Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Храбров, Обобщенные объемные отношения и расстояние Банаха–Мазура, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 6, 918–926

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm803>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 15:08:40

УДК 513.881

ОБОБЩЕННЫЕ ОБЪЕМНЫЕ ОТНОШЕНИЯ И РАССТОЯНИЕ БАНАХА–МАЗУРА

А. И. Храбров

В статье изучаются классическое и модифицированное расстояния Банаха–Мазура, устанавливается связь между модифицированным расстоянием и объемными отношениями, вычисляются объемные отношения для пространств ℓ_n^p и их сумм, а также приводятся некоторые оценки объемных отношений для произвольных конечномерных пространств.

Библиография: 22 названия.

1. Введение. Для n -мерных нормированных пространств X и Y определим объемное отношение

$$\text{Vr}(X, Y) = \left(\inf \left\{ \frac{\text{vol } B_X}{\text{vol } UB_Y} : UB_Y \subset B_X \right\} \right)^{1/n},$$

где B_X и B_Y – единичные шары в пространствах X и Y . При $Y = \ell_n^2$ объемное отношение $\text{Vr}(X, \ell_n^2)$ совпадает с классическим объемным отношением $\text{vr}(X)$. Очевидно, что всегда $\text{Vr}(X, Y) \geq 1$ и $\text{Vr}(X, Y) \cdot \text{Vr}(Y, Z) \geq \text{Vr}(X, Z)$.

Величина $(\text{Vr}(X, Y))^n$ рассматривалась Макбетом в работе [1] (см. также [2]) для множества выпуклых n -мерных тел. Там же доказана компактность этого множества в метрике $\ln \text{Vr}(X, Y) + \ln \text{Vr}(Y, X)$.

Кубическое объемное отношение $\text{Vr}(\ell_n^\infty, X)$ изучалось Боллом в работе [3] для оценок объемов сечений куба. Гордон, Мейер и Пажор в работе [4] получили нижние оценки для проекционных констант через объемные отношения. Гордон и Юнг в работе [5] изучали объемные отношения в случае, когда пространство X конечномерно, а $Y = \ell^p$.

Обозначим через $d(X, Y)$ расстояние Банаха–Мазура между n -мерными пространствами X и Y , а через $\partial(X, Y)$ величину

$$\inf \{ \|T\|_{X \rightarrow Y} : |\det T| = 1 \} \cdot \inf \{ \|T\|_{Y \rightarrow X} : |\det T| = 1 \}.$$

Ясно, что $d(X, Y) \geq \partial(X, Y)$ для всех X и Y . Расстояние $\partial(X, Y)$ неявно использовалось Гурарием, Кадепом и Мацаевым в работе [6] для вывода оценок расстояния Банаха–Мазура между пространствами ℓ_n^p и Глускиным в работе [7], где доказано существование n -мерных пространств X_0 и Y_0 , для которых $\partial(X_0, Y_0) \geq cn$. В работе [8] изучается связь между расстояниями $d(X, Y)$ и $\partial(X, Y)$, а также вычисляются расстояние $\partial(X, Y)$ между пространствами ℓ_n^p и их суммами.

В настоящей работе устанавливается связь между величинами $\partial(X, Y)$ и $\text{Vr}(X, Y)$, вычисляются объемные отношения для пространств ℓ_n^p и их сумм, устанавливается $\sup \partial(X, \ell_n^p)$, а также приводятся некоторые оценки для $\sup \text{Vr}(X, Y)$.

Суммы пространств $X \oplus Y$ мы понимаем в смысле ℓ^2 , рассмотрение других сумм приведет к изменению некоторых констант. Запись $f \succ g$ или $g \prec f$ означает, что существует константа $c > 0$, для которой при всех допустимых x выполнено неравенство $f(x) \geq cg(x)$. Если $f \prec g$ и $f \succ g$, то мы пишем $f \asymp g$.

2. Связь между объемными отношениями и расстоянием $\partial(X, Y)$.

