Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. М. Тимофеев, С. Т. Туляганов, Средние значения мультипликативных функций с весом, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 6, 890–908

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm801>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 18:16:28

УДК 511

СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ФУНКЦИЙ С ВЕСОМ

Н. М. Тимофеев, С. Т. Туляганов

Изучаются характеристики средних значений мультипликативных функций по значениям функций на простых числах.

Библиография: 19 названий.

Введение: предварительные сведения и основные результаты. Арифметическая функция $f(n)$, принимающая комплексные значения, называется *мультипликативной*, если $f(n \cdot m) = f(n)f(m)$ для любых взаимно простых n и m . Многие задачи теории чисел сводятся к изучению поведения при $x \rightarrow \infty$ функционала

$$M(f, x) := \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f(n).$$

Одним из вопросов в этом направлении является нахождение необходимых и достаточных условий, при которых существует конечный

$$\lim_{x \rightarrow \infty} M(f, x) = M(f).$$

Этот предел называют *средним значением мультипликативной функции* $f(n)$. В настоящее время проблема нахождения таких условий не решена даже для $f(n)$, принимающих положительные значения.

Первый общий результат в указанном направлении был получен Деланжем [1]. Предполагая, что $|f(n)| \leq 1$ для всех n , он нашел необходимые и достаточные условия существования $M(f) \neq 0$.

В 1968 году при тех же предположениях Халос [2] полностью исследовал поведение $M(f, x)$, когда $x \rightarrow \infty$. Результаты и методы работы Халоса нашли применение в вероятностной теории чисел и в дальнейших исследованиях $M(f, x)$.

Опишем два направления, в которых далее развивались исследования $M(f, x)$. В первом из них основной целью было найти необходимые и достаточные условия существования $M(f)$ для возможно более широкого класса функций. При этом условия принадлежности этому классу также задавались с использованием некоторых средних характеристик на множестве натуральных чисел, не привлекая дополнительные условия

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00070.

на значения $f(n)$ на простых числах, как это обычно делалось до этого (см., например, [3], [4]). Первый результат такого типа был получен Эллиотом [5]. Положим

$$\|f\|_\alpha = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} |f(n)|^\alpha \right)^{1/\alpha}.$$

Обозначим через $\mathcal{L}_\alpha$ множество мультипликативных функций таких, что $\|f\|_\alpha < +\infty$. В работе [5] Эллиот нашел необходимые и достаточные условия для того, чтобы существовало $M(f)$ и $f \in \mathcal{L}_2$. Через год Дабусси и Деланж [6] опубликовали более простое доказательство этого результата. В 1980 году Эллиот [7] исследовал вопрос существования $M(f)$ в случае, когда $f \in \mathcal{L}_\alpha$, $\alpha > 1$. Отметим, что при $1 < \alpha < 2$ имеем $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_\alpha \subset \mathcal{L}_1$. Индлекофер [8] ввел понятие равномерно-суммируемых функций (см. также [9], [10]). Функция $f \in \mathcal{L}^*$, если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \geq 1} \frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leq x \\ |f(n)| \geq k}} |f(n)| = 0.$$

Очевидно, что $\mathcal{L}_\alpha \subset \mathcal{L}^* \subset \mathcal{L}_1$, если $\alpha > 1$. В [8] для функций класса $\mathcal{L}^*$ найдены необходимые и достаточные условия существования $M(f) \neq 0$. Так как $\mathcal{L}_\alpha \subset \mathcal{L}^*$, $\alpha > 1$, то из результатов этой работы вытекают предыдущие результаты. Мы будем существенно использовать метод работы [8].

ТЕОРЕМА А (Индлекофер [8]). Пусть $f: N \rightarrow C$ – мультипликативная функция и $\alpha \geq 1$. Тогда справедливы следующие два утверждения.

1. Если $f \in \mathcal{L}^* \cap \mathcal{L}_\alpha$ и существует среднее значение $M(f) \neq 0$, то ряды

$$\sum_p \frac{f(p) - 1}{p}, \quad \sum_{\substack{p \\ |f(p)| \leq 3/2}} \frac{|f(p) - 1|^2}{p}, \quad \sum_{\substack{p \\ |f(p) - 1| \geq 1/2}} \frac{|f(p)|^\lambda}{p}, \quad \sum_p \sum_{k \geq 2} \frac{|f(p^k)|^\lambda}{p^k} \quad (1)$$

сходятся для всех $1 \leq \lambda \leq \alpha$ и для каждого p

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^k} \neq 0. \quad (2)$$

2. Если ряды (1) сходятся, то $f \in \mathcal{L}^* \cap \mathcal{L}_\alpha$ и средние значения $M(f)$, $M(|f|^\lambda)$ существуют для всех $1 \leq \lambda \leq \alpha$. Если выполнено и условие (2), то $M(f) \neq 0$.

Отметим, что описанные выше результаты замечательны тем, что в них из только некоторых средних характеристик поведения f на множестве натуральных чисел выводится их поведение на множестве простых. В то же время нетрудно построить примеры, когда существует $M(f) \neq 0$, но $f \notin \mathcal{L}^* \supset \mathcal{L}_\alpha$, $\alpha > 1$. Принадлежность f классу $\mathcal{L}^*$ означает “близость” $f(p)$ к единице.

Пусть $f(p) = 2$, если $p \equiv 1 \pmod{4}$, и $f(p) = 0$ в противном случае, $f(p^r) = 0$ при $r \geq 2$. Тогда (см., например [3]) существует $M(f) \neq 0$ и в то же время не сходится второй ряд из рядов (1).

Второе направление в исследованиях поведения $M(f, x)$, использующих идеи и метод работы Халоса [2], состояло в следующем. В [2] рассматривались функции, по модулю не превосходящие единицы. Ряд Дирихле

$$F(s) = \sum_n \frac{f(n)}{n^s}$$

сравнивался с $\zeta(s)$. Поэтому естественно было вместо функции, тождественно равной единице, рассмотреть мультипликативную функцию $\rho(n)$, для которой можно исследовать поведение ряда

$$\Phi(s) = \sum_n \frac{\rho(n)}{n^s},$$

и, сравнивая поведение $\Phi(s)$ и $F(s)$, получить результаты, в которых $M(f, x)$ сравнивается с $M(\rho, x)$ (см. [11]–[15]). Приведем результаты такого типа из работы [12]. В ней в качестве функции $\rho(n)$ брались функции следующего вида.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Класс A состоит из неотрицательных мультипликативных функций ρ , удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) $\rho(p^r) = O(1)$ при всех p и $r \geq 1$,
- 2) существует $\tau > 0$ и y_0 такие, что при $y \geq y_0$

$$\sum_{p \leq y} \rho(p) \ln p \geq \tau y.$$

ТЕОРЕМА В (см. [12, следствие 1]). Пусть $\rho(n) \in A$, $f(p^r) = O(1)$ для всех p и $r \geq 1$, $|f(p)| \leq \rho(p)$. Тогда

$$\sum_{n \leq x} f(n) = \frac{Cx^{it_0}}{1+it_0} \exp\left(i \sum_{p \leq x} \frac{\operatorname{Im} f(p)p^{-it_0}}{p}\right) \cdot \sum_{n \leq x} \rho(n) + o\left(\sum_{n \leq x} \rho(n)\right),$$

где

$$C = \prod_p \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^{r(1+it_0)}}\right) \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\rho(p^r)}{p^r}\right)^{-1} \exp\left(-i \frac{\operatorname{Im} f(p)p^{-it_0}}{p}\right),$$

если существует t_0 такое, что ряд

$$\sum_p \frac{\rho(p) - \operatorname{Re} f(p)p^{-it_0}}{p} \quad (3)$$

сходится, и $C = 0$, если ряд (3) расходится при любом t_0 .

