Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Тумаркин, Гиперболические многогранники Кокстера в $\mathbb{H}^n$ с $n + 2$ гипергранями, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 6, 909–916

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm80>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 17:08:48

УДК 512.817.72

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ МНОГОГРАННИКИ КОКСТЕРА В $\mathbb{H}^n$ С $n + 2$ ГИПЕРГРАНЯМИ

П. В. Тумаркин

Работа посвящена классификации неограниченных гиперболических многогранников Кокстера конечного объема, комбинаторно эквивалентных произведению двух симплексов или пирамиде над произведением двух симплексов. В сочетании с результатами И. М. Каплинской (1974) и Ф. Эссельманна (1996) получена полная классификация n -мерных гиперболических многогранников Кокстера конечного объема с $n + 2$ гипергранями.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. Рассмотрим выпуклый многогранник P в n -мерном гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^n$.

Многогранник называется *многогранником Кокстера*, если все его двугранные углы являются целыми частями π . Группа, порожденная отражениями относительно гиперграней произвольного многогранника Кокстера, дискретна, причем фундаментальной областью такой группы является сам многогранник.

Наибольший интерес представляют многогранники Кокстера конечного объема. Полной классификации таких многогранников нет, однако получены некоторые частные результаты. Например, многогранники Кокстера в $\mathbb{H}^3$ полностью охарактеризованы Андреевым [1], [2]; перечислены также все гиперболические симплексы [3], [4].

Существует несколько результатов, касающихся многогранников в $\mathbb{H}^n$, имеющих $n + 2$ гиперграни. Каплинская [5] перечислила все симплицеальные призмы Кокстера, Эссельманн [6] получил классификацию компактных гиперболических многогранников Кокстера в $\mathbb{H}^n$ с $n + 2$ гипергранями.

Данная работа завершает классификацию гиперболических многогранников Кокстера конечного объема в $\mathbb{H}^n$ с $n + 2$ гипергранями.

Автор благодарит Р. Келлерхалса, которая ознакомила его с работой Эссельманна.

2. Диаграммы Гейла. Напомним некоторые свойства выпуклых многогранников, а также необходимые нам сведения о диаграммах Гейла. Более подробное изложение и доказательства можно найти в [7] или в [8].

Любой комбинаторный тип n -мерного многогранника с k гипергранями можно задать *диаграммой Гейла*, которая состоит из m точек $a_1, \dots, a_m$, лежащих на сфере единичного радиуса в $\mathbb{R}^{k-(n+1)}$ с центром в начале координат, и, возможно, начала координат a_0 , на которых расставлены метки в соответствии со следующими правилами:

- 1) каждая метка является натуральным числом, сумма всех чисел равна k ;

- 2) для любой гиперплоскости в $\mathbb{R}^{k-(n+1)}$, проходящей через начало координат, сумма меток точек, лежащих в каждом открытом полупространстве, ограниченном этой гиперплоскостью, не меньше двух.

Комбинаторный тип многогранника можно восстановить по диаграмме Гейла следующим образом. Каждой точке a_i с меткой μ_i соответствует μ_i гиперграней P : $f_{i,1}, \dots, f_{i,\mu_i}$. Для любого подмножества I множества гиперграней многогранника P пересечение гиперграней $\{f_{j,\gamma} \mid (j, \gamma) \in I\}$ является гранью P тогда и только тогда, когда начало координат лежит в относительной внутренней множеству $\text{conv}\{a_j \mid (j, \gamma) \notin I\}$.

Пирамидой в $\mathbb{H}^n$ называется выпуклая оболочка точки (вершины пирамиды) и $(n-1)$ -мерного многогранника, отличного от симплекса. Многогранник P называется *кратной пирамидой*, если P – пирамида над пирамидой.

