Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ф. Лукомский, О сходимости рядов Уолша в пространствах, близких к L^∞ , *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 6, 882–889

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm800>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 12:36:37

УДК 517.5

О СХОДИМОСТИ РЯДОВ УОЛША В ПРОСТРАНСТВАХ, БЛИЗКИХ К L^∞

С. Ф. Лукомский

Рассматриваются пространства, близкие к L^∞ , которые являются объединением классов Орлича. Доказывается сходимость рядов Уолша в полученных пространствах. Библиография: 3 названия.

1. Введение. Хорошо известно [1, с. 124], что если $f \in L_p$ ($1 < p < \infty$), то ее ряд Фурье–Уолша сходится по норме L_p . Ситуация меняется, если f принадлежит пространствам, лежащим между L_1 и L_p или между L_p и L^∞ . Так в работе [2] была доказана эквивалентность следующих утверждений:

- i) для любой непрерывной функции f ее ряд Фурье–Уолша сходится в пространстве $L(\varphi)$;
- ii) $L(e^{x^2}) \subset L(\varphi)$.

Мы рассмотрим этот вопрос для случая пространств, лежащих по шкале пространств Орлича между L_p и L^∞ . В качестве таких пространств рассмотрим объединение классов Орлича с нормой, отличной от норм Орлича и Люксембурга.

2. Функциональные пространства, близкие к L^∞ . Пусть (G, Σ, μ) – пространство с конечной мерой μ и $\mu(G) = 1$. Классы Орлича $L^o(\varphi)$ в случае, когда N -функция φ не удовлетворяет Δ_2 -условию, не являются линейными. Чтобы превратить такой класс в линейное пространство, рассматривают их объединение $L(\varphi) = \bigcup_\lambda L^o(\varphi(\cdot \lambda))$ и традиционно определяют норму одним из следующих равенств:

$$\|f\|_1 = \sup \left\{ \int_G |fg| d\mu : \int_G \varphi^*(g) d\mu \leq 1 \right\} \quad (\text{норма Орлича}),$$
$$\|f\|_2 = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_G \varphi \left(\frac{|f|}{\lambda} \right) d\mu \leq 1 \right\} \quad (\text{норма Люксембурга}).$$

Мы рассмотрим пространства, лежащие по шкале пространств Орлича между L_p и L^∞ , определим в них норму, отличную от норм Орлича и Люксембурга, и покажем, что полученные пространства являются сепарабельными банаховыми пространствами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $p > 1$, $\alpha \geq 1$. Через $\widehat{\mathcal{L}}_{p,\alpha}(G)$ обозначим совокупность всех измеримых, почти всюду (п.в.) конечных функций $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что для каждой $f \in \widehat{\mathcal{L}}_{p,\alpha}(G)$

- 1) существует положительная, непрерывная, строго возрастающая на $(0, \infty)$ функция φ такая, что

$$\int_1^\infty \left(\frac{\varphi^{-1}(x)}{x^\alpha} \right)^p dx < \infty \quad (\varphi^{-1} - \text{обратная к } \varphi), \quad (1)$$

- 2) существует постоянная $\gamma > 1$ такая, что

$$\int_G \gamma^{\varphi(|f|)} d\mu < \infty. \quad (2)$$

ТЕОРЕМА 1. Множество $\widehat{\mathcal{L}}_{p,\alpha}(G)$ есть банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{\widehat{\mathcal{L}}_{p,\alpha}} = \left(\int_1^\infty \left(\frac{\|f\|_x}{x^\alpha} \right)^p dx \right)^{1/p} < \infty, \quad (3)$$

где $\|\cdot\|_x$ — норма в пространстве L_x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $\widehat{\mathcal{L}}_{p,\alpha}(G)$ совпадает с множеством функций, для которых конечна величина

$$\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{\|f\|_n}{n^\alpha} \right)^p. \quad (4)$$

1) Пусть f измерима, п.в. конечна и ряд (4) сходится. Покажем, что существует непрерывная, строго возрастающая функция $\varphi(x) > 0$ такая, что интеграл (2) сходится при некотором $\gamma > 1$ и сходится интеграл (1).

