Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Хэкало, Изогюйгенсовы деформации однородных дифференциальных операторов, связанных со специальным конусом ранга 3, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 6, 927–940

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm804>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 13:45:23

УДК 517.944

ИЗОГЮЙГЕНСОВЫ ДЕФОРМАЦИИ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ, СВЯЗАННЫХ СО СПЕЦИАЛЬНЫМ КОНУСОМ РАНГА 3

С. П. Хэкало

Рассматриваются изогюйгенсовы деформации однородных гиперболических операторов Гиндикина, связанных со специальным конусом ранга 3. Деформации производятся при помощи потенциалов Штельмахера–Лагнезе и Калоджеро–Мозера. Используя понятие калибровочной эквивалентности операторов и алгебраический метод сплетающих операторов, мы даем явный вид фундаментальных решений деформированных операторов и достаточные условия выполнения принципа Гюйгенса для них в усиленной или в обычной формах.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. В работе [1] введен класс однородных гиперболических дифференциальных операторов, связанных с произвольным линейно-однородным конусом. В [2] развита теория этих операторов, обобщающая результаты Гординга [3]. В частности, найдены условия, при которых операторы удовлетворяют принципу Гюйгенса в обычной или в усиленной формах: часть пространственно-подобной поверхности, на которой существенно задание начальных данных, имеет коразмерность, равную или большую единицы соответственно. При этом существенно, что степени нетривиальных (в смысле гюйгенсовости) операторов не ниже ранга конуса. Возникает задача изогюйгенсовы деформации указанных операторов [4].

В настоящей заметке решается частная задача этого направления. В пространстве $\mathbb{R}^{3+r+s}$, $r, s \in \mathbb{N}$, рассматриваются деформации операторов Гиндикина, связанных со специальным несамосопряженным конусом ранга 3 [2, пример 8]. Деформации осуществляются при помощи потенциалов Лагнезе–Штельмахера [5] и потенциалов Калоджеро–Мозера [5], [6]. Методом сплетающих операторов [4], [6] со спектральными параметрами находятся их фундаментальные решения в явном виде.

В п. 2 мы приводим необходимые сведения из [1], [2] о дифференциальных операторах, связанных с линейно-однородным конусом ранга 3 и делаем необходимые добавления. В п. 3 мы даем некоторые сведения из [4]–[6] о потенциалах Калоджеро–Мозера и Лагнезе–Штельмахера, а также делаем необходимые добавления. Здесь же указываем изогюйгенсовы деформации операторов Гиндикина при помощи выше названных потенциалов. В п. 4 предлагаются фундаментальные решения деформированных операторов и достаточные условия выполнения принципа Гюйгенса для них в обычной или в усиленной формах.

2. Дифференциальные операторы Гиндикина. Пространство $\mathbb{R}^{3+r+s}$ будем интерпретировать в виде пространства обобщенных симметрических (3×3) -матриц [1], [3]

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & x_{13} \\ 0 & x_{22} & x_{23} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix}, \quad x_{ii} \in \mathbb{R},$$

$$x_{13} = (x_{13}^1, \dots, x_{13}^r) \in \mathbb{R}^r, \quad x_{23} = (x_{23}^1, \dots, x_{23}^s) \in \mathbb{R}^s.$$

При этом отображения

$$\begin{cases} x_{ii} \cdot x_{13} = x_{13} \cdot x_{ii} = x_{ii}x_{13} \in \mathbb{R}^r, \\ x_{ii} \cdot x_{23} = x_{23} \cdot x_{ii} = x_{ii}x_{23} \in \mathbb{R}^s, \\ x_{13} \cdot x_{23} = x_{23} \cdot x_{13} = 0 \end{cases}$$

и скалярные произведения

$$\begin{cases} (x_{13}, x_{13}) = \sum_{i=1}^r (x_{13}^i)^2, \\ (x_{23}, x_{23}) = \sum_{i=1}^s (x_{23}^i)^2 \end{cases}$$

определяют обычное произведение обобщенных матриц.

Линейно-однородный конус V состоит [2] из таких матриц x , для которых

$$\begin{cases} \Delta_1(x) = x_{11}x_{33} - (x_{13}, x_{13}) > 0, \\ \Delta_2(x) = x_{22}x_{33} - (x_{23}, x_{23}) > 0, \\ \Delta_3(x) = x_{33} > 0. \end{cases}$$

Группа преобразований, сохраняющих конус V , содержит подгруппы, изоморфные ортогональным группам преобразований подпространств $\mathbb{R}^r$ и $\mathbb{R}^s$ соответственно. Последние, в свою очередь, содержат в качестве подгрупп группы Вейля, связанные с системами корней в $\mathbb{R}^r$ и $\mathbb{R}^s$ соответственно.