Пусть теперь P – n -мерный многогранник с $n+2$ гипергранями. Тогда его диаграмма Гейла одномерна и каждая точка диаграммы равна -1 , 0 или $+1$. *Кратностью* точек -1 , 0 и $+1$ назовем соответствующие им метки. Пусть кратности равны соответственно p , q и r , где $p+q+r = n+2$. Диаграмма Гейла такого вида соответствует некоторому выпуклому многограннику тогда и только тогда, когда $p, r \geq 2$.

Пусть $q = 0$. Тогда комбинаторный тип многогранника P – произведение двух симплексов размерностей $p-1$ и $r-1$. Множество гиперграней P состоит из двух непесекающихся подмножеств J_p и J_r порядков p и r соответственно. Любая вершина многогранника P является пересечением $p-1$ гиперграней из J_p и $r-1$ гиперграней из J_r .

Если $q = 1$, то комбинаторный тип многогранника P – пирамида над произведением двух симплексов. Если $q > 1$, то P комбинаторно эквивалентен кратной пирамиде над произведением двух симплексов.

ЛЕММА 1. Пусть P – многогранник Кокстера конечного объема в $\mathbb{H}^n$ с $n+2$ гипергранями. Тогда комбинаторный тип многогранника P – либо произведение двух симплексов, либо пирамида над произведением двух симплексов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что кратная пирамида не может быть многогранником Кокстера.

Предположим, что многогранник Кокстера P является пирамидой над пирамидой P' . Пусть A – вершина пирамиды P (противолежащая грани P'). Поскольку P' – пирамида, многогранник P' не может быть простым. Следовательно, вершина A пирамиды P идеальна. Рассмотрим достаточно малую орисферу h с центром в точке A . Комбинаторный тип пересечения $h \cap P$ совпадает с комбинаторным типом многогранника P' . С другой стороны, $h \cap P$ – ограниченный евклидов $(n-1)$ -мерный многогранник Кокстера. Однако любой ограниченный евклидов многогранник Кокстера прост.

Любой многогранник Кокстера P можно представить с помощью его схемы Кокстера $\Sigma(P)$. Вершины схемы Кокстера соответствуют гиперграням многогранника P . Две вершины соединены $(m-2)$ -кратным ребром или простым ребром с отметкой m , если двугранный угол, образованный соответствующими гипергранями, равен π/m . Если соответствующие гиперграницы параллельны, вершины соединены толстым ребром. Если гиперграницы расходятся, вершины соединены пунктирным ребром с отметкой $\text{ch}(\rho)$, где ρ – расстояние между гипергранями.

Пусть Σ – схема с k вершинами $v_1, \dots, v_k$. Пусть $G(\Sigma)$ – симметрическая $(k \times k)$ -матрица, в которой $g_{ii} = 1$, $i = 1, \dots, k$, и $g_{ij} = -\cos(\pi/k)$ ($g_{ij} = -1$ или $g_{ij} = -\text{ch}(\rho)$),

если v_i и v_j соединены ребром с отметкой k (соответственно, толстым ребром или пунктирным ребром с отметкой $\text{ch}(\rho)$).

Если Σ – схема Кокстера многогранника P , то матрица $G(\Sigma)$ совпадает с матрицей Грама многогранника P (подробности см. в [9]).

Под *сигнатурой* и *определителем* схемы Σ будем понимать сигнатуру и определитель матрицы $G(\Sigma)$.

3. Произведения двух симплексов. Данный пункт посвящен классификации неограниченных n -мерных многогранников конечного объема с $n + 2$ гипергранями, комбинаторно эквивалентных произведению двух симплексов размерности большей, чем один. Классификация компактных многогранников такого комбинаторного типа получена в [6]. Симплициальные призмы перечислены в [5] (см. также [9]).

Результатом данного пункта является

ТЕОРЕМА 1. *Существует единственный неограниченный многогранник Кокстера конечного объема, комбинаторно эквивалентный произведению двух симплексов размерности большей, чем один. Схема Кокстера этого многогранника представлена на рис. 1.*

Рис. 1

Схема Кокстера Σ называется *ланнеровской*, если любая ее собственная подсхема является эллиптической, но Σ не является ни эллиптической, ни параболической.