Из этой теоремы при $\rho(n) \equiv 1$ вытекает теорема Халоса, а при других выборах $\rho(n)$ – различные ее обобщения в духе работ [13]–[15].

В настоящей работе, используя два описанных выше подхода, мы находим необходимые и достаточные условия существования среднего значения для значительно более широкого класса мультипликативных функций. Мы рассмотрим более общую задачу. Пусть

$$S(\rho, x) := \sum_{n \leq x} \rho(n), \quad M_\rho(f, x) := \frac{1}{S(\rho, x)} \sum_{n \leq x} f(n)\rho(n).$$

Здесь и далее $\rho(n) \in A$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} M_\rho(f, x),$$

если он существует, будем обозначать $M_\rho(f)$ и называть *средним значением $f(n)$ относительно $\rho(n)$* . Очевидно, что если существуют $M(\rho) \neq 0$ и $M(f \cdot \rho)$, то $M_\rho(f) = M(f\rho)/M(\rho)$, т.е. мы находим, в частности, условия существования среднего значения для $f(n) \cdot \rho(n)$, что и приводит к расширению классов.

Нам необходимы следующие определения и обозначения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Мультипликативная арифметическая функция ρ принадлежит классу $A(\tau)$, где $\tau > 0$, если

- 1) $\rho(n) \geq 0$;
- 2) $\rho(p^r) = O(1)$ при всех p и $r \geq 1$;
- 3) существует $\beta > 1$ такое, что

$$\sum_{p \leq x} \rho(p) \log p = \tau x + O\left(\frac{x}{(\log \log x)^\beta}\right).$$

Заметим, что функции класса $A(\tau)$ удовлетворяют условиям теоремы Вирзинга [6], из которой получаем

$$S(\rho, x) = x \log^{\tau-1} x (B(\rho) + o(1)),$$

где

$$B(\rho) := \prod_p \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \rho(p^r) p^{-r}\right) (1 - p^{-1})^\tau.$$

Для вещественного $\alpha \geq 1$ положим

$$\|f\|_\alpha(\rho) := \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{S(\rho, x)} \sum_{n \leq x} |f(n)|^\alpha \rho(n) \right)^{1/\alpha},$$

$$\mathcal{L}_\alpha(\rho) := \{f: N \rightarrow C, \|f\|_\alpha(\rho) < \infty\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Мультипликативная функция f принадлежит классу $\mathcal{L}^*(\rho)$ и называется *равномерно суммированной с весом ρ* , если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \geq 1} \frac{1}{S(\rho, x)} \sum_{\substack{n \leq x \\ |f(n)| \geq k}} |f(n)| \rho(n) = 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Мультипликативная функция f принадлежит классу $\mathcal{L}_0^*(\rho)$, если существуют постоянные $\varepsilon > 0$, $c_1 > 0$ и последовательность $\{x_\ell\}$, монотонно стремящаяся к бесконечности, такие, что

$$\sum_{\substack{n \leq x_\ell \\ |f(n)| \leq 1/\varepsilon}} |f(n)| \rho(n) \geq c_1 S(\rho, x_\ell).$$

Очевидно, класс $\mathcal{L}_0^*(\rho)$ шире, чем $\mathcal{L}^*(\rho)$ и $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}^*(1)$.

Сформулируем основной результат работы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть f – комплекснозначная, ρ – неотрицательная мультипликативные функции, $\rho \in A(\tau)$, $\tau \geq 1$. Тогда справедливы следующие два утверждения:

1) если $f \in \mathcal{L}_\alpha(\rho) \cap \mathcal{L}_0^*(\rho)$, $\alpha \geq 1$, и существует $M_\rho(f)$, $M_\rho(f) \neq 0$, то ряды

$$\begin{aligned} \sum_p \frac{f(p) - 1}{p} \rho(p), \quad \sum_{\substack{p \\ |f(p)| \leq 3/2}} \frac{|f(p) - 1|^2}{p} \rho(p), \\ \sum_{\substack{p \\ |f(p) - 1| \geq 1/2}} \frac{|f(p)|^\lambda}{p} \rho(p), \quad \sum_p \sum_{r \geq 2} \frac{|f(p^r)|^\lambda \rho(p^r)}{p^r} \end{aligned} \quad (4)$$

сходятся для $1 \leq \lambda \leq \alpha$ и для каждого p

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^r} \rho(p^r) + 1 \neq 0; \quad (5)$$

2) если ряды (4) сходятся, то существует $M_\rho(f)$, $f \in \mathcal{L}_\alpha(\rho) \cap \mathcal{L}^*(\rho)$, и существуют $M_\rho(|f|^\lambda) \neq 0$ для $1 \leq \lambda \leq \alpha$. Если выполняется (5), то $M_\rho(f) \neq 0$.

Из теоремы 1 в случае $\rho(n) \equiv 1$ вытекает теорема Индлекофера, причем в более сильной форме. Условие $f \in \mathcal{L}^*$ заменено при доказательстве 1) на $f \in \mathcal{L}_0^*(1)$.

Взяв, например, в качестве $\rho(n)$ мультипликативную функцию такую, что $\rho(p^r) = 0$ при $r \geq 2$ для $p \equiv 1 \pmod{4}$, $\rho(p) = 0$ для $p \equiv 3 \pmod{4}$, $\rho(2) = 0$, для функций вида $\rho(n) \cdot f(n)$ найдем необходимые и достаточные условия существования $M(f\rho) \neq 0$, что не следует из теоремы А.