С конусом V связана сложностепенная функция

$$x^\lambda = \left(\frac{\Delta_1(x)}{\Delta_3(x)} \right)^{\lambda_1} \left(\frac{\Delta_2(x)}{\Delta_3(x)} \right)^{\lambda_2} \left(\Delta_3(x) \right)^{\lambda_3}, \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{C}^3.$$

Семейство векторов

$$\begin{cases} p = h_1 q^{(1)} + h_2 q^{(2)} + h_3 q^{(3)}, & h_i = 0, 1, 2, \dots, \\ q^{(1)} = (0; 0; 1), & q^{(2)} = (0; 1; 0), & q^{(3)} = (1; 1; 1) \end{cases}$$

порождает все целые сложно-степенные функции x^p (многочлены).

Пусть далее

$$\partial_{ii} = \frac{\partial}{\partial x_{ii}}, \quad \partial_{13} = \left(\frac{\partial}{\partial x_{13}^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{13}^r} \right), \quad \partial_{23} = \left(\frac{\partial}{\partial x_{23}^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{23}^s} \right)$$

– векторы частных производных.

Базисные дифференциальные операторы [2], [7], связанные с конусом V соотношениями

$$\begin{cases} \mathcal{L}_V^{q(1)} = \partial_{11}, \\ \mathcal{L}_V^{q(2)} = \partial_{22}, \\ \mathcal{L}_V^{q(3)} = \partial_{11} \circ \partial_{22} \circ \partial_{33} - \frac{1}{4} \partial_{22} \circ (\partial_{13}, \partial_{13}) - \frac{1}{4} \partial_{11} \circ (\partial_{23}, \partial_{23}), \end{cases}$$

порождают полугруппу дифференциальных операторов вида

$$\mathcal{L}_V^p = (\mathcal{L}_V^{q(1)})^{h_1} \circ (\mathcal{L}_V^{q(2)})^{h_2} \circ (\mathcal{L}_V^{q(3)})^{h_3}.$$

При этом порядок оператора $\mathcal{L}_V^p$ равен $h_1 + h_2 + 3h_3$.

Заметим, что $\mathcal{L}_V^p = \partial_*^p$, где $*$ означает операцию

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & x_{13} \\ 0 & x_{22} & x_{23} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} x_{33} & \frac{1}{2}x_{23} & \frac{1}{2}x_{13} \\ \frac{1}{2}x_{23} & x_{22} & 0 \\ \frac{1}{2}x_{13} & 0 & x_{11} \end{pmatrix} = x_*,$$

а ∂_* есть матрица частных производных, соответствующая матрице x_* .

Нетрудно проверяется, что

$$\begin{cases} \mathcal{L}_V^{q(1)} x^\lambda = \lambda_1 x^{\lambda - (1,0,0)}, \\ \mathcal{L}_V^{q(2)} x^\lambda = \lambda_2 x^{\lambda - (0,1,0)}, \\ \mathcal{L}_V^{q(3)} x^\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \left(\lambda_3 + \frac{r+s}{2} \right) x^{\lambda - (1,1,1)}. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\mathcal{L}_V^p x^{\lambda+d} = \frac{\Gamma_V(\lambda)}{\Gamma_V(\lambda - p^*)} x^{\lambda+d-p^*},$$

$$d = \left(-\frac{r}{2} - 1, -\frac{s}{2} - 1, -\frac{r+s}{2} - 1 \right), \quad p = (p_1, p_2, p_3), \quad p^* = (p_3, p_2, p_1),$$

где $\Gamma_V(\lambda)$ есть гамма-функция конуса V , которая может быть представлена в следующем виде

$$\Gamma_V(\lambda) = \pi^{(r+s)/2} \Gamma\left(\lambda_1 - \frac{r}{2}\right) \Gamma\left(\lambda_2 - \frac{s}{2}\right) \Gamma(\lambda_3)$$

(здесь Γ – обычная гамма-функция Эйлера).

Рассмотрим семейство целых обобщенных функций

$$\Phi_0^{(\lambda)}(x) = \frac{x_+^{\lambda+d}}{\Gamma_V(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}^3,$$

связанных с конусом V [1]. В области $\operatorname{Re} \lambda_1 > r/2$, $\operatorname{Re} \lambda_2 > s/2$, $\operatorname{Re} \lambda_3 > 0$ обобщенная функция $\Phi_0^{(\lambda)}$ задается формулой

$$(\Phi_0^{(\lambda)}(x), \varphi(x)) = \frac{1}{\Gamma_V(\lambda)} \int_V x^{\lambda+d} \varphi(x) dx$$

и аналитическим продолжением для всех остальных λ (здесь φ – основная, например, бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем).

