Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Ушаков, IA-автоморфизмы свободных произведений двух абелевых групп без кручения, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 6, 909–917

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm802>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 15:45:01

УДК 512.54

IA-АВТОМОРФИЗМЫ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ДВУХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ

П. В. Ушаков

Пусть A – свободное произведение двух абелевых групп без кручения, $P \triangleleft A$, $P \subseteq C$, где C – декартова подгруппа группы A , а $\mathbb{Z}(A/P)$ не содержит делителей нуля. В данной статье доказано, что в этом случае всякий автоморфизм группы A/P' является внутренним. Указанный результат обобщает известный результат Бахмута–Форманека–Мочизуки об автоморфизмах групп вида F_2/R' , $R \triangleleft F_2$, $R \subseteq F_2'$, где F_2 – свободная группа ранга 2.

Библиография: 4 названия.

1. Введение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Автоморфизм группы G называется *IA-автоморфизмом*, если он индуцирует тождественное отображение на факторгруппе G/G' . Обозначим через $\text{IAut}(G)$ группу IA-автоморфизмов группы G .

Пусть $A = A_1 * A_2$ – свободное произведение двух нетривиальных абелевых групп без кручения. Допустим, C – декартова подгруппа этого произведения, $P \triangleleft A$, $P \subseteq C$. Предположим, $\mathbb{Z}(A/P)$ не содержит делителей нуля. Основным результатом данной работы является

ТЕОРЕМА 1. *Имеет место равенство $\text{IAut}(A/P') = \text{Inn}(A/P')$.*

Указанная теорема является естественным обобщением следующей теоремы, доказанной Бахмутом, Форманеком, Мочизуки [1].

ТЕОРЕМА [1]. *Пусть F_2 – свободная группа с двумя порождающими, $R \triangleleft F_2$, $R \subseteq F_2'$. Допустим, $\mathbb{Z}(F_2/R)$ не содержит делителей нуля. Тогда*

$$\text{IAut}(F_2/R') = \text{Inn}(F_2/R').$$

2. Вспомогательные факты и обозначения

Пусть $G \stackrel{\text{def}}{=} A/P'$, $H \stackrel{\text{def}}{=} A/P$. Для каждого $x \in G$ обозначим его образ в H также через $\bar{x}$; для каждого $x \in A$ обозначим его образ в H через $\bar{x}$; для каждого $x \in A$ обозначим его образ в G через $\tilde{x}$. Образы групп A_1, A_2 в группе G обозначим через G_1, G_2 соответственно; образы групп A_1, A_2 в группе H обозначим через H_1, H_2 соответственно. Поскольку $A_1 \times A_2$ – абелева группа без кручения, она упорядочиваема. Очевидно, что $A/A' \cong G/G' \cong H/H' \cong A_1 \times A_2$. Зафиксируем линейный порядок на H/H' , согласованный с операцией умножения. Для всякого множества S обозначим через $\#(S)$ мощность этого множества. Через Δ_H обозначим фундаментальный идеал кольца $\mathbb{Z}H$.

2.1. Кольцо, ассоциированное с $\mathbb{Z}H$. В [2] было описано ассоциативное с единицей кольцо $\mathcal{A} \supseteq \mathbb{Z}H$, в котором элементы вида $f - 1$, где $fH' \neq 1$, обратимы. Это кольцо зависит, вообще говоря, от выбранного на H/H' порядка. Сформулируем метод построения данного кольца и некоторые его свойства (подробное описание можно прочитать в [2]). Рассмотрим

$$\Gamma = \left\{ \sum_{h \in H} z_h h \mid z_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

– множество всех формальных сумм элементов из H с целыми коэффициентами,

$$\Delta = \left\{ \sum_{h \in H} z_h h \in \Gamma \mid \forall h \in H \quad \#\{g \mid g = h \bmod H' \text{ и } z_g \neq 0\} < \infty \right\}.$$

Введем на Γ операцию сложения, формально полагая

$$\left(\sum_{h \in H} (z'_h + z''_h) h \right) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{h \in H} z'_h h \right) + \left(\sum_{h \in H} z''_h h \right)$$

для всех $(\sum_{h \in H} z'_h h), (\sum_{h \in H} z''_h h) \in \Gamma$. Очевидно, что Γ и Δ превращаются в абелевы группы относительно этой операции.