Если $|f(x)| = \text{const} = A$ п.в. на G , то в качестве φ^{-1} можно взять любую положительную, непрерывную, строго возрастающую функцию такую, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi^{-1}(x) = B > A.$$

Если $|f(x)| \neq \text{const}$ п.в. на G , то для $\lambda > 1$ положим

$$\varphi^{-1}(x) = \begin{cases} \lambda \|f\|_x & \text{при } x > 1, \\ \lambda x \|f\|_1 & \text{при } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Тогда $\varphi^{-1}(x)$ строго возрастает, непрерывна на $(0, +\infty)$ и, значит, существует обратная к ней φ . Очевидно, что интеграл (1) сходится.

Покажем, что интеграл (2) сходится при $1 < \gamma < \lambda$. Пусть

$$E_n = \{x: n \leq \varphi(|f(x)|) < n+1\}. \quad (5)$$

Тогда

$$\|f\|_n^n = \sum_{k=0}^\infty \int_{E_k} |f|^n d\mu \geq \int_{E_n} |f|^n d\mu \geq (\varphi^{-1}(n))^n \mu E_n, \quad (6)$$

откуда находим, что при $1 < \gamma < \lambda$ выполнена оценка

$$\begin{aligned} \int_G \gamma^{\varphi(|f|)} d\mu &\leq \gamma \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k \mu E_k \leq \gamma \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k \frac{\|f\|_k^k}{(\varphi^{-1}(k))^k} + \gamma \mu E_0 \\ &= \gamma \mu E_0 + \gamma \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^k < \infty. \end{aligned}$$

2) Покажем обратное включение. Пусть при некотором $\gamma > 1$ интегралы (1) и (2) сходятся. Снова определим множества E_n равенствами (5). Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n \mu E_n \leq \int_G \gamma^{\varphi(|f|)} d\mu \leq \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n \mu E_n$$

и для нормы $\|f\|_n$ имеем

$$\|f\|_n^n \leq \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi^{-1}(k+1))^n \mu E_k = \gamma \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k \mu E_k \frac{(\varphi^{-1}(k+1))^n}{\gamma^{k+1}}$$

или

$$\|f\|_n \leq \gamma^{1/n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k \mu E_k \right)^{1/n} \sup_k \frac{\varphi^{-1}(k+1)}{\gamma^{(k+1)/n}}. \quad (7)$$

Обозначим

$$A = \sup_n \gamma^{1/n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k \mu E_k \right)^{1/n},$$

и пусть k_n есть то значение $k+1$, при котором достигается $\sup$ в (7). Тогда (7) примет вид

$$\|f\|_n \leq A \frac{\varphi^{-1}(k_n)}{\gamma^{k_n/n}},$$

откуда находим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\|f\|_n}{n^\alpha} \right)^p \leq A^p \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varphi^{-1}(k_n)}{\gamma^{k_n/n}} \right)^p \frac{1}{n^{\alpha p}}. \quad (8)$$

Покажем, что ряд справа в (8) сходится. Обозначим

$$K(s) = \left\{ n: s \leq \frac{k_n}{n} < s+1 \right\} \quad (s = 0, 1, \dots).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varphi^{-1}(k_n)}{\gamma^{k_n/n}} \right)^p \frac{1}{n^{\alpha p}} &= \sum_s \sum_{n \in K(s)} \left(\frac{\varphi^{-1}(k_n)}{\gamma^{k_n/n}} \right)^p \frac{1}{n^{\alpha p}} \\ &\leq \gamma^p \sum_s \frac{(s+1)^{\alpha p}}{\gamma^{(s+1)p}} \sum_{n \in K(s)} \left(\frac{\varphi^{-1}(n(s+1))}{(n(s+1))^\alpha} \right)^p \\ &\leq \gamma^p \sum_s \frac{(s+1)^{\alpha p}}{\gamma^{(s+1)p}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varphi^{-1}(n)}{n^\alpha} \right)^p < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, множество $\widehat{\mathcal{L}}_{p,\alpha}(G)$ совпадает с множеством всех функций, для которых сходится ряд (4).