Далее, нам понадобятся сведения о значениях и носителях обобщенной функции $\Phi_0^{(\lambda)}$, которые даются следующими двумя леммами.

ЛЕММА 1. *Имеет место формула*

$$\Phi_0^{(\lambda_1, \lambda_2, 0)}(x) = \frac{(x_{11})_+^{\lambda_1-1}}{\Gamma(\lambda_1)} \times \frac{(x_{22})_+^{\lambda_2-1}}{\Gamma(\lambda_2)} \times \delta(x_{13}, x_{23}, x_{33}),$$

где $\times$ – знак прямого произведения обобщенных функций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В области регулярности имеем

$$\begin{aligned} (\Phi_0^{(\lambda)}(x), \varphi(x)) &= \frac{1}{\Gamma_V(\lambda)} \int_0^\infty dx_{11} \int_0^\infty dx_{22} \int_0^\infty x_{33}^{\lambda_3-1} dx_{33} \\ &\quad \times \int_{(x_{13}, x_{13}) < x_{11}} [x_{11} - (x_{13}, x_{13})]^{\lambda_1+d_1} dx_{13} \\ &\quad \times \int_{(x_{23}, x_{23}) < x_{22}} [x_{22} - (x_{23}, x_{23})]^{\lambda_2+d_2} \varphi(\tilde{x}) dx_{23}, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & \sqrt{x_{33}}x_{13} \\ 0 & x_{22} & \sqrt{x_{33}}x_{23} \\ \sqrt{x_{33}}x_{13} & \sqrt{x_{33}}x_{23} & x_{33} \end{pmatrix}.$$

При этом функция

$$\int_{(x_{13}, x_{13}) < x_{11}} [x_{11} - (x_{13}, x_{13})]^{\lambda_1+d_1} dx_{13} \int_{(x_{23}, x_{23}) < x_{22}} [x_{22} - (x_{23}, x_{23})]^{\lambda_2+d_2} \varphi(\tilde{x}) dx_{23}$$

является четной по переменной $\sqrt{x_{33}}$, а следовательно, основной по переменной x_{33} . Тогда

$$\begin{aligned} (\Phi_0^{(\lambda_1, \lambda_2, 0)}(x), \varphi(x)) &= \frac{\pi^{-(r+s)/2}}{\Gamma(\lambda_1 - \frac{r}{2})\Gamma(\lambda_2 - \frac{s}{2})} \int_0^\infty dx_{11} \int_0^\infty \varphi \left(\begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) dx_{22} \\ &\quad \times \int_{(x_{13}, x_{13}) < x_{11}} [x_{11} - (x_{13}, x_{13})]^{\lambda_1+d_1} dx_{13} \\ &\quad \times \int_{(x_{23}, x_{23}) < x_{22}} [x_{22} - (x_{23}, x_{23})]^{\lambda_2+d_2} dx_{23} \\ &= \left(\frac{(x_{11})_+^{\lambda_1-1}}{\Gamma(\lambda_1)} \times \frac{(x_{22})_+^{\lambda_2-1}}{\Gamma(\lambda_2)} \times \delta(x_{13}, x_{23}, x_{33}), \varphi(x) \right). \end{aligned}$$

В [2], [1] показано, что $\Phi_0^{(p^*)}(x)$ является фундаментальным решением оператора $\mathcal{L}_V^p$, т.е.

$$\mathcal{L}_V^p \Phi_0^{(p^*)}(x) = \delta(x)$$

(это также следует из леммы 1).

Таким образом, семейство $\Phi_0^{(\lambda)}(x)$ порождает p^* -ядро Рисса [8] оператора $\mathcal{L}_V^p$, т.е.

$$\begin{cases} \mathcal{L}_V^p \Phi_0^{(\lambda)}(x) = \Phi_0^{(\lambda-p^*)}(x), \\ \Phi_0^{(0,0,0)}(x) = \delta(x), \\ \text{supp } \Phi_0^{(\lambda)}(x) \subseteq \overline{V}, \end{cases}$$

где $\overline{V}$ – замыкание конуса V , а $\text{supp } \Phi$ – носитель обобщенной функции Φ .