Мы скажем, что $\delta \in \Delta$ является *простой цепочкой*, если

$$\delta = \left(\sum_{i=1}^{\infty} z_i h_i \right), \quad h_{i+1}H' \geq h_i H', \quad i = 1, \dots, \infty,$$

или

$$\delta = \left(\sum_{i=1}^n z_i h_i \right), \quad h_{i+1}H' \geq h_i H', \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Здесь $0 \neq z_i \in \mathbb{Z}, h_i \in H; h_i \neq h_j, i \neq j$.

Пусть $a = \sum_{h \in H} z_h h$, $b = \sum_{h \in H} z'_h h \in \Delta$. Положим $ab \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{h \in H} z''_h h$, где $z''_h = \sum_{h_1 h_2 = h} z_{h_1} z'_{h_2}$. Понятно, что такая операция корректно определена лишь для тех a и b , для которых для всякого $h \in H$ существует лишь конечное число пар (h_1, h_2) таких, что $h_1 h_2 = h$. В частности, произведение конечного числа простых цепочек определено корректно.

Определим множество $\mathcal{A}$. Оно будет состоять из тех элементов из Δ , которые могут быть представлены как конечные суммы конечных произведений простых цепочек. Очевидно, что $\mathcal{A} \supseteq \mathbb{Z}H$ замкнуто относительно операций сложения и умножения. Более того, в $\mathcal{A}$ выполнены аксиомы ассоциативного кольца с единицей.

При этом если $x \in H$, $xH' > 1$, то элемент $(x-1)$ обратим в $\mathcal{A}$, $(x-1)^{-1} = -1 - x^2 - x^3 - \dots$. Если $x \in H$, $xH' < 1$, то $(x-1)^{-1} = (1 + x^{-1} + x^{-2} + \dots)x^{-1}$.

Мы можем расширить действие всякого IА-эндоморфизма α группы H до эндоморфизма кольца $\mathcal{A}$, просто полагая

$$\alpha\left(\sum_{h \in H} z_h h\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{h \in H} z_h \alpha(h).$$

ЛЕММА 1. Пусть

$$\begin{aligned} a &= a_1 h_1 + \sum_{i=2}^{\infty} a_i h_i \in \mathcal{A}, & h_i &\in H, & a_i &\in \mathbb{Z}H', & h_i H' > h_1 H', \\ b &= b_1 g_1 + \sum_{j=2}^{\infty} b_j g_j \in \mathcal{A}, & g_j &\in H, & b_j &\in \mathbb{Z}H', & g_j H' > g_1 H', \\ & & a_1 &\neq 0, & b_1 &\neq 0. \end{aligned}$$

Тогда $ab \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что

$$ab = a_1 h_1 b_1 h_1^{-1} h_1 g_1 + \sum_{i=2}^{\infty} c_i f_i, \quad f_i \in H, \quad c_i \in \mathbb{Z}H', \quad f_i H' > h_1 g_1 H'.$$

Поскольку в $\mathbb{Z}H$ нет делителей нуля, то $a_1 h_1 b_1 h_1^{-1} h_1 g_1 \neq 0$. Лемма доказана.

2.2. Обобщенные дифференцирования групповых колец. Вложение Шмелькина (см. [3]) позволяет ввести отображения $\overline{D}_1, \overline{D}_2$, которые играют при исследовании группы A/P' ту же роль, что и дифференцирования Фокса $\overline{\partial}/\partial(x_1), \overline{\partial}/\partial(x_2)$ играют при исследовании групп вида $F_2/R', F_2 = F_2(x_1, x_2)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обобщенным дифференцированием по компоненте $i = 1, 2$ называется отображение $D_i: \mathbb{Z}A \rightarrow \mathbb{Z}A$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

- 1) для любых $a, b \in \mathbb{Z}A$ выполнено $D_i(a + b) = D_i(a) + D_i(b)$;
- 2) для любых $a, b \in \mathbb{Z}A$ выполнено $D_i(ab) = aD_i(b) + \varepsilon(b)D_i(a)$;
- 3) для любого $a \in A_i$ выполнено $D_i(a) = a - 1$;
- 4) для любого $a \in A_j, j \neq i$, выполнено $D_i(a) = 0$;

где ε – гомоморфизм тривиализации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Индукцированным обобщенным дифференцированием по компоненте* $i = 1, 2$ называется отображение $\overline{D}_i: \mathbb{Z}A \rightarrow \mathbb{Z}H$, определяемое по правилу $\overline{D}_i(a) \stackrel{\text{def}}{=} \tau(D_i(a))$, $a \in A$, τ – естественное отображение $\mathbb{Z}A \rightarrow \mathbb{Z}H$.