ЛЕММА 2. *Пусть P – гиперболический многогранник Кокстера, комбинаторно эквивалентный произведению двух симплексов, и пусть Σ – схема Кокстера многогранника P . Тогда Σ удовлетворяет следующим трем условиям:*

- (I) Σ является объединением двух непересекающихся ланнеровских схем L_1 и L_2 ;
- (II) для любых $v_1 \in L_1$ и $v_2 \in L_2$ схема $\Sigma \setminus \{v_1, v_2\}$ либо эллиптическая, либо параболическая;
- (III) $\text{Det}(\Sigma) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как показано в п. 2, Σ является объединением двух непересекающихся схем – обозначим их через L_1 и L_2 , где L_1 состоит из граней, соответствующих -1 в диаграмме Гейла многогранника P , а L_2 – из граней, соответствующих 1 . Любая вершина многогранника P соответствует подсхеме вида $\Sigma \setminus \{v_1, v_2\}$ схемы Σ , где $v_1 \in L_1$, $v_2 \in L_2$. Обратно, для любых $v_1 \in L_1$ и $v_2 \in L_2$ схема $\Sigma \setminus \{v_1, v_2\}$ соответствует некоторой вершине многогранника P . Следовательно, подсхема $\Sigma \setminus \{v_1, v_2\}$ либо эллиптическая, либо параболическая. Любая подсхема схемы $\Sigma \setminus \{v_1, v_2\}$ эллиптическая. В частности, схемы $L_1 \setminus v_1$ и $L_2 \setminus v_2$ являются эллиптическими для любых $v_1 \in L_1$ и $v_2 \in L_2$.

Согласно [9, теорема 3.1] подсхема схемы Σ определяет собственную грань многогранника P тогда и только тогда, когда она эллиптическая. Следовательно, подсхемы L_1 и L_2 не могут быть эллиптическими. По теореме 4.1 работы [9] L_1 и L_2 не могут быть параболическими. Поэтому схемы L_1 и L_2 являются ланнеровскими, и мы получили (I) и (II). Утверждение (III) непосредственно следует из того, что n -мерный многогранник P имеет больше, чем $n + 1$ гиперграней.

ТАБЛИЦА 1. Схемы, удовлетворяющие (I) и (II), имеющие параболическую подсхему. Белые и черные вершины образуют две непересекающиеся ланнеровские подсхемы

Условия (I) и (II) выполнены для большого числа схем Кокстера. Все такие схемы, содержащие параболическую подсхему, перечислены на табл. 1. Остальные схемы не могут соответствовать неограниченным многогранникам. Для вычисления определителей схем, перечисленных в левом столбце, была использована техника из [10, предложения 13, 15 и таблица 2]. Ни у одной из схем, перечисленных в левом столбце, определитель не равен нулю.

Прямое вычисление остальных определителей показывает, что свойству $\text{Det} = 0$ удовлетворяет только схема, приведенная на рис. 1. Обозначим ее через Σ_0 . Занумеруем вершины этой схемы, как показано на рис. 1.

Найдем сигнатуру Σ_0 . Поскольку подсхема $\Sigma_0 \setminus \{v_1, v_2, v_3\}$ ланнеровская, отрицательный индекс инерции не меньше, чем 1. Подсхема $\Sigma_0 \setminus \{v_1, v_4\}$ эллиптическая, и положительный индекс инерции не меньше, чем 4. Определитель схемы Σ_0 равен 0. Следовательно, сигнатура этой схемы $(4, 1, 1)$, где на первом месте стоит положительный индекс инерции, затем отрицательный, а последнее число равно корангу Σ_0 .

По теореме 2.1 работы [9] для любой схемы Кокстера сигнатуры $(n, 1, l)$ существует многогранник Кокстера в $\mathbb{H}^n$, имеющий данную схему Кокстера. Следовательно, существует многогранник Кокстера со схемой Кокстера Σ_0 . Согласно предложению 4.2 работы [9] объем этого многогранника конечен.