При доказательстве теоремы А (см. также [16]) важную роль играл критерий Эрдеша конечной распределенности аддитивных функций. Здесь мы сначала докажем его аналог с весом $\rho(n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Аддитивная арифметическая функция g называется *конечно распределенной с весом $\rho(n)$* , если существуют положительные вещественные числа c_2 , c_3 , последовательность $\{x_\ell\}$, монотонно стремящаяся к бесконечности, такие, что для каждого x_ℓ существуют k натуральных чисел $a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq x_\ell$, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{a_i \leq x_\ell} \rho(a_i) \geq c_2 \sum_{n \leq x_\ell} \rho(n) \quad \text{и} \quad |g(a_i) - g(a_j)| \leq c_3 \quad \text{при} \quad 1 \leq i \leq j \leq k.$$

ТЕОРЕМА 2. Для того чтобы вещественная аддитивная функция $g(n)$ была конечно распределенной с весом $\rho(n)$, $\rho \in A$, необходимо и достаточно, чтобы существовала постоянная c такая, что ряды

$$\sum_{p, |g(p) - c \log p| > 1} \frac{\rho(p)}{p}, \quad \sum_{p, |g(p) - c \log p| \leq 1} \frac{(g(p) - c \log p)^2}{p} \rho(p) \quad (6)$$

сходятся.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Здесь мы следуем доказательству теоремы Эрдеша, приведенному в [16], используя вместо теоремы Халоса теорему В. Рассмотрим

$$H(x_\ell, t) := \sum_{n \leq x_\ell} \rho(n) \exp(itg(n)), \quad \ell(t) := \lim_{x_\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{S(\rho, x_\ell)} |H(x_\ell, t)|.$$

Согласно теореме В этот предел существует для любого t . Для функции

$$D(\theta) := \left(\frac{\sin \pi \theta}{\pi \theta} \right)^2$$

справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \theta y} D(\theta) d\theta = \begin{cases} 1 - |y|, & \text{если } |y| \leq 1, \\ 0, & \text{если } |y| > 1. \end{cases}$$

Тогда для $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda |H(x_\ell, t)|^2 D(\lambda t) dt \\ &= \sum_{n \leq x_\ell} \sum_{\substack{m \leq x_\ell \\ |g(n) - g(m)| \leq 2\pi\lambda}} \rho(n) \rho(m) \left(1 - \frac{|g(n) - g(m)|}{2\pi\lambda} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Обе части этого равенства делим на $S^2(\rho, x_\ell)$ и переходим к пределу при $x_\ell \rightarrow \infty$. Тогда, используя теорему Лебега (см. [17, с. 298]), имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \left| \frac{1}{S(\rho, x_\ell)} H(x_\ell, t) \right|^2 D(\lambda t) dt \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \ell^2(t) D(\lambda t) dt.$$

Если в (7) положить $\lambda \geq c_3/\pi$, то когда n и m пробегает числа a_i ($i = \overline{1, k}$), выражение в скобке будет $\geq 1/2$, т.е. двойная сумма

$$\geq \frac{1}{2} \left(\sum_{a_i \leq x_\ell} \rho(a_i) \right)^2 \geq \frac{c_2^2}{2} S^2(\rho, x_\ell).$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c_3}{\pi} \ell^2(t) D\left(\frac{c_3 t}{\pi}\right) dt \geq \frac{c_2^2}{2} > 0.$$

Так как $0 \leq \ell(t) \leq 1$, то существует множество E значений t , $\text{mes}(E) > 0$, на котором $\ell(t) > 0$. Тогда в силу теоремы В существует вещественная функция $\tau = \tau(t)$ такая, что при $t \in E$ имеем

$$\sum_p \frac{\rho(p)}{p} (1 - \text{Re}(e^{itg(p)} p^{-i\tau})) < \infty.$$

Отметим, что для каждого $t \in E$ такое число $\tau(t)$ единственно.

Пусть

$$L(t, \tau) := \sum_p \frac{\rho(p)}{p} \sin^2 \left(\frac{1}{2} t g(p) - \frac{\tau}{2} \log p \right),$$

$$E(k) := \{t \in E, L(t, \tau) \leq k\}.$$

Поскольку $\text{mes}(E) > 0$, то существует k_0 такое, что $\text{mes}(E(k_0)) > 0$. Обозначим это множество через F . По лемме Штейнхауса [16, с. 16] существует интервал $(-2\delta, 2\delta)$ такой, что $(-2\delta, 2\delta) \subset (F - F) := \{x - y, x, y \in F\}$. Так как $\sin^2(x \pm y) \leq 2 \sin^2 x + 2 \sin^2 y$, то для $t_1, t_2 \in F$

$$L(t_1 \pm t_2, \tau(t_1) \pm \tau(t_2)) \leq 2L(t_1, \tau(t_1)) + 2L(t_2, \tau(t_2)) \leq 4k_0. \quad (8)$$

Итак, мы доказали, что для любого $t \in (-2\delta, 2\delta)$ существует $\tau(t)$ такое, что $L(t, \tau(t)) \leq 4k_0$. Отсюда следует, что для любого t существует $\tau(t)$ такое, что $L(t, \tau(t)) < +\infty$. Докажем, что $\tau(\alpha \cdot t) = \alpha \cdot \tau(t)$. Действительно, если $\alpha \in Q$, то это сразу следует из (8). В частности, для $\alpha \in Q$ имеем $\tau(\alpha) = \alpha \tau(1)$. Если α рациональное и $\alpha \in [-\delta, \delta]$, то

$$L(\alpha_n, \alpha \tau(1)) \leq 4k_0.$$

Пусть $\alpha \in [-\delta, \delta]$, α — иррациональное число. Выберем $\alpha_n \rightarrow \alpha$, $\alpha_n \in [-\delta, \delta]$, $\alpha_n \in Q$. Тогда для каждого α_n

$$L(\alpha_n, \alpha_n \tau(1)) \leq 4k_0.$$

Так как

$$L(\alpha_n, \alpha_n \tau(1)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{p \leq x} \frac{\rho(p)}{p} \sin^2 \left(\frac{1}{2} \alpha_n (g(p) - \tau(1) \log p) \right),$$

то

$$\sum_{p \leq x} \frac{\rho(p)}{p} \sin^2 \left(\frac{1}{2} \alpha_n (g(p) - \tau(1) \log p) \right) \leq 4k_0.$$

Тогда, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, а затем при $x \rightarrow \infty$, получим при $c = \tau(1)$ оценку

$$\sum_p \frac{\rho(p)}{p} (1 - \cos \alpha (g(p) - c \log p)) \leq 4k_0 \quad (9)$$

для любого $\alpha \in [-\delta, \delta]$. Проинтегрируя это неравенство по α от $-\delta$ до δ , получим

$$\sum_{p, h(p) \neq 0} \frac{\rho(p)}{p} \left(\delta - \frac{\sin \delta h(p)}{h(p)} \right) \leq 4k_0 \delta,$$

где $h(p) = g(p) - c \log p$. Отсюда легко следует сходимость рядов (6).

Если предположить сходимость рядов (6), то согласно [12, теорема 2] существует функция распределения $F(u)$, в точках непрерывности которой

$$\frac{1}{S(\rho, x)} \sum_{\substack{n \leq x \\ g(n) \leq u + A(x)}} \rho(n) \rightarrow \Phi(u),$$

где

$$A(x) = c \log x + \sum_{\substack{p \leq x \\ |g(p) - c \log p| \leq 1}} \frac{\rho(p)}{p} (g(p) - c \log p).$$

Для достаточно большого T при $x \geq x_0$ имеем оценку

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ |g(n) - A(x)| \leq T}} \rho(n) \geq \frac{1}{2} S(\rho, x).$$

То есть $g(n)$ будет конечно распределенной с весом $\rho(n)$. Теорема 2 доказана.