ЛЕММА 1. Пусть X и Y – n -мерные банаховы пространства. Тогда

$$\text{Vr}(X, Y) = \inf\{\|T\|_{Y \rightarrow X} : |\det T| = 1\} \cdot \left(\frac{\text{vol } B_X}{\text{vol } B_Y} \right)^{1/n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверить, что

$$\begin{aligned} \inf\{\|T\|_{Y \rightarrow X} : |\det T| = 1\} &= \inf\left\{ \frac{1}{|\det U|^{1/n}} : \|U\|_{Y \rightarrow X} \leq 1 \right\} \\ &= \left(\inf\left\{ \frac{\text{vol } B_Y}{\text{vol } U B_Y} : U B_Y \subset B_X \right\} \right)^{1/n}. \end{aligned}$$

Непосредственно из леммы следует

ТЕОРЕМА 1. Имеет место соотношение $\partial(X, Y) = \text{Vr}(X, Y) \cdot \text{Vr}(Y, X)$.

СЛЕДСТВИЕ. Имеет место неравенство $\text{Vr}(X, Z) \leq \partial(X, Y) \cdot \text{Vr}(Y, Z)$.

ТЕОРЕМА 2. Имеет место соотношение $\text{Vr}(X, Y) \asymp \text{Vr}(Y^*, X^*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенств Сантало (см. [9] или [10, гл. 7]) и Бургейна–Мильмана (см. [11]) следует, что

$$\left(\frac{\text{vol } B_Y \cdot \text{vol } B_{Y^*}}{\text{vol } B_X \cdot \text{vol } B_{X^*}} \right)^{1/n} \asymp 1.$$

Далее, по лемме 1 имеем

$$\begin{aligned} \text{Vr}(X, Y) &= \left(\frac{\text{vol } B_X}{\text{vol } B_Y} \right)^{1/n} \cdot \inf\{\|T\|_{Y \rightarrow X} : |\det T| = 1\} \\ &\asymp \left(\frac{\text{vol } B_X}{\text{vol } B_Y} \right)^{1/n} \cdot \inf\{\|T^*\|_{X^* \rightarrow Y^*} : |\det T^*| = 1\} \cdot \left(\frac{\text{vol } B_Y \cdot \text{vol } B_{Y^*}}{\text{vol } B_X \cdot \text{vol } B_{X^*}} \right)^{1/n} \\ &= \left(\frac{\text{vol } B_{Y^*}}{\text{vol } B_{X^*}} \right)^{1/n} \cdot \inf\{\|T\|_{X^* \rightarrow Y^*} : |\det T| = 1\} = \text{Vr}(Y^*, X^*). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ. Имеют место следующие соотношения:

- 1) $\partial(X, Y) \asymp \text{Vr}(X, Y) \cdot \text{Vr}(X^*, Y^*)$;
- 2) $\partial(X \oplus X^*, Y \oplus Y^*) \asymp (\text{Vr}(X \oplus X^*, Y \oplus Y^*))^2$;
- 3) $\partial(X, \ell_n^2) \asymp \text{vr } X \cdot \text{vr } X^*$.

3. Вычисление объемных отношений для пространств ℓ_n^p и их сумм. Объемы единичных шаров в ℓ_n^p хорошо известны, (см., например, [12, гл. XVIII]):

$$\text{vol } B_{\ell_n^p} = 2^n \cdot \frac{(\Gamma(1/p + 1))^n}{\Gamma(n/p + 1)}.$$

Для краткости положим

$$G_n(p, q) = \frac{\Gamma(1/p + 1)}{\Gamma(1/q + 1)} \cdot \left(\frac{\Gamma(n/q + 1)}{\Gamma(n/p + 1)} \right)^{1/n} \asymp n^{1/q-1/p}.$$

Отметим, что $G_n(q, p) = (G_n(p, q))^{-1}$.

В работе [8] доказана

ЛЕММА 2. Пусть $1 \leq p, q \leq \infty$, $T: \ell_n^p \rightarrow \ell_n^q$ и $|\det T| = 1$. Тогда

- 1) $\|T\|_{\ell_n^p \rightarrow \ell_n^q} \geq n^{(1/q-1/p)+}$ при $(p-2)(q-2) \geq 0$;
- 2) $\|T\|_{\ell_n^p \rightarrow \ell_n^q} \geq n^{\max\{1/q-1/2, 1/2-1/p\}}$ при $(p-2)(q-2) \leq 0$;
- 3) $\|T\|_{\ell_n^p \rightarrow \ell_n^q} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot n^{1/q-1/p}$ при $1 \leq q \leq 2 \leq p$.