Далее мы рассматриваем дифференцирования $\overline{D}_i$, $i = 1, 2$, как отображения $\mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}H$, поскольку $\overline{D}_i(ab) = \overline{D}_i(a)$ для всяких $a \in A$, $b \in P'$. Кроме того, $\overline{D}_i(a) = 0$, $i = 1, 2$, тогда и только тогда, когда $a \in P'$. (Эти два факта напрямую следуют из вложения Шмелькина [3].)

Важнейшим свойством дифференцирований является следующее свойство (см. [4]). Если $a \in \mathbb{Z}H(H_1 - 1)$, $b \in \mathbb{Z}H(H_2 - 1)$, $u \in H$, $u - 1 = a + b$, то существует $v \in G$, $\overline{D}_1(v) = a$, $\overline{D}_2(v) = b$, $\overline{v} = u$. Обратно, для всякого $v \in G$ выполнено $\overline{D}_1(v) \in \mathbb{Z}H(H_1 - 1)$, $\overline{D}_2(v) \in \mathbb{Z}H(H_2 - 1)$, $\overline{D}_1(v) + \overline{D}_2(v) = \overline{v} - 1$.

Полное описание этих дифференцирований и подобных им отображений можно найти в [2].

2.3. Вложение группы $\text{IAut}(G)$ в полупрямое произведение. Произвольный IA-автоморфизм α группы G индуцирует IA-автоморфизм $\overline{\alpha}$ группы H (см., например, [2]). Кроме того, для всяких $1 \neq x_1 \in A_1$, $1 \neq x'_1 \in A_1$ выполнены равенства

$$\begin{aligned} (\overline{\alpha}(\overline{x}_1) - 1)^{-1} \overline{D}_1(\alpha(\tilde{x}_1)) &= (\overline{\alpha}(\overline{x}'_1) - 1)^{-1} \overline{D}_1(\alpha(\tilde{x}'_1)), \\ (\overline{\alpha}(\overline{x}_1) - 1)^{-1} \overline{D}_2(\alpha(\tilde{x}_1)) &= (\overline{\alpha}(\overline{x}'_1) - 1)^{-1} \overline{D}_2(\alpha(\tilde{x}'_1)). \end{aligned}$$

Аналогично, для всяких $1 \neq x_2 \in A_2$, $1 \neq x'_2 \in A_2$ выполнены равенства

$$\begin{aligned} (\overline{\alpha}(\overline{x}_2) - 1)^{-1} \overline{D}_1(\alpha(\tilde{x}_2)) &= (\overline{\alpha}(\overline{x}'_2) - 1)^{-1} \overline{D}_1(\alpha(\tilde{x}'_2)), \\ (\overline{\alpha}(\overline{x}_2) - 1)^{-1} \overline{D}_2(\alpha(\tilde{x}_2)) &= (\overline{\alpha}(\overline{x}'_2) - 1)^{-1} \overline{D}_2(\alpha(\tilde{x}'_2)). \end{aligned}$$

Автоморфизм $\overline{\alpha}$ продолжается до автоморфизма кольца $\mathcal{A}$ и, следовательно, до автоморфизма группы $\text{GL}_2(\mathcal{A})$. Под $(\text{GL}_2(\mathcal{A}) \lambda \text{IAut}(H))$ мы подразумеваем расширение группы $\text{GL}_2(\mathcal{A})$ при помощи группы автоморфизмов $\text{IAut}(H)$.

Рассмотрим ограниченный вариант теоремы, доказанной в [2].