В работе [2] решался вопрос об описании носителя распределения $\Phi_0^{(\lambda)}$. При этом на него были найдены ограничения, которые в случае конкретных примеров конусов дали точное описание носителя. В случае специального конуса ранга 3, мы приведем удобную формулировку этого факта, а также дадим непосредственное доказательство.

ЛЕММА 2. Пусть $p = (h_1 + h_3, h_2 + h_3, h_3)$, $h_3 > 0$, тогда

- 1) если s четное, $h_2 + h_3 \leq s/2$, а r нечетное или $h_1 + h_3 > r/2$, то

$$\text{supp } \Phi_0^{(p)}(x) = \{x \mid \Delta_1(x) \geq 0, \Delta_2(x) = 0, \Delta_3(x) \geq 0\}$$

(выполняется обычный принцип Гюйгенса);

- 2) если r четное, $h_1 + h_3 \leq r/2$, а s нечетное или $h_2 + h_3 > s/2$, то

$$\text{supp } \Phi_0^{(p)}(x) = \{x \mid \Delta_1(x) = 0, \Delta_2(x) \geq 0, \Delta_3(x) \geq 0\}$$

(выполняется обычный принцип Гюйгенса);

- 3) если s, r четные и $h_1 + h_3 \leq r/2$, $h_2 + h_3 \leq s/2$, то

$$\text{supp } \Phi_0^{(p)}(x) = \{x \mid \Delta_1(x) = \Delta_2(x) = 0, \Delta_3(x) \geq 0\}$$

(выполняется усиленный принцип Гюйгенса);

- 4) в оставшихся случаях

$$\text{supp } \Phi_0^{(p)}(x) = \overline{V}$$

(принцип Гюйгенса не выполняется).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В области регулярности $\operatorname{Re} \lambda_1 > r/2$, $\operatorname{Re} \lambda_2 > s/2$, $\operatorname{Re} \lambda_3 > 0$ имеем

$$\begin{aligned} (\Phi_0^{(\lambda)}(x), \varphi(x)) &= \frac{1}{\Gamma_V(\lambda)} \int_0^\infty x_{11}^{\lambda_1-1} dx_{11} \int_0^\infty x_{22}^{\lambda_2-1} dx_{22} \int_0^\infty x_{33}^{\lambda_3-1} dx_{33} \\ &\quad \times \int_{(x_{13}, x_{13}) < 1} [1 - (x_{13}, x_{13})]^{\lambda_1+d_1} dx_{13} \\ &\quad \times \int_{(x_{23}, x_{23}) < 1} [1 - (x_{23}, x_{23})]^{\lambda_2+d_2} \varphi(\tilde{x}) dx_{23}, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & x_{13}\sqrt{x_{11}x_{33}} \\ 0 & x_{22} & x_{23}\sqrt{x_{22}x_{33}} \\ x_{13}\sqrt{x_{11}x_{33}} & x_{23}\sqrt{x_{22}x_{33}} & x_{33} \end{pmatrix}.$$

В последних двух интегралах перейдем к полярным координатам

$$x_{13} = \rho_1 \omega_1, \quad \rho_1 \geq 0, \quad \omega_1 \in S^{r-1}, \quad x_{23} = \rho_2 \omega_2, \quad \rho_2 \geq 0, \quad \omega_2 \in S^{s-1}$$

(S^{k-1} – стандартная сфера единичного радиуса в $\mathbb{R}^k$). Тогда

$$\begin{aligned} (\Phi_0^{(\lambda)}(x), \varphi(x)) &= \frac{1}{\pi^{(r+s)/2}} \int_0^\infty x_{11}^{\lambda_1-1} dx_{11} \int_0^\infty x_{22}^{\lambda_2-1} dx_{22} \int_0^\infty \frac{x_{33}^{\lambda_3-1}}{\Gamma(\lambda_3)} dx_{33} \\ &\quad \times \int_{\rho_1^2 < 1} \frac{(1 - \rho_1^2)^{\lambda_1+d_1}}{\Gamma(\lambda_1 + d_1 + 1)} (\rho_1^2)^{(r-2)/2} d(\rho_1^2) \\ &\quad \times \int_{\rho_2^2 < 1} \frac{(1 - \rho_2^2)^{\lambda_2+d_2}}{\Gamma(\lambda_2 + d_2 + 1)} (\rho_2^2)^{(s-2)/2} \psi(x; \rho) d(\rho_2^2), \end{aligned}$$

где функция

$$\psi(x; \rho) = \int_{S^{r-1} \times S^{s-1}} \varphi \left(\begin{pmatrix} x_{11} & 0 & \sqrt{x_{11}x_{33}}\rho_1\omega_1 \\ 0 & x_{22} & \sqrt{x_{22}x_{33}}\rho_2\omega_2 \\ \sqrt{x_{11}x_{33}}\rho_1\omega_1 & \sqrt{x_{22}x_{33}}\rho_2\omega_2 & x_{33} \end{pmatrix} \right) d\omega_1 d\omega_2$$

основная по переменным ρ_1^2 и ρ_2^2 . Последние две формулы при $\lambda = p$ завершают доказательство леммы 2.