ТЕОРЕМА 3. Имеют место следующие соотношения:

- 1) $\text{Vr}(\ell_n^p, \ell_n^q) = n^{(1/p-1/q)+} \cdot G_n(p, q)$ при $(p-2)(q-2) \geq 0$;
- 2) $\text{Vr}(\ell_n^p, \ell_n^q) \asymp n^{1/p-1/q} \cdot G_n(p, q)$ при $1 \leq p \leq 2 \leq q$;
- 3) $\text{Vr}(\ell_n^p, \ell_n^q) \asymp n^{\max\{1/p-1/2, 1/2-1/q\}} \cdot G_n(p, q)$, при $1 \leq q \leq 2 \leq p$.

СЛЕДСТВИЕ. Имеют место следующие соотношения:

- 1) если $p \leq q$, то $\text{Vr}(\ell_n^p, \ell_n^q) = O(1)$;
- 2) если $q \leq p$ и $(p-2)(q-2) \geq 0$, то $\text{Vr}(\ell_n^p, \ell_n^q) \asymp n^{1/q-1/p}$;
- 3) если $q \leq p$ и $(p-2)(q-2) \leq 0$, то $\text{Vr}(\ell_n^p, \ell_n^q) \asymp n^{\max\{1/q-1/2, 1/2-1/p\}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нижние оценки следуют из предыдущей леммы и формулы для $\text{vol } B_{\ell_n^p}$. Верхние оценки для случая 1) вытекают из равенства

$$\text{Vr}(\ell_n^p, \ell_n^q) \cdot \text{Vr}(\ell_n^q, \ell_n^p) = \partial(\ell_n^p, \ell_n^q) = n^{|1/p-1/q|}.$$

Разберем случай 2) более подробно. Из оценки (см. [6])

$$d(\ell_n^p, \ell_n^q) \leq (1 + \sqrt{2}) \cdot \max\{n^{1/p-1/2}, n^{1/2-1/q}\}$$

закключаем, что

$$\text{Vr}(\ell_n^p, \ell_n^q) \cdot \text{Vr}(\ell_n^q, \ell_n^p) = \partial(\ell_n^p, \ell_n^q) \leq (1 + \sqrt{2}) \cdot n^{\max\{1/p-1/2, 1/2-1/q\}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \text{Vr}(\ell_n^p, \ell_n^q) &\leq (1 + \sqrt{2}) \cdot \frac{n^{\max\{1/p-1/2, 1/2-1/q\}}}{\text{Vr}(\ell_n^q, \ell_n^p)} \\ &\leq (1 + \sqrt{2}) \cdot n^{\max\{1/p-1/2, 1/2-1/q\}} \cdot n^{-\max\{1/q-1/2, 1/2-1/p\}} \cdot (G_n(q, p))^{-1} \\ &= (1 + \sqrt{2}) \cdot n^{1/p-1/q} \cdot G_n(p, q). \end{aligned}$$

Аналогично выводится и верхняя оценка в случае 3).

При помощи техники из работы [8] доказывается

ЛЕММА 3. Пусть $1 \leq p, q, r, s \leq \infty$ и

$$A = \inf\{\|T\|_{\ell_n^p \oplus \ell_n^q \rightarrow \ell_n^r \oplus \ell_n^s} : |\det T| = 1\}.$$

Тогда существует оператор U с определителем, равным ± 1 , вида

$$\begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_4 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 0 & U_2 \\ U_3 & 0 \end{pmatrix},$$

для которого имеет место неравенство

$$\|U\|_{\ell_n^p \oplus \ell_n^q \rightarrow \ell_n^r \oplus \ell_n^s} \leq 12A.$$

СЛЕДСТВИЕ. Имеет место соотношение

$$\inf\{\|T\|_{\ell_n^p \oplus \ell_n^q \rightarrow \ell_n^r \oplus \ell_n^s} : |\det T| = 1\} \asymp \sqrt{\min\{d_1, d_2\}},$$

где

$$\begin{aligned} d_1 &= \inf\{\|T\|_{\ell_n^p \rightarrow \ell_n^r} : |\det T| = 1\} \cdot \inf\{\|T\|_{\ell_n^q \rightarrow \ell_n^s} : |\det T| = 1\}, \\ d_2 &= \inf\{\|T\|_{\ell_n^p \rightarrow \ell_n^s} : |\det T| = 1\} \cdot \inf\{\|T\|_{\ell_n^q \rightarrow \ell_n^r} : |\det T| = 1\}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 4. Имеет место соотношение

$$\text{Vr}(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^r \oplus \ell_n^s) \asymp (\min\{\text{Vr}(\ell_n^p, \ell_n^r) \cdot \text{Vr}(\ell_n^q, \ell_n^s), \text{Vr}(\ell_n^p, \ell_n^s) \cdot \text{Vr}(\ell_n^q, \ell_n^r)\})^{1/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из леммы 1, следствия леммы 3 и соотношения

$$(\text{vol}(B_{\ell_n^p \oplus \ell_n^q}))^{1/n} \asymp (\text{vol } B_{\ell_n^p} \cdot \text{vol } B_{\ell_n^q})^{1/n}.$$

4. Оценки величины $\sup \text{Vr}(X, Y)$.

