j} положим равным либо θ_{i_j} , либо τ_j ; если же $i \neq i_j$, то положим $\omega_i = \theta_i$. Заметим, что таких последовательностей континуум.

Определим последовательность $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+$ так, чтобы она убывала и чтобы выполнялось $\varepsilon_{i_j} < \delta_j/2$ и $|\omega_1 - m| \leq \varepsilon_1$.

Применим к последовательностям $\{\omega_i\}_{i=1}^\infty$ и $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^\infty$ теорему 3. Получим континуум требуемых линейных форм. Все эти формы будут попарно различны, поскольку для любых двух различных последовательностей $\{\omega_i\}_{i=1}^\infty$ и $\{\omega'_i\}_{i=1}^\infty$ существует такое i , что $|\omega_i - \omega'_i| > 2\varepsilon_i$, и, стало быть, соответствующие i -е f -ОНП различны.

Теорема доказана.

В заключение автор хотел бы выразить искреннюю благодарность Н. Г. Мошевитину за неоценимую помощь в работе над статьей и многочисленные обсуждения результатов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Rogers C. A. The asymptotic directions of n linear forms in $n + 1$ integral variables // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1951. V. 52. P. 161–185.
- [2] Rogers C. A. The signatures of the errors of simultaneous Diophantine approximations // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1951. V. 52. P. 186–190.
- [3] Мошевитин Н. Г. Наилучшие совместные приближения: нормы, сигнатуры и асимптотические направления // Матем. заметки. 2000. Т. 67. № 5. С. 730–737.
- [4] Финкельштейн Ю. Ю. Полигоны Клейна и приведенные регулярные непрерывные дроби // УМН. 1993. Т. 48. № 3. С. 205–206.
- [5] Болтянский В. Г., Гохберг И. Ц. Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. М.: Наука, 1965.
- [6] Мошевитин Н. Г. О наилучших совместных приближениях // УМН. 1996. Т. 51. № 6. С. 213–214.
- [7] Glyn Harman. On the distribution of αp modulo one. II // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 1996. V. 72. P. 241–260.
- [8] Glyn Harman. Simultaneous Diophantine approximations with primes // J. London Math. Soc. Ser. 2. 1989. V. 39. P. 405–413.
- [9] Sos V. T., Szekeres G. Rational approximation vectors // Acta Arith. 1988. V. 49. № 3. P. 255–261.
- [10] Виноградов И. М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. М.: Наука, 1976.