Доказательство первой части теоремы 1. Доказательство утверждения 1) теоремы 1 опирается на следующую лемму.

ЛЕММА 1. *Предположим, что $\|f\|_1(\rho) > 0$, где $\rho \in A(\tau)$, и существуют постоянные $\varepsilon > 0$, $c_4 > 0$ и последовательность $\{x_\ell\}$, монотонно стремящаяся к бесконечности, такие, что*

$$\sum_{\substack{n \leq x_\ell \\ \varepsilon \leq |f(n)| \leq 1/\varepsilon}} |f(n)| \rho(n) \geq c_4 S(\rho, x_\ell). \quad (10)$$

Тогда ряды

$$\sum_{\substack{p \\ |f(p)| \leq 3/2}} \frac{|f(p) - 1|^2}{p} \rho(p), \quad \sum_{\substack{p \\ |f(p) - 1| \geq 1/2}} \frac{|f(p)|^\lambda}{p} \rho(p), \quad \sum_p \sum_{r \geq 2} \frac{|f(p^r)|^\lambda \rho(p^r)}{p^r} \quad (11)$$

сходятся и

$$\sum_{p \leq x_\ell} \frac{|f(p)| - 1}{p} \rho(p) = O(1). \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (10) следует

$$\sum_{\substack{n \leq x_\ell \\ \varepsilon \leq |f(n)| \leq 1/\varepsilon}} \rho(n) \geq c_4 \varepsilon S(\rho, x_\ell).$$

Введем аддитивную функцию $g(n)$:

$$g(p^k) := \begin{cases} \log |f(p^k)|, & \text{если } f(p^k) \neq 0, \\ 1, & \text{если } f(p^k) = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\sum_{\substack{n \leq x_\ell \\ |g(n)| \leq \log 1/\varepsilon}} \rho(n) \geq c_4 \varepsilon S(\rho, x_\ell), \quad (13)$$

т.е. $g(n)$ конечно распределенная. Согласно теореме 2 существует c такое, что

$$\sum_p \frac{\rho(p)}{p} \min(1, (g(p) - c \log p)^2) < \infty.$$

В силу [12, теорема 2], как и при доказательстве теоремы 2, имеем

$$\frac{1}{S(\rho, x)} \sum_{\substack{n \leq x \\ g(n) - A(x) \leq u}} \rho(n) \rightarrow \Phi(u),$$

где

$$A(x) = c \log x + \sum_{\substack{p \leq x \\ |g(p) - c \log p| \leq 1}} \frac{\rho(p)}{p} (g(p) - c \log p).$$

По предположению $\rho(p) = O(1)$, поэтому сумма по p есть $O(\log \log x)$. Если бы $c \neq 0$, то $A(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$. Тогда при $x \geq x_0$ мы имели бы оценку

$$\frac{1}{S(\rho, x)} \sum_{\substack{n \leq x \\ |g(n) - A(x)| \leq |A(x)|/2}} \rho(n) \geq 1 - \frac{c_4 \varepsilon}{2},$$

т.е.

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ |g(n)| < |A(x)|/2}} \rho(n) < \frac{c_4 \varepsilon}{2} S(\rho, x).$$

При $x = x_\ell$ и $|A(x_\ell)| > 2 \log(1/\varepsilon)$ это противоречит (13); следовательно, $c = 0$, $A(x_\ell) = O(1)$ и

$$\sum_{p \leq x_\ell, |g(p)| \leq 1} \frac{g(p)}{p} \rho(p) = O(1).$$

Таким образом, получим оценку

$$\sum_{p, f(p)=0} \frac{\rho(p)}{p} + \sum_{p, f(p) \neq 0} \frac{\rho(p)}{p} \min(1, (\log |f(p)|)^2) < \infty, \quad (14)$$

и

$$\sum_{\substack{p \leq x_\ell \\ f(p) \neq 0, |\log |f(p)|| \leq 1}} \frac{\log |f(p)|}{p} \rho(p) = O(1).$$

Если $||f(p)| - 1| \leq 1/2$, то $|\log |f(p)|| < 1$ и $(\log |f(p)|)^2 \geq c_5 (|f(p)| - 1)^2$, где $c_5 = \text{const} > 0$. Поэтому из (14) вытекает, что

$$\sum_{p, ||f(p)| - 1| \leq 1/2} \frac{(|f(p)| - 1)^2}{p} \rho(p) < \frac{1}{c_5} \sum_{p, |\log |f(p)|| \leq 1} \frac{\log^2 |f(p)|}{p} \rho(p) < \infty. \quad (15)$$

Так как $\log |f(p)| = (|f(p)| - 1) + O((|f(p)| - 1)^2)$, то из последних двух оценок получим

$$\sum_{p \leq x_\ell, ||f(p)| - 1| \leq 1/2} \frac{|f(p)| - 1}{p} \rho(p) = O(1). \quad (16)$$

Если $||f(p)| - 1| > 1/2$, $|f(p)| \neq 0$, то $\log^2 |f(p)| > c_6 > 0$. Поэтому из (14) вытекает сходимость ряда

$$\sum_{p, ||f(p)| - 1| > 1/2} \frac{\rho(p)}{p} \quad (17)$$

и, следовательно, учитывая (15), получаем, что первый ряд в (11) сходится.

Ниже в доказательстве леммы 1 нам понадобится следующий результат Барбана.

ЛЕММА 2 [18, лемма 3.5]. Пусть g – неотрицательная мультипликативная функция, $g(p) \leq c$ для всех простых p . Тогда

$$\sum_{n \leq x} \mu^2(n) \frac{g(n)}{n} \asymp \exp \left\{ \sum_{p \leq x} \frac{g(p)}{p} \right\},$$

где постоянные в знаке $\asymp$ зависят только от c .

Обозначим $G^* := \{p : ||f(p)| - 1| > 1/2\}$. Представим n в виде $n = n_1 n_2$, где все простые делители n_1 входят в G^* , а простые делители n_2 не входят в G^* , n_1 и n_2 могут равняться единице. Так как $f \in \mathcal{L}_1(\rho)$ и $S(\rho, x) \sim Ax \log^{\tau-1} x$, то суммирование по Абелю дает

$$\sum_{n \leq x} \frac{|f(n)|\rho(n)}{n} \ll \log^{\tau} x.$$

Но для $p \notin G^*$ $f(p) = O(1)$. Тогда согласно лемме 2 имеем

$$\sum_{n_2 \leq x} \frac{|f(n_2)|}{n_2} \rho(n_2) \mu^2(n_2) \geq \exp \left(\sum_{p \leq x, p \notin G^*} \frac{|f(p)|\rho(p)}{p} \right).$$

Из (16), сходимости ряда (17) и принадлежности функции ρ к классу $A(\tau)$ получим

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p \leq x_{\ell} \\ p \notin G^*}} \frac{|f(p)|\rho(p)}{p} &= \sum_{\substack{p \leq x_{\ell} \\ p \notin G^*}} \frac{(|f(p)| - 1)\rho(p)}{p} + \sum_{p \leq x_{\ell}} \frac{\rho(p)}{p} - \sum_{\substack{p \leq x_{\ell} \\ ||f(p)| - 1| > 1/2}} \frac{\rho(p)}{p} \\ &= \tau \log \log x_{\ell} + O(1). \end{aligned}$$