ТЕОРЕМА 5. Для любого n -мерного пространства X существуют n -мерные пространства Y и Z такие, что

$$\text{Vr}(X, Y) \geq c \cdot \sqrt{\frac{n}{\ln \ln n}} \quad \text{и} \quad \text{Vr}(Z, X) \geq c \cdot \sqrt{\frac{n}{\ln \ln n}},$$

где c – абсолютная константа.

Конструкция, используемая в доказательстве теоремы 5, принадлежит Глускину, две следующие леммы по сути содержатся в работе [7] (см. также [13, гл. 9]).

Пусть μ_n – вероятностная инвариантная относительно вращений мера на сфере S^{n-1} , $e_1, e_2, \dots, e_n$ – ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$. Положим

$$\mathcal{A}_m = \{\text{abs conv}\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_m\} : f_k \in S^{n-1}, k = 1, \dots, m\}.$$

На множестве $\mathcal{A}_m$ определена мера $\nu = \nu_{m,n}$, индуцированная произведением мер $\mu_n \times \mu_n \times \dots \times \mu_n$, определенным на $S^{n-1} \times S^{n-1} \times \dots \times S^{n-1}$ (в каждом произведении по m сомножителей).

ЛЕММА 4. Пусть B – выпуклое центрально симметричное подмножество $B_{\ell_n^2}$, $|\det T| = 1$. Тогда при $\alpha > 0$ выполнена оценка

$$\nu\{C \in \mathcal{A}_m : \|T\|_{E_C \rightarrow E_B} \leq \alpha\} \leq \alpha^{mn} \cdot \left(\frac{\text{vol } B}{\text{vol } B_{\ell_n^2}} \right)^m.$$

ЛЕММА 5. Пусть $M^B = \{T : |\det T| = 1, \|T\|_{\ell_n^1 \rightarrow E_B} \leq \sqrt{n}\}$, M_ε^B – минимальная ε -сеть множества M^B в метрике пространства $\mathcal{L}(\ell_n^2)$. Тогда

$$\#M_\varepsilon^B \leq \left(\frac{6}{c_1 \varepsilon} \right)^{n^2} \cdot n^{n^2/2} \cdot \left(\frac{\text{vol } B}{\text{vol } B_{\ell_n^2}} \right)^n.$$

ТЕОРЕМА А (Бараньи и Фюреди [14], Глускин [15]). Пусть $B \in \mathcal{A}_m$. Тогда

$$\left(\frac{\text{vol } B}{\text{vol } B_{\ell_n^2}} \right)^{1/n} < \left(\frac{3e \ln(m/n)}{n} \right)^{1/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Предположим, что эллипсоид наименьшего объема, содержащий шар B_X , является евклидовым шаром $B_{\ell_n^2}$, и положим

$$R = \text{Vr}(\ell_n^2, X) = \left(\frac{\text{vol } B_{\ell_n^2}}{\text{vol } B_X} \right)^{1/n}.$$

Докажем, что

$$\nu\left\{C \in \mathcal{A}_m : \text{Vr}(X, E_C) \geq c \cdot \sqrt{\frac{n}{\ln \ln n}}\right\} \rightarrow 1.$$

Действительно, на основе предыдущих лемм при фиксированном T мы имеем оценки $\nu\{C \in \mathcal{A}_m : \|T\|_{E_C \rightarrow X} \leq \beta R\} \leq \beta^{mn}$ и

$$\begin{aligned} \nu\{C \in \mathcal{A}_m : \exists T \in M_n, |\det T| = 1, \|T\|_{E_C \rightarrow X} < \beta R\} \\ \leq \left(\frac{c_2}{\beta} \right)^{n^2} \cdot n^{n^2/2} \cdot R^{-n^2} \beta^{mn} \leq (c_2 \sqrt{n})^{n^2} \cdot \beta^{mn-n^2}. \end{aligned} \quad (*)$$