4. Пирамиды. В данном пункте найдены все n -мерные многогранники конечного объема с $n + 2$ гипергранями, комбинаторно эквивалентные пирамиде над произведением двух симплексов.

Мы воспользуемся следующей леммой.

ЛЕММА 3 [4, предложение 12]. Пусть Σ – схема Кокстера и v – вершина схемы Σ . Предположим, что $\Sigma \setminus v$ является объединением двух параболических схем. Тогда $\text{Det}(\Sigma) = 0$.

Связная схема Σ называется *квазиланнеровской*, если любая ее подсхема либо эллиптическая, либо параболическая, но Σ не является ни эллиптической, ни параболической. Все квазиланнеровские схемы перечислены в [4].

ЛЕММА 4. Пусть P – гиперболическая пирамида Кокстера над произведением двух симплексов, а Σ – схема Кокстера пирамиды P . Тогда Σ удовлетворяет следующим трем условиям:

- (I) Σ является объединением двух квазиланнеровских подсхем L_1 и L_2 , пересекающихся ровно по одной вершине v ; при этом подсхемы $L_1 \setminus v$ и $L_2 \setminus v$ не соединены ни одним ребром;
- (II) подсхемы $L_1 \setminus v$ и $L_2 \setminus v$ – параболические; все остальные подсхемы схем L_1 и L_2 эллиптические;
- (III) для любых $v_1 \in L_1 \setminus v$ и $v_2 \in L_2 \setminus v$ схема $\Sigma \setminus \{v_1, v_2\}$ либо эллиптическая, либо параболическая.

Любая схема Кокстера, удовлетворяющая условиям (I)–(II), определяет гиперболический многогранник Кокстера, комбинаторно эквивалентный пирамиде над произведением двух симплексов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть A – вершина пирамиды, противоположная основанию и v – вершина схемы Σ , соответствующая основанию пирамиды P . Рассмотрим малую

ТАБЛИЦА 2. Склеивание любых двух схем по отмеченной вершине приводит к схеме Кокстера пирамиды над произведением двух симплексов

орисферу h с центром в точке A . Пересечение $h \cap P$ является прямым произведением двух евклидовых симплексов. Следовательно, $\Sigma \setminus v$ – объединение двух непересекающихся параболических схем. Обозначим их через S_1 и S_2 . Ясно, что S_1 и S_2 являются двумя компонентами связности схемы $\Sigma \setminus v$.

Любая вершина пирамиды P , за исключением вершины A , соответствует подсхеме $\Sigma \setminus \{v_1, v_2\}$, где $v_1 \in S_1, v_2 \in S_2$. Поэтому подсхема $\Sigma \setminus \{v_1, v_2\}$ либо эллиптическая, либо параболическая. Поскольку S_1 содержит не менее двух вершин, схема $\Sigma \setminus \{S_1, v_2\}$ является собственной подсхемой схемы $\Sigma \setminus \{v_1, v_2\}$. Следовательно, схема $\Sigma \setminus \{S_1, v_2\}$ эллиптическая.

Обозначим через L_1 и L_2 подсхемы $S_1 \cup v$ и $S_2 \cup v$ соответственно. Мы доказали, что для любой вершины $u \in L_2$ схема $L_2 \setminus u$ либо параболическая (если u совпадает с v), либо эллиптическая (в противном случае). Следовательно, L_2 – квазиланнеровская схема, имеющая ровно одну параболическую подсхему S_2 . Аналогично, L_1 – квазиланнеровская схема, имеющая ровно одну параболическую подсхему S_1 .

2. Мы доказали необходимость условий (I)–(III). Докажем достаточность. Предположим, что Σ удовлетворяет этим трем условиям.