Отсюда и из предыдущего неравенства вытекает

$$\sum_{n_2 \leq x_{\ell}} \frac{|f(n_2)|}{n_2} \rho(n_2) \mu^2(n_2) \geq c_7 \log^{\tau} x_{\ell},$$

где $c_7 > 0$. Тогда ввиду неравенства

$$\log^{\tau} x_{\ell} \gg \sum_{n \leq x_{\ell}^2} \frac{|f(n)|\rho(n)}{n} \geq \sum_{n \leq x_{\ell}} \frac{|f(n_1)|}{n_1} \rho(n_1) \sum_{n_2 \leq x_{\ell}} \frac{|f(n_2)|}{n_2} \rho(n_2) \mu^2(n_2)$$

получим

$$\sum_{n_1} \frac{|f(n_1)|}{n_1} \rho(n_1) < \infty,$$

в частности,

$$\sum_{p \in G^*} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|f(p^r)|}{p^r} \rho(p^r) < \infty. \quad (18)$$

Отсюда следует сходимость второго ряда в (11). Кроме того, из (16) и (18) имеем

$$\sum_{p \leq x_\ell} \frac{|f(p)| - 1}{p} \rho(p) = O(1).$$

Итак, соотношение (12) доказано. Докажем сходимость третьего ряда в (11). Представим n_2 в виде $n'_2 n''_2$, где n'_2 такова, что если $p \mid n'_2$, то $p^2 \mid n'_2$, n''_2 бесквадратное, $(n'_2, n''_2) = 1$, n_2, n''_2 могут равняться единице. Имеем

$$c_8 \log^\tau x_\ell \geq \sum_{n_2 \leq x_\ell^2} \frac{|f(n_2)| \rho(n_2)}{n_2} \geq \sum_{n'_2 \leq x_\ell} \frac{|f(n'_2)|}{n'_2} \rho(n'_2) \sum_{\substack{n''_2 \leq x_\ell \\ (n'_2, n''_2)=1}} \frac{|f(n''_2)| \rho(n''_2)}{n''_2}.$$

Применяя лемму 2 к сумме по n''_2 , получим, что для некоторого $c_9 > 0$ выполнено неравенство

$$\sum_{n''_2 \leq x_\ell, (n'_2, n''_2)=1} \frac{|f(n''_2)| \rho(n''_2)}{n''_2} > c_9 (\log^\tau x_\ell) \exp \left(- \sum_{p \mid n'_2} \frac{|f(p)| \rho(p)}{p} \right),$$

поэтому из предыдущего неравенства следует

$$\sum_{n'_2} \frac{|f(n'_2)|}{n'_2} \rho(n'_2) \exp \left(- \sum_{p \mid n'_2} \frac{|f(p)| \rho(p)}{p} \right) < \infty.$$

Этот ряд равен

$$\prod_{p \in G^*} \left(1 + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{|f(p^r)| \rho(p^r)}{p^r} e^{-|f(p)| \rho(p)/p} \right).$$

Следовательно,

$$\sum_{p \notin G^*} \sum_{r=2}^{\infty} \frac{|f(p^r)| \rho(p^r)}{p^r} < \infty. \quad (19)$$

Это вместе с (18) даст сходимость последнего ряда в (11). Лемма 1 полностью доказана.

Перейдем к доказательству первой части теоремы 1. Если $f \in \mathcal{L}_0^*(\rho) \cap \mathcal{L}_\alpha(\rho)$, то функция $|f(n)|^\lambda \in \mathcal{L}_1(\rho)$ при $1 \leq \lambda \leq \alpha$ и из неравенства Гёльдера

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ |f(n)| \leq 1/\varepsilon}} |f(n)| \rho(n) \leq \left(\sum_{\substack{n \leq x \\ |f(n)|^\lambda \leq (1/\varepsilon)^\lambda}} |f(n)|^\lambda \rho(n) \right)^{1/\lambda} (S(\rho, x))^{1-1/\lambda}$$

следует, что $|f(n)|^\lambda \in \mathcal{L}_0^*(\rho)$. Так как $M_\rho(f) \neq 0$, то $\|f\|_1(\rho) > 0$ и из неравенства Гёльдера вытекает, что $\|f^\lambda\|_1(\rho) > 0$ при $1 \leq \lambda \leq \alpha$. Выполнение условия (11) леммы 1 для $|f(n)|^\lambda$ следует из принадлежности $|f|^\lambda$ классу $\mathcal{L}_0^*(\rho)$ и существования $M_\rho(f) \neq 0$. Применив лемму 1, мы получим, что третий и четвертый ряд в (4) сходятся.

Докажем (5) и сходимость первых двух рядов в (4). Нам потребуется следующий результат.

ЛЕММА 3. Пусть ряд

$$\sum_{|a(p)| \geq 1/2} \frac{|a(p)|}{p}$$

сходится. Тогда при $\sigma > 1$

$$\sum_p \frac{a(p)}{p^\sigma} - \sum_{p \leq \exp(1/(\sigma-1))} \frac{a(p)}{p} = O(1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, оцениваемая разность по модулю не превосходит

$$\frac{1}{2} \sum_{p \leq \exp(1/(\sigma-1))} \left| \frac{1}{p^\sigma} - \frac{1}{p} \right| + \frac{1}{2} \sum_{p > \exp(1/(\sigma-1))} \frac{1}{p^\sigma} + 2 \sum_{|a(p)| \geq 1/2} \frac{|a(p)|}{p}.$$

Первая сумма с точностью до мультипликативной константы не превосходит

$$\sum_{p \leq \exp(1/(\sigma-1))} \frac{(\sigma-1) \log p}{p} = O(1).$$

Отсюда, учитывая, что вторая сумма равна

$$\int_{\exp(1/(\sigma-1))}^{\infty} \frac{1}{u^\sigma} d\pi(u) = O((\sigma-1)) + \sigma \int_{\exp(1/(\sigma-1))}^{\infty} \frac{\pi(u)}{u^{\sigma+1}} du = O(1),$$

получим утверждение леммы 3.