Далее положим $m = n \ln n$ и возьмем $\beta = 1/2$. Тогда правая часть неравенства (*) будет стремиться к нулю с ростом n . Таким образом, найдется $C \in \mathcal{A}_m$ такое, что для любого T ($|\det T| = 1$) будет справедливо неравенство $\|T\|_{E_C \rightarrow X} \geq \beta R$. Поэтому

$$\begin{aligned} \text{Vr}(X, E_C) &= \inf\{\|T\|_{E_C \rightarrow X} : |\det T| = 1\} \cdot \left(\frac{\text{vol } B_X}{\text{vol } C} \right)^{1/n} \\ &\geq \beta R \cdot \left(\frac{\text{vol } B_X}{\text{vol } B_{\ell_n^2}} \right)^{1/n} \cdot \left(\frac{\text{vol } B_{\ell_n^2}}{\text{vol } C} \right)^{1/n} \\ &= \beta \cdot \left(\frac{\text{vol } B_{\ell_n^2}}{\text{vol } C} \right)^{1/n} \geq \frac{1}{3c_2 e^2} \cdot \sqrt{\frac{n}{\ln \ln n}}. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве мы воспользовались теоремой Бараньи и Фюреди.

Из соотношения $\text{Vr}(Z, X) \asymp \text{Vr}(X^*, Z^*)$ следует вторая часть теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае, когда $X = \ell_n^1$, величина R не меньше $c_3\sqrt{n}$, поэтому оценку из соотношения (*) можно улучшить:

$$\nu\{C \in \mathcal{A}_m : \exists T \in M_n, |\det T| = 1, \|T\|_{E_C \rightarrow \ell_n^1} < \beta\sqrt{n}\} \\ \leq \left(\frac{c_2}{\beta}\right)^{n^2} \cdot c_3^{-mn-n^2} \cdot (2\beta)^{mn}.$$

Положим $m = 2n$ и выберем β так, чтобы правая часть стремилась к нулю с ростом n . Таким образом, найдется $C \in \mathcal{A}_m$ такое, что для любого $T: E_C \rightarrow \ell_n^1$ ($|\det T| = 1$) будет справедливо неравенство $\|T\|_{E_C \rightarrow \ell_n^1} \geq \beta\sqrt{n}$. Поэтому

$$\text{Vr}(\ell_n^1, E_C) = \inf\{\|T\|_{E_C \rightarrow \ell_n^1} : |\det T| = 1\} \cdot \left(\frac{\text{vol } B_{\ell_n^1}}{\text{vol } C}\right)^{1/n} \geq c\beta\sqrt{n}.$$

Перейдя к двойственным пространствам, мы получим оценку $\text{Vr}(E_C^*, \ell_n^\infty) \geq c\beta\sqrt{n}$.

Итак, мы показали, что существуют n -мерные пространства X и Y такие, что $\text{Vr}(\ell_n^1, X) \geq c\sqrt{n}$ и $\text{Vr}(Y, \ell_n^\infty) \geq c\sqrt{n}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из соотношения $\text{Vr}(\ell_n^p, \ell_n^\infty) = O(1)$ следует оценка

$$\sup\{\text{Vr}(X, \ell_n^p) : \dim X = n\} \geq c\sqrt{n}$$

для некоторой абсолютной константы c .

В случае, когда пространство X или Y является пространством ℓ_n^p , можно дать точную по порядку верхнюю оценку для величин $\partial(X, Y)$ и $\text{Vr}(X, Y)$. Оценка $\text{Vr}(X, \ell_n^1)$ другим способом получена в работе Кашина [16].

ТЕОРЕМА 6. Для любого n -мерного пространства X справедлива оценка

$$\text{Vr}(X, \ell_n^1) \cdot \text{Vr}(\ell_n^2, X) \leq \sqrt{e} \cdot \text{Vr}(\ell_n^2, \ell_n^1) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что эллипсоид наименьшего объема, содержащий шар B_X , является евклидовым шаром $B_{\ell_n^2}$. Тогда $B_X \subset B_{\ell_n^2}$. Следовательно,

$$\text{Vr}(\ell_n^2, X) \leq \left(\frac{\text{vol } B_{\ell_n^2}}{\text{vol } B_X}\right)^{1/n}.$$