ТЕОРЕМА 2. Отображение

$$\begin{aligned} &\text{IAut}(G) \rightarrow (\text{GL}_2(\mathcal{A}) \lambda \text{IAut}(H)), \\ \alpha \rightarrow &\left(\overline{\alpha}, \left\| \begin{pmatrix} (\overline{\alpha}(\overline{x}_1) - 1) & 0 \\ 0 & (\overline{\alpha}(\overline{x}_2) - 1) \end{pmatrix} \right\|^{-1} \left\| \begin{pmatrix} \overline{D}_1(\alpha(\tilde{x}_1)) & \overline{D}_2(\alpha(\tilde{x}_1)) \\ \overline{D}_1(\alpha(\tilde{x}_2)) & \overline{D}_2(\alpha(\tilde{x}_2)) \end{pmatrix} \right\| \right), \end{aligned}$$

где $\alpha \in \text{IAut}(G)$, а $1 \neq x_1 \in A_1$, $1 \neq x_2 \in A_2$ – произвольные элементы, является мономорфизмом.

ЛЕММА 2 [2]. Пусть $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$. Если A_1 – не циклическая группа, то для всякого $\alpha \in \text{IAut}(G)$ выполнено

$$(\overline{\alpha}(\overline{x}_1) - 1)^{-1} \overline{D}_1(\alpha(\tilde{x}_1)) \in \mathbb{Z}H, \quad (\overline{\alpha}(\overline{x}_1) - 1)^{-1} \overline{D}_2(\alpha(\tilde{x}_1)) \in \mathbb{Z}H.$$

Если A_2 – не циклическая группа, то для всякого $\alpha \in \text{IAut}(G)$ выполнено

$$(\bar{\alpha}(\bar{x}_2) - 1)^{-1} \bar{D}_1(\alpha(\tilde{x}_2)) \in \mathbb{Z}H, \quad (\bar{\alpha}(\bar{x}_2) - 1)^{-1} \bar{D}_2(\alpha(\tilde{x}_2)) \in \mathbb{Z}H.$$

Зафиксируем далее некоторый IA-автоморфизм $\alpha \in \text{IAut}(G)$. Для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что $\alpha \in \text{Inn}(G)$. Пусть $1 \neq x_1 \in A_1$, $1 \neq x_2 \in A_2$. Обозначим

$$\begin{aligned} s_{11} &\stackrel{\text{def}}{=} (\bar{\alpha}(\bar{x}_1) - 1)^{-1} \bar{D}_1(\alpha(\tilde{x}_1)), & s_{12} &\stackrel{\text{def}}{=} (\bar{\alpha}(\bar{x}_1) - 1)^{-1} \bar{D}_2(\alpha(\tilde{x}_1)), \\ s_{21} &\stackrel{\text{def}}{=} (\bar{\alpha}(\bar{x}_2) - 1)^{-1} \bar{D}_1(\alpha(\tilde{x}_2)), & s_{22} &\stackrel{\text{def}}{=} (\bar{\alpha}(\bar{x}_2) - 1)^{-1} \bar{D}_2(\alpha(\tilde{x}_2)), \\ c_{11} &\stackrel{\text{def}}{=} (\bar{\alpha}^{-1}(\bar{x}_1) - 1)^{-1} \bar{D}_1(\alpha^{-1}(\tilde{x}_1)), & c_{12} &\stackrel{\text{def}}{=} (\bar{\alpha}^{-1}(\bar{x}_1) - 1)^{-1} \bar{D}_2(\alpha^{-1}(\tilde{x}_1)), \\ c_{21} &\stackrel{\text{def}}{=} (\bar{\alpha}^{-1}(\bar{x}_2) - 1)^{-1} \bar{D}_1(\alpha^{-1}(\tilde{x}_2)), & c_{22} &\stackrel{\text{def}}{=} (\bar{\alpha}^{-1}(\bar{x}_2) - 1)^{-1} \bar{D}_2(\alpha^{-1}(\tilde{x}_2)). \end{aligned}$$

Заметим, что $s_{11} + s_{12} = 1$, $s_{21} + s_{22} = 1$, $c_{11} + c_{12} = 1$, $c_{21} + c_{22} = 1$.