Из существования $M_\rho(f)$ и условия $\rho \in A(\tau)$ следует, что

$$\sum_{n \leq x} f(n) \rho(n) \sim B(\rho) M_\rho(f) x \log^{\tau-1} x.$$

Тогда при $s \rightarrow 1$ ($\operatorname{Re} s > 1$) справедливо соотношение

$$F(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n) \rho(n)}{n^s} \sim \frac{B(\rho) M_\rho(f)}{(s-1)^\tau}. \quad (20)$$

Функцию $F(s)$ можно представить в виде

$$\prod_p \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r) \rho(p^r)}{p^{rs}} \right) =: \prod_p (1 + H(p, s)).$$

При $p > p_0$, где p_0 достаточно большое, $|H(p, s)| \leq 3/4$. Действительно, когда $|f(p)| \leq 3/2$, это следует из сходимости последнего ряда в (4), а в случае $|f(p)| > 3/2$ — из сходимости третьего и последнего рядов. Пользуясь сходимостью последнего ряда в (4), находим

$$\prod_{p > p_0} (1 + |H(p, \sigma)|) \ll \exp \left(\sum_{p > p_0} |H(p, \sigma)| \right) \ll \exp \left(\sum_{p > p_0} \frac{|f(p)| \rho(p)}{p^\sigma} \right).$$

Возьмем $\sigma = \sigma(x_\ell) = 1 + 1/\log x_\ell$. Тогда в силу леммы 3 имеем

$$\sum_p \frac{|f(p)|\rho(p)}{p^{\sigma(x_\ell)}} = \sum_p \frac{\rho(p)}{p^{\sigma(x_\ell)}} + \sum_{p \leq x_\ell} \frac{|f(p)| - 1}{p} \rho(p) + O(1).$$

Следовательно, учитывая (12) и определение класса $A(\tau)$, находим

$$\prod_{p > p_0} (1 + |H(p, \sigma(x_\ell))|) \ll (\sigma(x_\ell) - 1)^{-\tau}.$$

Поэтому если для некоторого $p \leq p_0$ выполняется равенство

$$1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)\rho(p^r)}{p^r} = 0,$$

то $1 + H(p, \sigma) = o(1)$ при $\sigma \rightarrow 1$ и тогда получим

$$F(\sigma(x_\ell)) = o\left(\frac{1}{(\sigma(x_\ell) - 1)^\tau}\right),$$

что противоречит (20). Таким образом (5) доказано.

Далее, согласно (18) и сходимости последнего ряда в (11) при $s = \sigma \rightarrow 1 + 0$

$$\prod_{p \leq p_0} (1 + H(p, s)) \rightarrow c_{10} \neq 0, \quad \prod_{\substack{p > p_0 \\ ||f(p)| - 1| > 1/2}} (1 + H(p, s)) \rightarrow c_{11} \neq 0$$

и, следовательно, учитывая сходимость ряда (19), получим

$$F(\sigma) \sim c_{12} \exp \left\{ \sum_{\substack{p \\ ||f(p)| - 1| \leq 1/2}} \frac{f(p)\rho(p)}{p^\sigma} \right\}.$$

Так как мы имеем (19), то согласно (20) при $\sigma \rightarrow 1 + 0$

$$\sum_{\substack{p \\ ||f(p)| - 1| \leq 1/2}} \frac{f(p) - 1}{p^\sigma} \rho(p) \rightarrow D. \quad (21)$$

Отсюда и из леммы 3 вытекает ограниченность частичных сумм ряда

$$\sum_{\substack{p \\ ||f(p)| - 1| \leq 1/2}} \frac{f(p) - 1}{p} \rho(p).$$

Так как

$$|f(p) - 1|^2 = (|f(p)| - 1)^2 + 2(|f(p)| - 1) - 2(\operatorname{Re} f(p) - 1),$$

то из сходимости первого ряда в (11), учитывая (12), получим сходимость второго ряда в (4).

Докажем сходимость первого ряда в (4). Для этого, учитывая (21) и сходимость третьего ряда в (4), достаточно убедиться, что

$$\sum_{\substack{p \\ ||f(p)|-1| \leq 1/2}} \frac{f(p)-1}{p^\sigma} \rho(p) - \sum_{\substack{p \leq \exp(1/(\sigma-1)) \\ ||f(p)|-1| \leq 1/2}} \frac{f(p)-1}{p} \rho(p) \rightarrow 0$$

при $\sigma \rightarrow 1+0$. Модуль этой разности не превосходит

$$\sum_{\substack{p \leq \exp(1/(\sigma-1)) \\ ||f(p)|-1| \leq 1/2}} \frac{|f(p)-1|}{p} \rho(p) \left| \frac{1}{p^{\sigma-1}} - 1 \right| + \sum_{\substack{p > \exp(1/(\sigma-1)) \\ ||f(p)|-1| \leq 1/2}} \frac{|f(p)-1|}{p^\sigma} \rho(p).$$

Первая сумма с точностью до мультипликативной константы не превосходит

$$\frac{1}{2}(\sigma-1) \sum_{p \leq \exp(1/\sqrt{\sigma-1})} \frac{\log p}{p} + \left(\sum_{p > \exp(1/\sqrt{\sigma-1})} \frac{|f(p)-1|^2}{p} \right)^{1/2} \left(\sum_{p \leq \exp(1/(\sigma-1))} \frac{(\sigma-1) \log p}{p} \right)^{1/2}.$$

И поэтому в силу сходимости второго ряда в (4) она стремится к нулю при $\sigma \rightarrow 1+0$. Для оценки второй суммы также применим неравенство Коши. Получим, что она с точностью до константы оценивается сверху через

$$\left(\sum_{\substack{p \leq \exp(1/(\sigma-1)) \\ ||f(p)|-1| \leq 1/2}} \frac{|f(p)-1|^2}{p} \rho(p) \right)^{1/2} \left(\sum_{p > \exp(1/(\sigma-1))} \frac{\rho(p)}{p^\sigma} \right)^{1/2}.$$

Учитывая сходимость второго ряда в (4), ограниченность $\rho(p)$ и оценки интеграла при доказательстве леммы 3, находим, что вторая сумма также стремится к нулю при $\sigma \rightarrow 1+0$. Таким образом, первая часть теоремы 1 доказана.

Доказательство второй части теоремы 1. Нам потребуется следующий частный случай из результатов Левина–Файнлейба [4, теорема 6].

ЛЕММА 4. Пусть $f(n)$ – мультипликативная функция, удовлетворяющая условиям

$$\sum_{p \leq x} |f(p)| = O\left(\frac{x}{\log x}\right), \quad f(p^r) = O((2p)^\gamma), \quad 0 < \gamma < \frac{1}{2}, \quad r \geq 2,$$

$$\sum_{p \leq x} \frac{f(p) \log p}{p} = \tau_f \log x + O(\eta(x) \log x), \quad \eta(x) \searrow 0, \quad \eta(x) \log x \nearrow \infty.$$

Если существует последовательность $g(p)$ такая, что

$$\sum_{y < p \leq x} g(p) \log p \sim \tau_g x, \quad \sum_{p \leq x} |g(p)| = O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

и

$$\sum_{y < p \leq x} \frac{|f(p) - g(p)| - |f(p)|}{p} \rightarrow -\infty$$

для $y = y(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$ сколь угодно быстро, но так, что $\log x / \log y \rightarrow \infty$, то

$$\sum_{n \leq x} f(n) = \frac{e^{\gamma \tau_f}}{\Gamma(\tau_f)} \frac{x}{\log x} \prod_f (x) + o\left(\frac{x}{\log x} \prod_f (x)\right),$$

где γ – постоянная Эйлера,

$$\prod_f (x) = \prod_{p \leq x} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^r}\right).$$