3) Очевидно, что $\widehat{\mathcal{L}}_{p,\alpha}(G)$ является линейным пространством и любое из равенств

$$\|f\|_{\hat{p},\alpha} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\|f\|_n}{n^\alpha} \right)^p \right)^{1/p}, \quad \|f\|_{\hat{p},\alpha} = \left(\int_1^\infty \left(\frac{\|f\|_x}{x^\alpha} \right)^p dx \right)^{1/p}$$

определяет в $\widehat{\mathcal{L}}_{p,\alpha}(G)$ эквивалентные нормы. Покажем полноту.

Во-первых, $\widehat{\mathcal{L}}_{p,\alpha}(G)$ – идеальное пространство, т.е. норма $\|f\|_{\hat{p},\alpha}$ монотонна.

Во-вторых, норма $\|\cdot\|_{\hat{p},\alpha}$ порядково непрерывна, т.е. если последовательность $0 \leq f_n(t) \downarrow 0$ п.в., то $\|f_n\|_{\hat{p},\alpha} \rightarrow 0$. В самом деле, при любом $x \geq 1$ выполнено неравенство $\|f_{n+1}\|_x \leq \|f_n\|_x$ и по теореме Лебега $\|f_n\|_x \rightarrow 0$. Еще раз применяя теорему Лебега, получаем, что $\|f_n\|_{\hat{p},\alpha} \rightarrow 0$.

В-третьих, норма $\|\cdot\|_{\hat{p},\alpha}$ порядково полна, т.е. из $0 \leq f_n \uparrow f$ и $\|f_n\|_{\hat{p},\alpha} \leq M$ следует, что $f \in \widehat{\mathcal{L}}_{p,\alpha}(G)$ и $\|f\|_{\hat{p},\alpha} \leq M$. В самом деле, так как $0 \leq f_n \uparrow f$, то

$$\left(\frac{\|f_n\|_x}{x^\alpha} \right)^p \uparrow F(x)$$

и по теореме Леви $F(x) \in L$ и для любого $x \geq 1$ выполнена оценка $\|f_n\|_x \leq x^\alpha F^{1/p}(x)$. Поэтому для любого x

$$\int_G |f_n(t)|^x d\mu(t) \leq (x^\alpha F^{1/p}(x))^x$$

и снова по теореме Леви $|f(t)|^x$ интегрируема по $d\mu(t)$, причем

$$\int_G |f(t)|^x d\mu(t) \leq (x^\alpha F^{1/p}(x))^x.$$

Отсюда по теореме Лебега и следует сходимость интеграла (3). Но идеальное пространство, в котором норма порядково непрерывна и порядково полна, будет полным [3, с. 143]. Теорема доказана.

Укажем теперь, где расположены пространства $\widehat{\mathcal{L}}_{p,\alpha}(G)$ по шкале пространств Орлича.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $p > 1$, $q > 0$, $\alpha \geq 1$, $1/p + 1/q = \alpha$. Тогда для любого $\gamma > 1$ и любого $r > q$

$$L^o(\gamma^{|x|}{}^r) \subset \widehat{\mathcal{L}}_{p,\alpha}(G) \subset L^o(\gamma^{|x|}{}^q). \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем левое включение. Выберем $f \in L^o(\gamma^{|x|}{}^r)$ и положим

$$E_n = \{x: n \leq |f(x)|^r < n+1\}. \quad (10)$$

Тогда

$$\infty > A = \int_G \gamma^{|f|^r} d\mu \geq \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k \mu E_k. \quad (11)$$

С другой стороны,

$$\|f\|_n^n \leq \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{n/r} \mu E_k = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k \mu E_k \frac{(k+1)^{n/r}}{\gamma^k}. \quad (12)$$

Обычными методами анализа убеждаемся, что

$$\sup_k \frac{(k+1)^{n/r}}{\gamma^k} \leq \gamma \left(\frac{n}{r \ln \gamma} \right)^{n/r} \gamma^{-n/(r \ln \gamma)}. \quad (13)$$

Из (11), (12) и (13) находим

$$\|f\|_n \leq A^{1/n} C_{r,\gamma} n^{1/r}$$

и, значит,

$$\sum \left(\frac{\|f\|_n}{n^\alpha} \right)^p < \infty \quad (14)$$

при $r > q$.