Отрицательный индекс инерции схемы Σ равен 1, поскольку у Σ есть ланнеровская подсхема L_1 , а подсхема $\Sigma \setminus v$ параболическая. Для любых $v_1 \in L_1 \setminus v$ и $v_2 \in L_2 \setminus v$ подсхема $\Sigma \setminus \{v, v_1, v_2\}$ эллиптическая. Следовательно, положительный индекс инерции схемы Σ не меньше, чем $n - 1$. По лемме 3 $\text{Det}(\Sigma) = 0$. Поэтому сигнатура схемы Σ равна либо $(n - 1, 1, 2)$, либо $(n, 1, 1)$. Согласно [9, теорема 2.1] существует многогранник

ТАБЛИЦА 3. Любую схему из левого столбца можно склеить
с любой схемой из правого столбца той же строки

Кокстера в $\mathbb{H}^k$, схема Кокстера которого совпадает с Σ , где k равно $n - 1$ или n .

Предположим, что сигнатура схемы Σ равна $(n - 1, 1, 2)$. Тогда существует многогранник Кокстера P в $\mathbb{H}^{n-1}$ со схемой Кокстера Σ . Это невозможно, поскольку у Σ есть параболическая подсхема $\Sigma \setminus v$ ранга $n - 1$.

Следовательно, сигнатура схемы Σ равна $(n, 1, 1)$, и Σ определяет многогранник Кокстера P в $\mathbb{H}^n$. По леммам 1 и 2 Σ определяет пирамиду над произведением двух симплексов. Согласно [9, предложение 4.2] полученный многогранник имеет конечный объем.

Рассмотрев все квазианнеровские схемы, имеющие ровно одну параболическую подсхему, получаем

ТЕОРЕМА 2. Все гиперболические кокстеровские многогранники конечного объема, комбинаторно эквивалентные пирамиде над произведением двух симплексов, приведены на табл. 2, 3.

Все схемы Кокстера, представленные на табл. 2, 3, – квазианнеровские схемы ровно с одной параболической подсхемой (получающейся удалением вершины, выделенной черным цветом). Склеивая любые две схемы из табл. 2 по отмеченной вершине, получа-

ем схему Кокстера пирамиды над произведением двух симплексов (в частности, каждую схему из табл. 2 можно склеить саму с собой). Любую схему из левого столбца таблицы, показанной на табл. 3, можно склеить с любой схемой из правого столбца той же строки.

Полный список схем Кокстера, получающийся с помощью этой процедуры, приведен в [11].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Андреев Е. М. О выпуклых многогранниках в пространствах Лобачевского // Матем. сб. 1970. Т. 81. № 3. С. 445–478.
- [2] Андреев Е. М. О выпуклых многогранниках конечного объема в пространстве Лобачевского // Матем. сб. 1970. Т. 83. № 2. С. 256–260.
- [3] Lannér F. On complexes with transitive groups of automorphisms // Comm. Sem. Math. Univ. Lund. 1950. V. 11. P. 1–71.
- [4] Винберг Э. Б. Дискретные группы, порожденные отражениями, в пространствах Лобачевского // Матем. сб. 1967. Т. 72. № 4. С. 471–488.
- [5] Каплинская И. М. О дискретных группах, порожденных отражениями в гранях симплицальных призм в пространствах Лобачевского // Матем. заметки. 1974. Т. 15. № 1. С. 159–164.
- [6] Esselmann F. The classification of compact hyperbolic Coxeter d -polytopes with $d + 2$ facets // Comm. Math. Helv. 1996. V. 71. P. 229–242.
- [7] Grünbaum V. Convex Polytopes. New York: John Wiley & Sons, 1967.
- [8] Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация. М.: Наука, 1981.
- [9] Винберг Э. Б. Гиперболические группы отражений // УМН. 1985. Т. 40. № 1. С. 29–64.
- [10] Винберг Э. Б. Отсутствие кристаллографических групп отражений в пространствах Лобачевского большой размерности // Тр. ММО. 1984. Т. 47. С. 68–102.
- [11] Tumarkin P. Hyperbolic Coxeter n -polytopes with $n + 2$ facets // E-print math. MG/0301133, 2003.

Независимый Московский университет
E-mail: pasha@mccme.ru

Поступило
15.01.2003