По лемме Дворецкого–Роджерса (см. [17] или [18]) можно выбрать векторы $x_1, x_2, \dots, x_n$ такие, что $\|x_k\| = 1$ и

$$\|\text{Pr}_{E_{k-1}^\perp} x_k\| \geq \sqrt{\frac{n-k+1}{n}}$$

при $k = 1, 2, \dots, n$ (здесь $E_k = \text{Lin}\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$). Рассмотрим n -мерный октаэдр C , порожденный векторами $x_1, x_2, \dots, x_n$. Ясно, что $C \subset B_X$ и

$$\text{vol } C = \frac{2^n}{n!} \cdot \prod_{k=1}^n \|\text{Pr}_{E_{k-1}^\perp} x_k\| \geq \frac{2^n}{n!} \cdot \prod_{k=1}^n \sqrt{\frac{n-k+1}{n}} = \frac{2^n}{\sqrt{n!} \cdot n^n} \geq e^{-n} \cdot \text{vol } B_{\ell_n^1}.$$

Отсюда

$$\text{Vr}(X, \ell_n^1) \leq \left(\frac{\text{vol } B_X}{\text{vol } C}\right)^{1/n} \leq \sqrt{e} \cdot \left(\frac{\text{vol } B_X}{\text{vol } B_{\ell_n^1}}\right)^{1/n}.$$

Перемножив полученные оценки, придем к неравенству

$$\text{Vr}(\ell_n^2, X) \cdot \text{Vr}(X, \ell_n^1) \leq \sqrt{e} \left(\frac{\text{vol } B_X}{\text{vol } B_{\ell_n^1}}\right)^{1/n} \left(\frac{\text{vol } B_{\ell_n^2}}{\text{vol } B_X}\right)^{1/n} = \sqrt{e} \text{Vr}(\ell_n^2, \ell_n^1).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Двойственный вариант этой теоремы

$$\mathrm{Vr}(\ell_n^\infty, X) \cdot \mathrm{Vr}(X, \ell_n^2) \leq \sqrt{e} \cdot \mathrm{Vr}(\ell_n^\infty, \ell_n^2) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{n} \quad (**)$$

получили разными способами Болл в работе [3], Гордон, Мейер и Пажор в работе [4] и др. Переход на основе теоремы 2 от оценки (**) к оценке из теоремы 6 (или наоборот) приведет к ухудшению константы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Оценка, полученная в предыдущей теореме, точна по порядку. Если мы возьмем в качестве X пространство ℓ_n^2 , то, очевидно, получим

$$\mathrm{Vr}(\ell_n^2, \ell_n^1) \geq \frac{\pi}{\sqrt{2e}} \cdot \sqrt{n}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из соотношения $\mathrm{Vr}(\ell_n^1, \ell_n^p) = O(1)$ следует неравенство $\mathrm{Vr}(X, \ell_n^p) \leq c\sqrt{n}$ для некоторой абсолютной константы c .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Более точная оценка величины $\mathrm{vr} X = \mathrm{Vr}(X, \ell_n^2)$ может быть получена напрямую. По теореме Джона (см. [19]) $\mathcal{E} \subset B_X \subset \sqrt{n}\mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ – эллипсоид наибольшего объема, содержащийся в B_X . Отсюда

$$\mathrm{vr} X = \left(\frac{\mathrm{vol} B_X}{\mathrm{vol} \mathcal{E}} \right)^{1/n} \leq \left(\frac{\mathrm{vol} \sqrt{n}\mathcal{E}}{\mathrm{vol} \mathcal{E}} \right)^{1/n} = \sqrt{n}.$$

Стало быть, $\mathrm{vr} X \leq \sqrt{n}$ для любого n -мерного пространства X .

СЛЕДСТВИЕ. Для любого n -мерного пространства X и любого $p \in [1, \infty]$ справедлива оценка

$$\partial(X, \ell_n^p) \leq \sqrt{en}.$$

В частности, $\mathrm{Vr}(X, \ell_n^p) \leq \sqrt{en}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $1 \leq p \leq 2$. По теореме 6 имеем

$$\begin{aligned} \partial(X, \ell_n^p) &= \mathrm{Vr}(X, \ell_n^p) \cdot \mathrm{Vr}(\ell_n^p, X) \leq \mathrm{Vr}(X, \ell_n^1) \cdot \mathrm{Vr}(\ell_n^1, \ell_n^p) \cdot \mathrm{Vr}(\ell_n^2, X) \cdot \mathrm{Vr}(\ell_n^p, \ell_n^2) \\ &\leq \sqrt{e} \mathrm{Vr}(\ell_n^2, \ell_n^1) \cdot \mathrm{Vr}(\ell_n^1, \ell_n^2) = \sqrt{e} \cdot \partial(\ell_n^2, \ell_n^1) = \sqrt{en}. \end{aligned}$$

Если $p \geq 2$, то нужно воспользоваться оценкой (**) вместо неравенства из теоремы 6.