Определим мультипликативную функцию f^* следующим образом:

$$f^*(p) = \begin{cases} 0, & \text{если } p \leq p_0 \text{ или } |f(p)| > \frac{3}{2}, \\ f(p)\rho(p), & \text{если } p > p_0 \text{ и } |f(p)| \leq \frac{3}{2}, \end{cases}$$

где p_0 достаточно большое и $f^*(p^r) = 0$ при $r \geq 2$. Проверим выполнение условий леммы 4 для функций $f(n) = f^*(n)$ и последовательности $g(p) = \rho(p)$. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{y < p \leq x} \frac{|f^*(p) - \rho(p)|}{p} &\leq \sqrt{\sum_{\substack{y < p \\ |f(p)| \leq 3/2}} \frac{|f(p) - 1|^2}{p} \rho(p)} \sum_{y < p \leq x} \frac{\rho(p)}{p} + \sum_{\substack{y < p \\ |f(p)| > 3/2}} \frac{\rho(p)}{p}, \\ \sum_{y < p \leq x} \frac{|f^*(p)|}{p} &\geq \sum_{y < p \leq x} \frac{\rho(p)}{p} - \sqrt{\sum_{\substack{y < p \\ |f(p)| \leq 3/2}} \frac{|f(p) - 1|^2}{p} \rho(p)} \sum_{y < p \leq x} \frac{\rho(p)}{p} - \sum_{\substack{y < p \leq x \\ |f(p)| > 3/2}} \frac{\rho(p)}{p}. \end{aligned}$$

Тогда из сходимости второго и третьего рядов в (4) и принадлежности ρ классу $A(\tau)$ нетрудно вывести, что для $y(x) \rightarrow \infty$ и $\log x / \log y \rightarrow \infty$ всегда

$$\sum_{y < p \leq x} \frac{|f^*(p) - \rho(p)| - |f^*(p)|}{p} \rightarrow -\infty.$$

Далее, находим

$$\sum_{p \leq x} \frac{f^*(p) \log p}{p} - \sum_{p \leq x} \frac{\rho(p) \log p}{p} \ll \sum_{\substack{p \leq x \\ |f(p)| \leq 3/2}} \frac{|f(p) - 1| \rho(p)}{p} \log p + \sum_{\substack{p \leq x \\ |f(p)| > 3/2}} \frac{\rho(p)}{p} \log p.$$

Сумма по $|f(p)| > 3/2$ есть $o(\log x)$. Сумму по $|f(p)| \leq 3/2$ разбиваем на две и применяем неравенство Коши. Она оценивается сверху через

$$\begin{aligned} &\sqrt{\sum_{\substack{p \leq \log x \\ |f(p)| \leq 3/2}} \frac{|f^*(p) - 1|^2 \rho(p)}{p} \sum_{p \leq \log x} \frac{\log^2 p \rho(p)}{p}} \\ &+ \sqrt{\sum_{\substack{p > \log x \\ |f(p)| \leq 3/2}} \frac{|f(p) - 1|^2 \rho(p)}{p} \sum_{p \leq x} \frac{\rho(p) \log^2 p}{p}} = o(\log x). \end{aligned}$$

Поэтому из предыдущего соотношения получим

$$\sum_{p \leq x} \frac{f^*(p) \log p}{p} = \tau \log x + o(\log x).$$

Таким образом, функция $f^*(n)$ и последовательность $\rho(p)$ удовлетворяют условиям леммы 4, согласно которой

$$S(f^*, x) = \frac{e^{-\gamma\tau}}{\Gamma(\tau)} \frac{x}{\log x} \prod_{f^*}(x) + o\left(\frac{x}{\log x} \prod_{|f^*|}(x)\right).$$

Из сходимости первого ряда в (4) следует сходимость произведения

$$\prod_p \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f^*(p^r)}{p^r}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\tau}.$$

Тогда, пользуясь формулой Мертенса [19, с. 94]

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-\gamma}}{\log x} \left(1 + O(e^{-c\sqrt{\log x}})\right),$$

получим

$$S(f^*, x) = x \log^{\tau-1} x \left(\prod_p \left(1 + \frac{f^*(p)}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\tau} + o(1) \right). \quad (22)$$

Введем мультипликативную функцию h , определяемую равенством $f\rho = f^* * h$, где $*$ означает операцию свертки Дирихле, и докажем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|h(n)|}{n} < \infty. \quad (23)$$

Переходя к рядам Дирихле и их эйлеровым произведениям при $\operatorname{Re} s > 1$, имеем

$$\begin{aligned} \sum_n \frac{h(n)}{n^s} &= \prod_{p \leq p_0} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)\rho(p^r)}{p^{rs}}\right) \prod_{\substack{p > p_0 \\ |f(p)| > 3/2}} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)\rho(p^r)}{p^{rs}}\right) \\ &\times \prod_{\substack{p > p_0 \\ |f(p)| \leq 3/2}} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)\rho(p^r)}{p^{rs}}\right) \left(1 - \frac{f(p)\rho(p)}{p^s}\right) \\ &\times \prod_{\substack{p > p_0 \\ |f(p)| \leq 3/2}} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f^2(p)\rho^2(p)}{p^{2s}}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Из сходимости третьего и четвертого рядов в (4) следует абсолютная сходимость первых двух произведений при $s = 1$. Так как $\rho(p) = O(1)$, то при достаточно большом p_0 и $s = 1$ четвертое произведение также абсолютно сходится. Третье произведение равно

$$\prod_{\substack{p > p_0 \\ |f(p)| \leq 3/2}} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)\rho(p^r) - f(p^{r-1})\rho(p^{r-1})f(p)\rho(p)}{p^{rs}}\right).$$

Из этого представления, ограниченности $\rho(p)$ и сходимости четвертого ряда в (4) вытекает абсолютная сходимость при $s = 1$ третьего произведения и, следовательно, соотношение (23).

Для суммы $S(f\rho, x)$ имеем

$$S(f\rho, x) = \sum_{n \leq x} (f^* * h)(n) = \sum_{n \leq \log x} h(n) S\left(f^*, \frac{x}{n}\right) + \sum_{\log x < n \leq x} h(n) S\left(f^*, \frac{x}{n}\right). \quad (24)$$

В первую сумму подставим асимптотику для $S(f^*, x)$ (см. (22)). Получим, что она равна

$$B(f^*) x \log^{\tau-1} x \sum_n \frac{h(n)}{n} + o(x \log^{\tau-1} x).$$

Применяя хорошо известное неравенство (см., например, [17, теорема 1])

$$\sum_{n \leq x} |f(n)| \ll \frac{x}{\log x} \prod_{|f|} (x), \quad (25)$$

имеем

$$\begin{aligned} S(|f^*|, x) &\ll \frac{x}{\log x} \exp\left(\sum_{\substack{p \leq x \\ |f(p)| \leq 3/2}} \frac{|f(p)|\rho(p)}{p}\right) \\ &= \frac{x}{\log x} \exp\left(\sum_{\substack{p \leq x \\ |f(p)| \leq 3/2}} \frac{|f(p)|-1}{p} \rho(p) + \sum_{p \leq x} \frac{\rho(p)}{p}\right) \\ &\ll x \log^{\tau-1} x. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что из сходимости рядов (4) и равенства

$$2(|f(p)| - 1) = |f(p) - 1|^2 - (|f(p)| - 1)^2 + 2(\operatorname{Re} f(p) - 1)$$

вытекает сходимость ряда

$$\sum_{|f(p)| \leq 3/2} \frac{|f(p)| - 1}{p} \rho(p).$$

Подставив полученную оценку во вторую сумму правой части (24) и учитывая, что

$$B(f^*) \sum_n \frac{h(n)}{n} = \prod_p \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)\rho(p^r)}{p^r}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\tau},$$

имеем

$$M_{\rho}(f) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{S(f\rho, x)}{S(\rho, x)} = \prod_p \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)\rho(p^r)}{p^r}\right) \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\rho(p^r)}{p^r}\right)^{-1}.$$

Если выполнено условие (5), то $M_{\rho}(f) \neq 0$.