3. Потенциалы и деформации. Пусть $\mathcal{R} = \{\alpha\}$ и $\mathcal{Q} = \{\beta\}$ – системы корней в подпространствах $\mathbb{R}^r$ и $\mathbb{R}^s$ соответственно. В этих подпространствах определим потенциалы Калоджеро–Мозера [6]

$$\begin{cases} U_m(x_{13}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+} m_\alpha (m_\alpha + 1) \frac{(\alpha, \alpha)}{(\alpha, x_{13})^2}, \\ W_n(x_{23}) = \sum_{\beta \in \mathcal{Q}_+} n_\beta (n_\beta + 1) \frac{(\beta, \beta)}{(\beta, x_{23})^2}, \end{cases}$$

где $\mathcal{R}_+$ и $\mathcal{Q}_+$ – подмножества положительных корней систем $\mathcal{R}$ и $\mathcal{Q}$; $m = \{m_\alpha\}$ и $n = \{n_\beta\}$ – функции корней с неотрицательными целыми значениями, инвариантные

относительно действий групп Вейля систем $\mathcal{R}$ и $\mathcal{Q}$ в подпространствах $\mathbb{R}^r$ и $\mathbb{R}^s$ соответственно; $(\cdot, \cdot)$ – скалярные произведения.

Как и в [6], [5], введем обозначения

$$M = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+} m_\alpha, \quad \pi_m(x_{13}) = \prod_{\alpha \in \mathcal{R}_+} (\alpha, x_{13})^{m_\alpha},$$

$$N = \sum_{\beta \in \mathcal{Q}_+} n_\beta, \quad \pi_n(x_{23}) = \prod_{\beta \in \mathcal{Q}_+} (\beta, x_{23})^{n_\beta}.$$

Для произвольных операторов F , G и H косое присоединенное действие определяется [6], [8] правилами

$$\mathrm{ad}_{F,H} G = F \circ G - G \circ H, \quad \mathrm{ad}_{F,H}^k G = \mathrm{ad}_{F,H}(\mathrm{ad}_{F,H}^{k-1} G), \quad k \in \mathbb{N}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Два дифференциальных оператора $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ называются *M-калибровочно эквивалентными*, если найдется бесконечно дифференцируемая функция G и натуральное число M такое, что выполнено равенство

$$\mathrm{ad}_{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2}^{M+1} G = 0.$$

Из [6] известно, что операторы $(\partial_{13}, \partial_{13}) - U_m(x_{13})$, $(\partial_{23}, \partial_{23}) - W_n(x_{23})$ соответственно M и N -калибровочно эквивалентны операторам $(\partial_{13}, \partial_{13})$ и $(\partial_{23}, \partial_{23})$, т.е.

$$\begin{cases} \mathrm{ad}_{(\partial_{13}, \partial_{13}) - U_m(x_{13}), (\partial_{13}, \partial_{13})}^{M+1} \pi_m(x_{13}) = 0, \\ \mathrm{ad}_{(\partial_{23}, \partial_{23}) - W_n(x_{23}), (\partial_{23}, \partial_{23})}^{N+1} \pi_n(x_{23}) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Далее, для переменной $y \in \mathbb{R}$ рассмотрим многочлены $P_l(y) \equiv P_l(y + \gamma_1; \gamma_2, \dots, \gamma_l)$ Бурчналла–Чаунди [9], [4] степени $l(l+1)/2$, определяемые системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} P'_{l+1} P_{l-1} - P_{l+1} P'_{l-1} = (2l+1) P_l^2, & l = 1, 2, \dots, \\ P_0 := 1, & P_1 := y. \end{cases}$$

(Здесь штрих означает дифференцирование по переменной y , а $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_l) \in \mathbb{R}^l$ – параметр интегрирования.)