Таким образом, мы доказали, что при $\dim X = n$ и $1 \leq p \leq \infty$

$$c_4\sqrt{n} \leq \sup \mathrm{Vr}(X, \ell_n^p) \leq \sup \partial(X, \ell_n^p) \leq c_5\sqrt{n}.$$

Используя теоремы 4–6, можно показать, что при $1 \leq p, q \leq \infty$

$$c_6\sqrt{n} \leq \sup \{ \mathrm{Vr}(X, \ell_n^p \oplus \ell_n^q) : \dim X = 2n \} \leq c_7\sqrt{n}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Порядок величины $\sup d(X, \ell_n^p)$ неизвестен даже при $p = 1$. Наилучшие оценки таковы:

$$c_8\sqrt{n} \ln n \leq \sup d(X, \ell_n^p) \leq c_9n^{5/6}.$$

Нижняя оценка получена Шареком в работе [20], верхняя – Гианнопулосом в [21], худшая верхняя оценка $n^{7/8}$ доказана в [20].

5. Некоторые следствия. В работе [8] приводится пример пространства X_0 , удовлетворяющего соотношению $d(X_0, \ell_n^2) \geq \sqrt{n/e \ln n} \cdot \partial(X_0, \ell_n^2)$. Следующая теорема показывает, что любое такое пространство X_0 имеет ортогональные подпространства (или факторпространства), шары которых близки к эллипсоидам.

ТЕОРЕМА 7. *Для любого пространства X размерности $2n$ найдется n -мерное подпространство E такое, что либо*

$$d(E, \ell_n^2) \leq c \cdot \partial(X, \ell_{2n}^2) \quad \text{и} \quad d(E^\perp, \ell_n^2) \leq c \cdot \partial(X, \ell_{2n}^2),$$

либо

$$d(X/E, \ell_n^2) \leq c \cdot \partial(X, \ell_{2n}^2) \quad \text{и} \quad d(X/E^\perp, \ell_n^2) \leq c \cdot \partial(X, \ell_{2n}^2),$$

где $c > 0$ – абсолютная константа. Здесь ортогональность понимается относительно скалярного произведения, задаваемого эллипсоидом максимального объема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основе введенного скалярного произведения будем отождествлять элементы пространств X и X^* . По следствию теоремы 2 имеем

$$\partial(X, \ell_{2n}^2) \asymp \text{vr}(X) \cdot \text{vr}(X^*).$$

Следовательно, справедливо хотя бы одно из двух неравенств:

$$\sqrt{\partial(X, \ell_{2n}^2)} \succ \text{vr}(X) \quad \text{или} \quad \sqrt{\partial(X, \ell_{2n}^2)} \succ \text{vr}(X^*).$$

Разберем сначала первый случай. По теореме Кашина (см. [10, гл. 6]) найдется n -мерное подпространство E такое, что

$$d(X \cap E, \ell_n^2) \leq (4\pi \text{vr}(X))^2 \quad \text{и} \quad d(X \cap E^\perp, \ell_n^2) \leq (4\pi \text{vr}(X))^2.$$

Но правая часть не превосходит некоторой константы, умноженной на $\partial(X, \ell_{2n}^2)$. Если мы имеем оценку величины $\text{vr}(X^*)$, то найдется n -мерное подпространство F , для которого

$$d(F, \ell_n^2) \prec \partial(X, \ell_{2n}^2) \quad \text{и} \quad d(F^\perp, \ell_n^2) \prec \partial(X, \ell_{2n}^2).$$

Далее заметим, что $F = (X/F^\perp)^*$ и $F^\perp = (X/F)^*$. Поэтому мы имеем оценки величин $d((X/F)^*, \ell_n^2)$ и $d((X/F^\perp)^*, \ell_n^2)$ через $\partial(X, \ell_{2n}^2)$. Для завершения доказательства осталось воспользоваться равенством $d(Y, \ell_{2n}^2) = d(Y^*, \ell_{2n}^2)$.