Проверим правое включение. Выберем $f \in \widehat{\mathcal{L}}_{p,\alpha}(G)$ и положим

$$E_n = \{x: n \leq |f(x)|^q < n+1\}.$$

Тогда

$$\int_G \gamma^{|f|^r} d\mu \leq \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n \mu E_n. \quad (15)$$

Покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mu E_n)^{1/n} = 0. \quad (16)$$

Имеем

$$\|f\|_n^n = \int_G |f|^n d\mu \geq \int_{E_n} |f|^n d\mu \geq n^{n/q} \mu E_n$$

и, значит,

$$(\mu E_n)^{1/n} \leq \frac{\|f\|_n}{n^{1/q}}. \quad (17)$$

Так как $\|f\|_n$ возрастает, то сходимость ряда (14) равносильна сходимости ряда

$$\sum_n \left(\frac{\|f\|_{2^n}}{2^{n\alpha}} \right)^p 2^n.$$

Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|f\|_{2^n}^p}{2^{n(\alpha p - 1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\|f\|_{2^n}}{(2^n)^{1/q}} \right)^p = 0,$$

откуда с учетом (17) и следует (16). Но тогда радиус сходимости ряда (15) равен ∞ , т.е. ряд (15) сходится при всех $\gamma > 1$.

3. Сходимость рядов Уолша в пространствах $\widehat{\mathcal{L}}_{p,\alpha}$. Рассмотрим функции Уолша $\{W_n(t)\}_{n=0}^\infty$ в нумерации Пэли на двоичной группе G . Мера μE в этом случае совпадает с мерой Лебега $|E|$.

ЛЕММА. *Ступенчатые функции, постоянные на двоичных интервалах, образуют плотное в $\widehat{\mathcal{L}}_{p,\alpha}$ множество.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как норма $\|f\|_{\widehat{\mathcal{L}}_{p,\alpha}}$ в $\widehat{\mathcal{L}}_{p,\alpha}$ порядково непрерывна, то функции $\sum_{k=1}^n \lambda_k \chi_{E_k}$, где E_k – измеримые множества, образуют плотное в $\widehat{\mathcal{L}}_{p,\alpha}$ [3, с.142] множество. Но каждое измеримое множество E_k есть предел убывающей последовательности множеств $\bigcup_{\nu=1}^n I_{k,\nu}$, где $I_{k,\nu}$ – двоичные интервалы. Поэтому из порядковой непрерывности нормы следует утверждение леммы.

Отметим, что из доказанной леммы следует сепарабельность пространства $\widehat{\mathcal{L}}_{p,\alpha}$. В заключение докажем теорему о сходимости рядов Уолша в пространствах $\widehat{\mathcal{L}}_{p,\alpha}$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $p > 1$, $\alpha \geq 1$, $S_m(f)$ – частичные суммы ряда Фурье–Уолша функции f . Тогда*

1) *для любой $f \in \widehat{\mathcal{L}}_{p,\alpha}$*

$$\|S_m(f)\|_{\widehat{\mathcal{L}}_{p,\alpha+1}} \leq C_{p,\alpha} \|f\|_{\widehat{\mathcal{L}}_{p,\alpha}}; \quad (18)$$

2) *для любой $f \in \widehat{\mathcal{L}}_{p,\alpha}$ $\|S_m(f) - f\|_{\widehat{\mathcal{L}}_{p,\alpha+1}} \rightarrow 0$;*