Потенциалы Лагнеше–Штельмахера задаются [5], [4] формулой

$$T_l(y, \gamma) = 2\partial_y^2 \log |P_l(y)|.$$

Если $\gamma = 0$, мы имеем потенциалы Штельмахера [4]–[6]

$$T_l(y, 0) = -\frac{l(l+1)}{y^2}.$$

ЛЕММА 3. Пусть $D = \partial_y^2 \circ A + \partial_y \circ B + C$ – квадратичный дифференциальный оператор по переменной y ; A , B и C – перестановочные между собой операторы, не зависящие от y . Тогда операторы $D + T_l(y, \gamma) \circ A$ и D L -калибровочно эквивалентны:

$$\text{ad}_{D+T_l(y,\gamma)\circ A,D}^{L+1} G_l(y) = 0, \quad (2)$$

где

$$G_l(y) = \begin{cases} P_l(y), & \gamma \neq 0, \\ y^l, & \gamma = 0, \end{cases} \quad L = \begin{cases} l(l+1)/2, & \gamma \neq 0, \\ l, & \gamma = 0. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma = 0$, тогда непосредственно проверяется, что

$$\text{ad}_{D+T_l(y,0)\circ A, D+T_{l-1}(y,0)\circ A}^2 y = 0.$$

Далее, для оператора

$$\mathcal{H}_l = \text{ad}_{D+T_l(y,0)\circ A, D+T_{l-1}(y,0)\circ A} y$$

и $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$(\partial_t - D - T_l(y, 0) \circ A) \circ (y + t \circ \mathcal{H}_l) = (y + t \circ \mathcal{H}_l) \circ (\partial_t - D - T_{l-1}(y, 0) \circ A).$$

Тогда оператор

$$\mathcal{H}_l(t) = \prod_{i=0}^{l-1} (y + t \circ \mathcal{H}_{l-i})$$

является многочленом степени l по переменной t со свободным членом y^l и удовлетворяет равенству

$$(\partial_t - D - T_l(y, 0) \circ A) \circ \mathcal{H}_l(t) = \mathcal{H}_l(t) \circ (\partial_t - D).$$

Последнее, в свою очередь, влечет равенство

$$\text{ad}_{D+T_l(y,0)\circ A,D}^{l+1} y^l = 0.$$

Пусть теперь $\gamma \neq 0$. Легко проверяется, что

$$V_l \circ (D + T_{l-1}(y, \gamma) \circ A) = (D + T_l(y, \gamma) \circ A) \circ V_l,$$

где

$$V_l = \left(\partial_y - \partial_y \ln \left| \frac{P_l(y)}{P_{l-1}(y)} \right| \right) \circ A + \frac{1}{2} B, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Далее, для оператора $F = \partial_y \circ A + B/2$ введем формальный оператор F^{-1} ($F^{-1} \circ F = F \circ F^{-1} = 1$), как это сделано в работах [4], [10], со свойством

$$F^{-1} \circ y^k = \sum_{i=0}^k (-1)^i (\partial_y^i y^k) \circ A^i \circ F^{-i-1}.$$

Рассмотрим кольцо псевдодифференциальных операторов вида

$$\mathcal{F} = \sum_{-\infty}^k H_i(y, A, B; \partial_t) \circ F^i, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

где H_i – дифференциальный оператор по переменной t . Оператор $\mathcal{F}$ представим в виде суммы

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_- + \mathcal{F}_+, \quad \mathcal{F}_+ = \sum_{i=0}^k H_i(y, A, B; \partial_t) \circ F^i, \quad \text{Res } \mathcal{F} := H_{-1}(y, A, B; \partial_t).$$

Ясно, что оператор

$$\mathcal{F}_l = V_l \circ V_{l-1} \circ \dots \circ V_1 \circ F^{-l+1} \circ P_l(y - 2F \circ \partial_t) \circ F^{-1}$$

принадлежит указанному кольцу и удовлетворяет равенствам

$$\partial_y \circ \text{Res } \mathcal{F}_l = \text{Res } \mathcal{F}_l \circ \partial_y, \quad (D + T_l(y, \gamma) \circ A - t) \circ \mathcal{F}_l = \mathcal{F}_l \circ (D - t).$$

Последние, в свою очередь, влекут соотношение

$$(D + T_l(y, \gamma) \circ A - t) \circ \mathcal{F}_{l,+} = \mathcal{F}_{l,+} \circ (D - t),$$

где оператор $\mathcal{F}_{l,+}$ есть обычный дифференциальный оператор по переменной t степени $l(l+1)/2$ со свободным членом $P_l(y)$ и коэффициентами, не зависящими от t . Таким образом,

$$\text{ad}_{D+T_l(y,\gamma)\circ A,D}^{l(l+1)/2+1} P_l(y) = 0.$$

Лемма доказана.