В работе Бургейна и Мильмана [22] (см. также [13, гл. 11]) доказывается оценка

$$d(X \oplus X^*, Y \oplus Y^*) \prec n^{5/6+}.$$

Запись $f(n) \prec n^{p+}$ означает, что при любом $\varepsilon > 0$ существует константа $c = c(\varepsilon)$ такая, что неравенство $f(n) \leq cn^{p+\varepsilon}$ верно при всех $n \in \mathbb{N}$. Отсюда на основании утверждения 2) следствия теоремы 2 заключаем, что

$$\text{Vr}(X \oplus X^*, Y \oplus Y^*) \asymp \sqrt{\partial(X \oplus X^*, Y \oplus Y^*)} \leq \sqrt{d(X \oplus X^*, Y \oplus Y^*)} \prec n^{5/12+}.$$

Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 8. *Для любых n -мерных пространств X и Y*

$$\text{Vr}(X \oplus X^*, Y \oplus Y^*) \prec n^{5/12+}.$$

В заключение приношу благодарность Б.М. Макарову за внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Macbeath A. M. A compactness theorem for affine equivalence-classes of convex regions // *Canad. J. Math.* 1951. V. 3. № 1. P. 54–61.
- [2] Грюнбаум Б. Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел. М.: Наука, 1971.
- [3] Ball K. Volumes of sections of cubes and related problems // *Geometric Aspects of Functional Analysis* (1987–88). Lecture Notes in Math. V. 1376. Berlin–New York: Springer, 1989. P. 251–260.
- [4] Gordon Y., Meyer M., Pajor A. Ratios of volumes and factorization through ℓ_∞ // *Illinois J. Math.* 1996. V. 40. № 1. P. 91–107.
- [5] Gordon Y., Junge M. Volume ratios in L_p -spaces // *Studia Math.* 1999. V. 136. № 2. P. 147–182.
- [6] Гурарий В. И., Кадец М. И., Мацаев В. И. О расстояниях между конечномерными аналогами пространств L^p // *Матем. сб.* 1966. Т. 170 (112). № 4. С. 481–489.
- [7] Глускин Е. Д. Диаметр компакта Минковского примерно равен n // *Функцион. анализ и его прилож.* 1981. Т. 15. № 1. С. 72–73.
- [8] Храбров А. И. Оценки расстояний между суммами пространств ℓ_n^p // *Вестн. СПбГУ.* Сер. 1. 2000. Т. 3. № 15. С. 51–57.
- [9] Santaló L. Un invariante afín para los cuerpos convexos del espacio de n dimensiones // *Portugal Math.* 1949. V. 8. P. 155–161.
- [10] Pisier G. *The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989.
- [11] Bourgain J., Milman V. New volume ratio properties for convex symmetric bodies in $\mathbb{R}^n$ // *Invent. Math.* 1985. V. 88. № 2. P. 319–340.
- [12] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. III. М.: Наука, 1970.
- [13] Tomczak-Jaegermann N. *Banach–Mazur Distances and Finite-Dimensional Operator Ideals.* Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. V. 38. New York: Longman Scientific & Technical, Harlow, 1989.
- [14] Bárány I., Füredi Z. Approximation of the sphere by polytopes having few vertices // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1988. V. 102. № 3. P. 651–659.
- [15] Глускин Е. Д. Экстремальные свойства ортогональных параллелепипедов и их приложения к геометрии банаховых пространств // *Матем. сб.* 1988. Т. 136 (178). № 1 (5). С. 85–96.
- [16] Капин В. С. О параллелепипедах наименьшего объема, содержащих выпуклое тело // *Матем. заметки.* 1989. Т. 45. № 2. С. 134–135.
- [17] Dvoretzky A., Rogers C. A. Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 1950. V. 36. P. 192–197.
- [18] Дэй М. М. *Нормированные линейные пространства.* М.: ИЛ, 1961.
- [19] John F. Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions // *Courant Anniversary Volume.* New York: Interscience, 1948. P. 187–204.
- [20] Szarek S. J. On the geometry of the Banach–Mazur compactum // *Functional Analysis* (Austin, TX, 1987/1989). Lecture Notes in Math. V. 1470. Berlin: Springer, 1991. P. 48–59.
- [21] Giannopoulos A. A. A note on the Banach–Mazur distance to the cube // *Geometric aspects of functional analysis* (Israel, 1992–1994). Oper. Theory Adv. Appl. 1995. V. 77. P. 67–73.
- [22] Bourgain J., Milman V. Distances between normed spaces, their subspaces and quotient spaces // *Integral Equations and Operators Theory.* 1986. V. 9. P. 31–46.