3) *существует $f \in \widehat{\mathcal{L}}_{p,\alpha}$ такая, что нормы $\|S_m(f)\|_{\widehat{\mathcal{L}}_{p,\alpha+1-\varepsilon}}$ неограничены при всех $\varepsilon > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Интерполяционная теорема Марцинкевича для частичных сумм $S_m(f)$ Фурье–Уолша при $1 < r < 2$ дает оценку

$$\|S_m(f)\|_r \leq C \left(\frac{r}{(r-1)(2-r)} \right)^{1/r} \|f\|^r = C_r \|f\|^r.$$

Отсюда находим, что если r и r' связаны соотношением $1/r + 1/r' = 1$, то [1, с. 124]

$$\|S_m(f)\|_{r'} \leq C_r \|f\|_{r'}.$$

Полагая $r' = n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, получаем, что существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\|S_m(f)\|_n \leq Cn \|f\|_n,$$

откуда сразу и следует утверждение 1).

2) Так как ступенчатые функции (т.е. многочлены Уолша) образуют плотное в $\widehat{\mathcal{L}}_{p,\alpha}$ множество, то утверждение 2) обычным образом вытекает из (18).

3) Построим функцию $f \in \widehat{\mathcal{L}}_{p,\alpha}$, для которой нормы $\|S_n(f)\|_{\widehat{\mathcal{L}}_{p,\alpha+1-\varepsilon}}$ неограничены при всех $\varepsilon > 0$. Выберем произвольную пока последовательность $m_k \uparrow \infty$, считая $m_0 = 0$, $m_{k+1} - m_k \geq 2$, $m_k \in \mathbb{N}$. Определим функцию f на G равенством

$$f(x) = \lambda_k \quad \text{при } x \in \Delta_0^{(m_{k-1})} \setminus \Delta_0^{(m_k)} = \left[\frac{1}{2^{m_k}} + 0, \frac{1}{2^{m_{k-1}}} - 0 \right] \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Числа λ_k и m_k подберем позже. При

$$m = \sum_{j=1}^s \sum_{i=m_{2j-1}}^{m_{2j}-1} 2^i$$

рассмотрим модифицированные частичные суммы [1, с. 120]

$$S_m^*(f) = \int_G f(x \oplus t) D_m^*(t) d\mu(t) = \sum_{j=1}^{2s} \frac{(-1)^j}{|\Delta_x^{(m_j)}|} \int_{\Delta_x^{(m_j)}} f(t) d\mu(t),$$

где $\Delta_x^{(m)}$ означает двоичный интервал ранга m , содержащий точку x . Найдем явное выражение для $S_m^*(f)$.

Если $x \in \Delta_0^{(m_{2s})}$, то $\Delta_x^{(m_j)} = \Delta_0^{(m_j)}$ при $j = 1, 2, \dots, 2s$ и

$$S_m^*(f)(x) = \sum_{j=1}^{2s} (-1)^j 2^{m_j} \int_{\Delta_0^{(m_j)}} f(t) d\mu(t) = \sum_{j=1}^{2s} (-1)^j 2^{m_j} A_j,$$

где

$$A_j = \int_{\Delta_0^{(m_j)}} f(t) d\mu(t) = \sum_{i=j}^{\infty} \lambda_{i+1} \left(\frac{1}{2^{m_i}} - \frac{1}{2^{m_{i+1}}} \right).$$

Если $x \in \Delta_0^{(m_{\nu-1})} \setminus \Delta_0^{(m_{\nu})}$ при $\nu = 2s, 2s-1, \dots, 1$, то $\Delta_x^{(m_j)} = \Delta_0^{(m_j)}$ при $j = 1, 2, \dots, \nu-1$ и

$$\begin{aligned} S_m^*(f)(x) &= \sum_{j=1}^{2s} (-1)^j 2^{m_j} \int_{\Delta_x^{(m_j)}} f(t) d\mu(t) = \sum_{j=1}^{\nu-1} + \sum_{j=\nu}^{2s} \\ &= \sum_{j=1}^{\nu-1} (-1)^j 2^{m_j} A_j + \sum_{j=\nu}^{2s} (-1)^j 2^{m_j} \lambda_{\nu} \frac{1}{2^{m_j}} = \sum_{j=1}^{\nu-1} (-1)^j 2^{m_j} A_j + \lambda_{\nu} \sum_{j=\nu}^{2s} (-1)^j. \end{aligned}$$