3. Базовые леммы

3.1. Фундаментальное тождество. Используя теорему 2, получим

$$\left\| \begin{smallmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{smallmatrix} \right\| \left\| \begin{smallmatrix} \bar{\alpha}(c_{11}) & \bar{\alpha}(c_{12}) \\ \bar{\alpha}(c_{21}) & \bar{\alpha}(c_{22}) \end{smallmatrix} \right\| = \left\| \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right\|.$$

Тогда

$$\left\| \begin{smallmatrix} 1 - s_{12} & s_{12} \\ s_{21} & 1 - s_{21} \end{smallmatrix} \right\| \left\| \begin{smallmatrix} \bar{\alpha}(1 - c_{12}) & \bar{\alpha}(c_{12}) \\ \bar{\alpha}(c_{21}) & \bar{\alpha}(1 - c_{21}) \end{smallmatrix} \right\| = \left\| \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right\|,$$

откуда следует, что

$$(1 - s_{12})\bar{\alpha}(c_{12}) + s_{12}(1 - \bar{\alpha}(c_{21})) = 0 \quad \text{и} \quad s_{21}(1 - \bar{\alpha}(c_{12})) + (1 - s_{21})(\bar{\alpha}(c_{21})) = 0.$$

Складывая последние два равенства, вычитая слева и справа по 1 и собирая множители, получим фундаментальное тождество

$$(1 - s_{12} - s_{21})(1 - \bar{\alpha}(c_{12}) - \bar{\alpha}(c_{21})) = 1.$$

Положим далее $u \stackrel{\text{def}}{=} 1 - s_{12} - s_{21}$. Тогда $u^{-1} = \bar{\alpha}(1 - c_{12} - c_{21})$.

3.2. Принадлежность элементов u, u^{-1} групповому кольцу $\mathbb{Z}H$. Рассмотрим следующие случаи.

3.2.1. A_1, A_2 – нециклические подгруппы. В этом случае $u = 1 - s_{12} - s_{21} \in \mathbb{Z}H$ по лемме 2. Аналогично, $u^{-1} \in \mathbb{Z}H$.

3.2.2. A_2 – нециклическая подгруппа, $A_1 = \langle x \rangle$ – циклическая подгруппа. По лемме 2 $s_{22} \in \mathbb{Z}H$. Предположим, что $u \notin \mathbb{Z}H$. Поскольку $u = 1 - s_{12} - s_{21} = s_{22} - s_{12}$, получим, что $s_{12} \notin \mathbb{Z}H$. Без ограничения общности мы можем предположить, что $xH' > 1$.

Мы можем записать, что $s_{12} = (\overline{\alpha}(\overline{x}) - 1)^{-1} \overline{D}_2(\alpha(\tilde{x}))$. По определению дифференцирований

$$\overline{D}_2(\alpha(\tilde{x})) = \sum_{i=1}^n a_i (y_i - 1),$$

где $a_i \in \mathbb{Z}(\langle H_1, H' \rangle)$, $y_i \in H_2$, $y_i \neq y_j$ при $i \neq j$. Очевидно, что $(\overline{\alpha}(\overline{x}) - 1)^{-1} a_i \neq 0$ при всех i по лемме 1. Тогда $(\overline{\alpha}(\overline{x}) - 1)^{-1} a_i \neq 0$ состоит из бесконечного числа элементов при некотором i . Из того, что

$$(\overline{\alpha}(\overline{x}) - 1)^{-1} = -1 - \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\alpha}(\overline{x})^i,$$

следует, что $u = \sum_{i=1}^n b_i z_i$, где z_i – различные элементы подгруппы H_2 , а $0 \neq b_i \in \mathcal{A}$ – бесконечные или конечные суммы элементов из $\langle H_1, H' \rangle$. При этом $n > 1$ ввиду бесконечности при некотором i суммы $(\overline{\alpha}(\overline{x}) - 1)^{-1} a_i \neq 0$.

Используя фундаментальное тождество, получим $u^{-1} = \overline{\alpha}(1 - c_{12} - c_{21})$. Легко можно получить, что

$$\overline{\alpha}^{-1}(u^{-1}) = \sum_{j=1}^m d_j w_j,$$

где w_j – различные элементы подгруппы H_2 , $0 \neq d_j \in \mathcal{A}$ – бесконечные или конечные суммы элементов из $\langle H_1, H' \rangle$. Из этого следует, что

$$u^{-1} = \sum_{j=1}^m d'_j w_j,$$

где $0 \neq d'_j$ – бесконечные или конечные суммы элементов из $\langle H_1, H' \rangle$. Заметим, что m не обязательно больше 1, поскольку мы не предполагаем, что $u^{-1} \notin \mathbb{Z}H$.