Для доказательства существования $M_\rho(|f|^\lambda)$ при $1 \leq \lambda \leq \alpha$ заметим, что при $\lambda \geq 1$ и $||f(p)| - 1| \leq 1/2$ мы имеем

$$\begin{aligned} |f(p)|^\lambda - 1 &= \lambda(|f(p)| - 1) + O((|f(p)| - 1)^2), \\ (|f(p)|^\lambda - 1)^2 &= O((|f(p)| - 1)^2) = O(|f(p) - 1|^2) \end{aligned}$$

и поэтому первые два ряда в (4) сходятся для $|f(p)|^\lambda$.

Докажем, что $f \in S^*(\rho)$. Представим n в виде $n_1 n_2$, где числа n_1 бесквадратные и все простые делители n_1 таковы, что $|f(p)| \leq 3/2$, если же $p^m \parallel n_2$, то либо $m \geq 2$, либо $|f(p)| > 3/2$. Заметим, что из сходимости третьего и четвертого рядов в (4) следует, что ряд

$$\sum_{n_2} \frac{|f(n_2)|\rho(n_2)}{n_2}$$

сходится. Кроме этого, как уже было показано, имеют место оценки

$$\sum_{n_1 \leq x} |f(n_1)|\rho(n_1) \ll x \log^{\tau-1} x \quad \text{и} \quad \sum_{n_1 \leq x} |f(n_1)|^2 \rho(n_1) \ll x \log^{\tau-1} x.$$

Последняя оценка выводится обычным образом после использования неравенства (25), равенства

$$|f(p)|^2 - 1 = |f(p) - 1|^2 + 2(\operatorname{Re} f(p) - 1)$$

и сходимости первых трех рядов в (4). Далее, имеем при любом $K > 0$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq x \\ |f(n)| \geq K}} |f(n)|\rho(n) &\leq \sum_{\substack{n_2 \leq x \\ |f(n_2)| \geq \sqrt{K}}} |f(n_2)|\rho(n_2) \sum_{n_1 \leq x/n_2} |f(n_1)|\rho(n_1) \\ &\quad + \sum_{n_2 \leq x} |f(n_2)|\rho(n_2) \sum_{\substack{n_1 \leq x/n_2 \\ |f(n_1)| \geq \sqrt{K}}} |f(n_1)|\rho(n_1) \\ &\ll x \log_{\tau-1} x \sum_{|f(n_2)| \geq \sqrt{K}} \frac{|f(n_2)|\rho(n_2)}{n_2} \\ &\quad + \sum_{n_2 \leq x} |f(n_2)|\rho(n_2) \frac{1}{\sqrt{K}} \sum_{n_1 \leq x/n_2} |f(n_1)|^2 \rho(n_1) \\ &\ll x \log^{\tau-1} x \left(\sum_{|f(n_2)| \geq \sqrt{K}} \frac{|f(n_2)|}{n_2} \rho(n_2) + \frac{1}{\sqrt{K}} \sum_{n_2} \frac{|f(n_2)|}{n_2} \rho(n_2) \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $f \in \mathcal{L}^*(\rho)$. Теорема 1 полностью доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Delange H. Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives // Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. (3). 1961. V. 78. P. 273–304.
- [2] Halasz G. Über die Mittelwerte multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1968. V. 19. P. 365–404.
- [3] Wirsing E. Das asymptotische Verhalten von Summen über multiplikative Funktionen, II // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1967. V. 18. P. 411–467.
- [4] Левин Б. В., Файнлейб А. С. Мультипликативные функции и вероятностная теория чисел // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1970. Т. 34. С. 1064–1109.
- [5] Elliott P. D. T. A. A mean-value theorem for multiplicative functions // Proc. London Math. Soc. (3). 1975. V. 31. P. 418–438.
- [6] Daboussi H., Delange H. On a theorem of P.D.T.A. Elliott on multiplicative functions // J. London Math. Soc. 1976. V. 14. P. 345–356.
- [7] Elliott P. D. T. A. Mean-value theorems for multiplicative functions bounded in mean α -power, $\alpha > 1$ // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1980. V. 29. P. 177–205.
- [8] Indlekofer K.-H. A mean-value theorem for multiplicative functions // Math. Z. 1980. V. 172. P. 255–271.
- [9] Indlekofer K.-H. On multiplicative arithmetical functions // Coll. Math. Soc. Janos Bolyai. 1981. V. 34. P. 731–748.
- [10] Indlekofer K.-H. Properties of uniformly summable multiplicative functions // Period. Math. Hung. 1986. V. 17. P. 143–161.
- [11] Левин Б. В., Тимофеев Н. М. О суммах мультипликативных функций // Докл. АН СССР. 1970. Т. 193. С. 992–995.
- [12] Левин Б. В., Тимофеев Н. М. Теорема сравнения для мультипликативных функций // Acta Arith. 1982. V. 42. P. 21–47.
- [13] Тимофеев Н. М. Применение аналитического метода к суммированию мультипликативных функций // Ученые записки Владимирского пед. ин-та. 1971. Т. 38. С. 204–249.
- [14] Туляганов С. Т. О средних значениях мультипликативных функций // Матем. заметки. 1991. Т. 49. № 5. С. 117–127.
- [15] Туляганов С. Т. Суммирование значений мультипликативных функций I // Узб. матем. ж. 1996. № 2. С. 105–116; II // Узб. матем. ж. 1997. № 1. С. 99–114; III // Узб. матем. ж. 1998. № 1. С. 100–114.
- [16] Elliott P. D. T. A. Probabilistic Number Theory I: Mean-Value Theorems. New York: Springer-Verlag, 1979.
- [17] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.
- [18] Барбан М. Б. Метод “большого решета” и его применения в теории чисел // УМН. 1966. Т. 21. № 1. С. 51–102.
- [19] Прахар К. Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967.

(Н. М. Тимофеев) Владимирский государственный педагогический университет
 (С. Т. Туляганов) Институт математики Республики Узбекистан, г. Ташкент
 E-mail: timofeev@vgpu.elcom.ru

Поступило
 14.01.2000