Следуя работе [11], рассмотрим следующие деформации операторов $\mathcal{L}_V^p$ Гиндикина. Для $p^* = (h_1 + h_3, h_2 + h_3, h_3)$ рассмотрим

$$\mathcal{L}_1^p \equiv \mathcal{L}_{m,n}^p := (\mathcal{L}_V^{q(1)})^{h_1} \circ (\mathcal{L}_V^{q(2)})^{h_2} \circ \left(\mathcal{L}_V^{q(3)} + \frac{1}{4} U_m(x_{13}) \circ \partial_{22} + \frac{1}{4} W_n(x_{23}) \circ \partial_{11} \right)^{h_3}.$$

Для $p^* = (h_3, h_3, h_3)$ рассмотрим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2^p \equiv \mathcal{L}_{k,l;m,n}^p := & \left(\mathcal{L}_V^{q(3)} + \frac{1}{4} [T_k(x_{11} + x_{22}, \gamma^{(1)}) - T_l(x_{11} - x_{22}, \gamma^{(2)})] \circ \partial_{33} \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} U_m(x_{13}) \circ \partial_{22} + \frac{1}{4} W_n(x_{23}) \circ \partial_{11} \right)^{h_3}. \end{aligned}$$

Для $p^* = (h_1 + h_3, 2h_3, h_3)$ рассмотрим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3^p \equiv \mathcal{L}_{l;m,n}^p := & (\mathcal{L}_V^{q(1)})^{h_1} \circ \left(\mathcal{L}_V^{q(2)} \circ \mathcal{L}_V^{q(3)} + T_l(x_{22}, \gamma) \circ \left(\partial_{11} \circ \partial_{33} - \frac{1}{4} (\partial_{13}, \partial_{13}) \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} U_m(x_{13}) \circ \partial_{22}^2 + \frac{1}{4} W_n(x_{23}) \circ \partial_{11} \circ \partial_{22} + \frac{1}{4} T_l(x_{22}, \gamma) U_m(x_{13}) \right)^{h_3}. \end{aligned}$$

Для $p^* = (h_1 + 2h_3, h_2 + 2h_3, 2h_3)$ рассмотрим

$$\mathcal{L}_4^p \equiv \mathcal{L}_l^p := (\mathcal{L}_V^{q(1)})^{h_1} \circ (\mathcal{L}_V^{q(2)})^{h_2} \circ (\mathcal{L}_V^{2q(3)} + T_l(x_{33}, \gamma) \circ \partial_{11}^2 \circ \partial_{22}^2)^{h_3}.$$

4. Фундаментальные решения. Пусть $\xi \in \mathbb{R}^{3+r+s}$. Мы будем писать фундаментальное решение, зависящее от параметра ξ , так, чтобы соответствующая дельта-функция была сосредоточена в точке ξ .

1°. Оператор $\mathcal{L}_1^p$. Пусть t_{13} и t_{23} – действительные спектральные параметры, тогда на основании формул (1) имеем

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{L}_V^{q^{(3)}} + \frac{1}{4} U_m(x_{13}) \circ \partial_{22} + \frac{1}{4} W_n(x_{23}) \circ \partial_{11} - t_{13} - t_{23} \right) \circ \mathcal{D}_{13} \circ \mathcal{D}_{23} \\ &= \mathcal{D}_{13} \circ \mathcal{D}_{23} \circ (\mathcal{L}_V^{q^{(3)}} - t_{13} - t_{23}), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{13} = \frac{1}{\pi_m(\xi_{13})} \sum_{i=0}^M \frac{1}{4^i i!} \partial_{22}^i \circ \text{ad}_{(\partial_{13}, \partial_{13}) - U_m(x_{13}), (\partial_{13}, \partial_{13})}^i \pi_m(x_{13}) \circ \frac{\partial^i}{\partial t_{13}^i}, \\ \mathcal{D}_{23} = \frac{1}{\pi_n(\xi_{23})} \sum_{i=0}^N \frac{1}{4^i i!} \partial_{11}^i \circ \text{ad}_{(\partial_{23}, \partial_{23}) - W_n(x_{23}), (\partial_{23}, \partial_{23})}^i \pi_n(x_{23}) \circ \frac{\partial^i}{\partial t_{23}^i}. \end{cases}$$

Далее, рассмотрим многочлен сколь угодно большой степени Q с коэффициентами из p^* -ядра Рисса оператора $\mathcal{L}_V^p$. Имеем

$$\Phi_1^{(p^*)}(x - \xi; t_{13}, t_{23}) = \sum_{i=0}^Q \binom{h_3 + i - 1}{i} \Phi_0^{(p^* + i q^{(3)})}(x - \xi)(t_{13} + t_{23})^i.$$