Предположим, что $w_1 H' < w_2 H' < \dots < w_m H'$ и $z_1 H' < z_2 H' < \dots < z_n H'$. Тогда

$$uu^{-1} = \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}} b_i z_i d'_j w_j.$$

Поскольку $z_n w_m H' > z_i w_j H'$, $i < n$; $z_n w_m H' > z_i w_j H'$, $j < m$; $z_1 w_1 H' < z_i w_j H'$, $i > 1$; $z_1 w_1 H' < z_i w_j H'$, $j > 1$, и $b_i z_i d'_j z_i^{-1} \neq 0$ по лемме 1, то мы получим $uu^{-1} \neq 1$, что невозможно. Следовательно, $u \in \mathbb{Z}H$. Аналогично, $u^{-1} \in \mathbb{Z}H$.

3.2.3. $A_1 = \langle x \rangle$, $A_2 = \langle y \rangle$ – циклические подгруппы. Предположим, что $xH' > 1$ и $yH' > 1$. Докажем, что $s_{21}, s_{12} \in \mathbb{Z}H$. Допустим, что $s_{21} \notin \mathbb{Z}H$. Очевидно, что $\overline{D}_1(\alpha(y)) = a(\overline{x} - 1)$, $a \in \mathbb{Z}H$. Из этого следует, что

$$(\overline{\alpha}(\overline{x}) - 1)s_{21} = (\overline{\alpha}(\overline{x}) - 1)(\overline{\alpha}(\overline{y}) - 1)^{-1} \overline{D}_1(\alpha(\tilde{y})) = (\overline{\alpha}(\overline{x}) - 1)(\overline{\alpha}(\overline{y}) - 1)^{-1} a(\overline{x} - 1).$$

Аналогично, для некоторого $b \in \mathbb{Z}H$ получим

$$(\bar{\alpha}^{-1}(\bar{x}) - 1)c_{21} = (\bar{\alpha}^{-1}(\bar{x}) - 1)(\bar{\alpha}^{-1}(\bar{y}) - 1)^{-1}b(\bar{x} - 1).$$

Из этого следует, что

$$(\bar{\alpha}(\bar{x}) - 1)u = (\bar{\alpha}(\bar{x}) - 1)(1 - s_{12} - s_{21}) = (\bar{\alpha}(\bar{x}) - 1)(s_{11} - s_{21}) = \bar{D}_1(\alpha(\tilde{x})) - (\bar{\alpha}(\bar{x}) - 1)s_{21}.$$

Заметим, что по определению дифференцирований $\bar{D}_1(\alpha(\tilde{x})) = d(\bar{x} - 1)$, $d \in \mathbb{Z}H$. Из этого следует, что

$$(\bar{\alpha}(\bar{x}) - 1)u = d(\bar{x} - 1) + (\bar{\alpha}(\bar{x}) - 1)(\bar{\alpha}(\bar{y}) - 1)^{-1}a(\bar{x} - 1) = (d + (\bar{\alpha}(\bar{x}) - 1)(\bar{\alpha}(\bar{y}) - 1)^{-1}a)(\bar{x} - 1).$$

Далее мы действуем, как в предыдущем пункте. Очевидно, что

$$(d + (\bar{\alpha}(\bar{x}) - 1)(\bar{\alpha}(\bar{y}) - 1)^{-1}a) = \sum_{i=1}^n b_i z_i,$$

где z_i – различные элементы подгруппы H_1 , а $0 \neq b_i \in \mathcal{A}$ – бесконечные или конечные суммы элементов из $\langle H_2, H' \rangle$. При этом $n > 1$. Обозначим $v = \sum_{i=1}^n b_i z_i$.

Аналогично,

$$(\bar{x} - 1)(\bar{\alpha}(1 - c_{12} - c_{21})) = \left(\sum_{j=1}^m d_j w_j \right) (\alpha(x) - 1),$$

где w_j – различные элементы подгруппы H_1 , а $0 \neq d_j \in \mathcal{A}$ – бесконечные или конечные суммы элементов из $\langle H_2, H' \rangle$. Заметим, что m не обязательно больше 1. Обозначим $w = \sum_{j=1}^m d_j w_j$. Таким образом, мы получим равенство

$$(\bar{\alpha}(x) - 1) = (\bar{\alpha}(x) - 1)uu^{-1} = v(\bar{x} - 1)u^{-1} = vw(\bar{\alpha}(\bar{x}) - 1).$$

Действуя как в предыдущем пункте, получим $vw = 1$ и придем к противоречию (мы используем лемму 1). Следовательно, $s_{21} \in \mathbb{Z}H$. Аналогично, $s_{12}, c_{12}, c_{21} \in \mathbb{Z}H$. Следовательно, $u, u^{-1} \in \mathbb{Z}H$.