Положим теперь $m_j = 2j$ и пусть λ_j удовлетворяют условиям

- 1) $|\lambda_j| \uparrow +\infty$;
- 2) $\lambda_j = |\lambda_j|(-1)^{j+1}$;
- 3) $\frac{|\lambda_{j+1}|}{4^j} \downarrow 0$;
- 4) $|\lambda_{j+1}| \leq 2|\lambda_j|$;
- 5) существуют константы $C_1, C_2 > 0$ такие, что $C_1|\lambda_n|n \leq \sum_{j=1}^n |\lambda_j| \leq C_2|\lambda_n|n$.

Тогда

$$A_j = \frac{3}{4} \sum_{i=j}^{\infty} \frac{\lambda_{i+1}}{4^i}, \quad \operatorname{sgn} A_j = \operatorname{sgn} \lambda_{j+1} = (-1)^j,$$

и

$$\frac{1}{2} \frac{|\lambda_{j+1}|}{4^j} < |A_j| < \frac{|\lambda_{j+1}|}{4^j}.$$

Отсюда находим, что

$$C_3 |\lambda_{2s}| 2s \leq \left| \sum_{j=1}^{2s} (-1)^j 2^{m_j} A_j \right| \leq \sum_{j=1}^{2s} |\lambda_{j+1}| \leq C_4 |\lambda_{2s}| 2s$$

и

$$C_5 |\lambda_{\nu}| \nu \leq \left| \sum_{j=1}^{\nu-1} (-1)^j 2^{m_j} A_j + \lambda_{\nu} \sum_{j=\nu}^{2s} (-1)^j \right| \leq C_6 |\lambda_{\nu}| \nu.$$

Положим, наконец,

$$|\lambda_k| = \frac{k^{1/q}}{\log^2(k+1)} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \alpha \right).$$

Тогда

$$C_7 \frac{n^{1/q}}{\log^2 n} \leq \|f\|_n \leq C_8 \frac{n^{1/q}}{\log^2 n}$$

и, значит,

$$\sum_n \left(\frac{\|f\|_n}{n^\alpha} \right)^p \leq C_9 \sum \frac{1}{\log^{2p} n} \frac{1}{n^{p(\alpha-1/q)}} < \infty.$$

Однако

$$\begin{aligned} \|S_m^*(f)\|_n^n &\geq (C_3 |\lambda_{2s}| 2s)^n |\Delta_0^{(m_{2s})}| + \sum_{\nu=1}^{2s} |\Delta_0^{(m_{\nu-1})} \setminus \Delta_0^{(m_\nu)}| (C_5 |\lambda_\nu| \nu)^n \\ &\geq 3C_5^n \sum_{\nu=1}^{2s} \frac{\nu^{n(1+1/q)}}{4^\nu \log^{2n}(\nu+1)}. \end{aligned}$$

Так как

$$\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^{n(1+1/q)}}{4^\nu \log^{2n}(\nu+1)} \right)^{1/n} \geq C_{10} \frac{n^{1+1/q}}{\log^2 n},$$

то

$$\sup_m \sum \left(\frac{\|S_m^*(f)\|_n}{n^{\alpha+1-\varepsilon}} \right)^p = +\infty,$$

и теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды Уолша и преобразования Уолша. Теория и приложения. М.: Наука, 1987.
- [2] Finet C., Tkebuchava G. E. Walsh–Fourier series and their generalizations in Orlicz spaces // J. Math. Anal. Appl. 1998. V. 221. P. 405–418.
- [3] Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: lukomskyds@info.sgu.ru

Поступило
30.01.2001