4. Описание действия автоморфизма $\bar{\alpha}$ на группе H

ЛЕММА 3. Для s_{21} и s_{12} выполнено условие $s_{21} \in \mathbb{Z}H(H_1 - 1)$, $s_{12} \in \mathbb{Z}H(H_2 - 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, мы видим, что $\overline{D}_j(\alpha(\tilde{y})) \in \mathbb{Z}H(H_j - 1)$ для каждого $y \in A_i$, $i, j = 1, 2, i \neq j$. Для всех $a, b \in H$ справедливо

$$a(b - 1) = ab - a = ab - 1 + 1 - b = (ab - 1) - (b - 1).$$

Следовательно,

$$\overline{D}_j(\alpha(\tilde{y})) = \sum_{k=1}^K b_k(\overline{x}_k - 1),$$

где $K \in \mathbb{N}$, $b_k \in \mathbb{Z}\langle H', H_i \rangle$, $x_k \in A_j$. Поскольку $\overline{\alpha}$ — IA-автоморфизм, мы видим, что $\overline{\alpha}(\overline{y}) \in \langle H', H_i \rangle$. Из этого следует равенство

$$s_{ij} = (\overline{\alpha}(\overline{y}) - 1)^{-1} \overline{D}_j(\alpha(\tilde{y})) = \sum_{k=1}^K ((\overline{\alpha}(\overline{y}) - 1)^{-1} b_k)(\overline{x}_k - 1).$$

Поскольку $(\overline{\alpha}(\overline{y}) - 1)^{-1} \overline{D}_j(\alpha(\tilde{y})) \in \mathbb{Z}H$, мы получим, что для каждого $k = 1, \dots, K$ выполнено $((\overline{\alpha}(\overline{y}) - 1)^{-1} b_k) \in \mathbb{Z}H$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Для u имеет место представление $u = ab$, где $a \in \mathbb{Z}H'$, $b \in H$.

Поскольку $u, u^{-1} \in \mathbb{Z}H$, доказательство очевидно.

ЛЕММА 5. Для всякого $x \in H$ справедливо $u^{-1} \overline{\alpha}(x) u = x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что $(\overline{\alpha}(x) - 1)u = u(x - 1)$ для всех $x \in H_1$ и всех $x \in H_2$.

Пусть $x \in A_1$. Тогда

$$(\overline{\alpha}(\overline{x}) - 1)u = (\overline{\alpha}(\overline{x}) - 1)(1 - s_{12} - s_{21}) = (\overline{\alpha}(\overline{x}) - 1)s_{11} - (\overline{\alpha}(\overline{x}) - 1)s_{21}.$$

Поскольку $s_{21} \in \mathbb{Z}H(H_1 - 1)$ по лемме 3, а $(\overline{\alpha}(\overline{x}) - 1)s_{11} = \overline{D}_1(\alpha(\tilde{x})) \in \mathbb{Z}H(H_1 - 1)$ по определению дифференцирований, мы видим, что $(\overline{\alpha}(\overline{x}) - 1)u \in \mathbb{Z}H(H_1 - 1)$.

По лемме 4 мы получим $u = a\overline{y}\overline{x}_0$, где $a \in \mathbb{Z}H'$, $y \in A_2$, $x_0 \in A_1$. Вспомним также, что $\overline{\alpha}$ — IA-автоморфизм, откуда следует $\overline{\alpha}(\overline{x}) = \overline{x} \bmod H'$. Поскольку $(\overline{\alpha}(\overline{x}) - 1)u \in \mathbb{Z}H(H_1 - 1)$, мы можем записать

$$(\overline{\alpha}(\overline{x}) - 1)u = \sum_{i=1}^I b_i(\overline{x}_i - 1),$$

где $I \in \mathbb{N}$, $0 \neq b_i \in \mathbb{Z}\langle H, H_2 \rangle$, $1 \neq x_i \in A_1$, $x_i \neq x_j$, $i \neq j$. Возникают два случая: $x_0 = 1$, $x_0 \neq 1$. В первом случае $(\overline{\alpha}(\overline{x}) - 1)a\overline{y} = a_1(\overline{x}_1 - 1)$, откуда следует, что $a\overline{y} = a_1 = u$. Во втором случае $(\overline{\alpha}(\overline{x}) - 1)a\overline{y}\overline{x}_0 = a_1(\overline{x}_1 - 1) + a_2(\overline{x}_2 - 1)$, откуда следует, что $a_1 = -a_2$. Мы получаем $(\overline{\alpha}(\overline{x}) - 1)a\overline{y}\overline{x}_0 = a_1(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)$. Не теряя общности, мы можем считать, что $x_2 = x_0$ и $(\overline{\alpha}(\overline{x}) - 1)a\overline{y}\overline{x}_0 = a_1\overline{x}_0(\overline{x} - 1)$. Отсюда получим $a\overline{y}\overline{x}_0 = a_1\overline{x}_0 = u$.

Аналогично доказывается, что $(\overline{\alpha}(\overline{y}) - 1)u = u(\overline{y} - 1)$, $y \in A_2$. Лемма доказана.

5. Доказательство теоремы 1

Мы напомним один результат, доказанный Бахмутом, Форманеком и Мочизуки.

ЛЕММА 6 [1]. Пусть K – произвольная группа, кольцо $\mathbb{Z}K$ без делителей нуля. Допустим, d – обратимый элемент кольца $\mathbb{Z}K$ и $dKd^{-1} = K$. Тогда $d \in \pm K$.

Предыдущие рассуждения показали, что $s_{12} + s_{21} \in \Delta_H$. Следовательно, по лемме 6 $u = 1 - s_{12} - s_{21} \in H$. Таким образом, $u - 1 = -s_{12} - s_{21}$, $-s_{21} \in \mathbb{Z}H(H_1 - 1)$, $-s_{12} \in \mathbb{Z}H(H_2 - 1)$. Следовательно, существует $v \in G$ такое, что $\overline{D}_1(v) = -s_{21}$, $\overline{D}_2(v) = -s_{12}$, $\overline{v} = u$.

Покажем, что $\alpha(x) = vxv^{-1}$ для каждого $x \in G$. Достаточно показать это для всех $x \in G_1$ и $x \in G_2$.

Пусть $x \in G_1$. Тогда

$$\begin{aligned}\overline{D}_2(vxv^{-1}) &= \overline{v}\overline{D}_2(xv^{-1}) + \overline{D}_2(v) = \overline{v}\overline{x}\overline{D}_2(v^{-1}) + \overline{v}\overline{D}_2(x) + \overline{D}_2(v) \\ &= -\overline{v}\overline{x}\overline{v}^{-1}\overline{D}_2(v) + \overline{D}_2(v) = (u\overline{x}u^{-1} - 1)s_{12} = (\overline{\alpha}(\overline{x}) - 1)s_{12} = \overline{D}_2(\alpha(x)).\end{aligned}$$

Также

$$\overline{D}_1(vxv^{-1}) = \overline{v}\overline{x}\overline{v}^{-1} - 1 - \overline{D}_2(vxv^{-1}) = (\overline{\alpha}(\overline{x}) - 1)(1 - s_{12}) = (\overline{\alpha}(\overline{x}) - 1)s_{11} = \overline{D}_1(\alpha(x)).$$

Следовательно, $\alpha(x) = vxv^{-1}$. Аналогичные рассуждения можно провести для $x \in G_2$. Этим завершается доказательство теоремы 1.

Автор благодарен Шмелькину А. Л. за руководство и внимательное отношение к данной работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bachmuth S., Formanek E., Mochizuki H. Y. IA-automorphisms of certain two-generator torsion-free groups // J. Algebra. 1976. V. 40. P. 19–30.
- [2] Ушаков П. В. Об автоморфизмах произведений абелевых групп. Деп. ВИНТИ РАН 23.12.99 № 3802-B99. М.: ВИНТИ, 1999.
- [3] Шмелькин А. Л. О свободных произведениях групп // Матем. сб. 1969. Т. 79(121). № 4(8). С. 616–620.
- [4] Шмелькин А. Л. О некоторых факторгруппах свободного произведения // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1979. № 5. С. 209–216.

Академия гражданской защиты МЧС России, г. Москва
E-mail: pvushakov@mtu-net.ru

Поступило
07.02.2000