Используя формулу (3), непосредственно проверяется, что для

$$\Phi_{m,n}^{(p^*)}(x; \xi) = \mathcal{D}_{13} \mathcal{D}_{23} \Phi_1^{(p^*)}(x - \xi; t_{13}, t_{23})|_{t_{13}=t_{23}=0}$$

имеет место равенство

$$\mathcal{L}_1^p \Phi_{m,n}^{(p^*)}(x; \xi) = \delta(x - \xi).$$

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Фундаментальное решение оператора $\mathcal{L}_1^p$, где $p = (h_3, h_2 + h_3, h_1 + h_3)$, $h_1, h_2 \geq 0$, $h_3 > 0$, имеет вид*

$$\begin{aligned} \Phi_{m,n}^{(p^*)}(x; \xi) &= \frac{1}{(h_3 - 1)! \pi_m(\xi_{13}) \pi_n(\xi_{23})} \sum_{a=0}^M \sum_{b=0}^N \frac{(h_3 + a + b - 1)!}{4^{a+b} a! b!} \partial_{11}^b \partial_{22}^a \\ &\quad \times \text{ad}_{(\partial_{13}, \partial_{13}) - U_m(x_{13}), (\partial_{13}, \partial_{13})}^a \pi_m(x_{13}) \\ &\quad \times \text{ad}_{(\partial_{23}, \partial_{23}) - W_n(x_{23}), (\partial_{23}, \partial_{23})}^b \pi_n(x_{23}) \Phi_0^{(p^* + (a+b)q^{(3)})}(x - \xi). \end{aligned}$$

Опираясь на теорему 1 и лемму 2, мы получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Оператор $\mathcal{L}_1^p$ удовлетворяет

I) *принципу Гюйгенса, если*

- 1) s четное, $h_2 + h_3 + M + N \leq s/2$, а r нечетное или для некоторых $a = 0, 1, \dots, M$ и $b = 0, 1, \dots, N$ имеет место неравенство $h_1 + h_3 + a + b > r/2$;
- 2) r четное, $h_1 + h_3 + M + N \leq r/2$, а s нечетное или для некоторых $a = 0, 1, \dots, N$ и $b = 0, 1, \dots, N$ имеет место неравенство $h_2 + h_3 + a + b > s/2$;

II) *усиленному принципу Гюйгенса, если s, r четные и*

$$h_1 + h_3 + M + N \leq \frac{r}{2}, \quad h_2 + h_3 + M + N \leq \frac{s}{2}.$$

2°. Оператор $\mathcal{L}_2^p$. Пусть

$$\begin{cases} A = \frac{1}{4}\partial_{33}, \\ B_1 = -\frac{1}{8}(\partial_{13}, \partial_{13}) + \frac{1}{8}U_m(x_{13}), \\ B_2 = -\frac{1}{8}(\partial_{23}, \partial_{23}) + \frac{1}{8}W_n(x_{23}). \end{cases}$$

Полагая

$$\begin{aligned} C_{i,l} = & (-1)^{i+1}((\partial_{11} - (-1)^i \partial_{22})^2 \circ A + (\partial_{11} - (-1)^i \partial_{22}) \circ (B_1 - (-1)^i B_2) \\ & + T_l(x_{11} - (-1)^i x_{22}, \gamma^{(i)}) \circ A), \end{aligned}$$

получим разложение

$$\mathcal{L}_2^{q(3)} = C_{1,k} + C_{2,l}.$$

Если $t_{11}, t_{22} \in \mathbb{R}$ и

$$\mathcal{D}_{ii,l} = \frac{1}{G_l(\xi_{11} - (-1)^i \xi_{22})} \sum_{j=0}^L \frac{(-1)^j}{j!} \text{ad}_{C_{i,l}, C_{i,0}}^j G_l(x_{11} - (-1)^i x_{22}) \circ \frac{\partial^j}{\partial t_{ii}^j},$$

то, используя формулы (1) и (2), получим

$$\begin{aligned} & (\mathcal{L}_2^{q(3)} - t_{11} - t_{22} - t_{13} - t_{23}) \circ \mathcal{D}_{11,k} \circ \mathcal{D}_{22,l} \circ \mathcal{D}_{13} \circ \mathcal{D}_{23} \\ & = \mathcal{D}_{11,k} \circ \mathcal{D}_{22,l} \circ \mathcal{D}_{13} \circ \mathcal{D}_{23} (\mathcal{L}_V^{q(3)} - t_{11} - t_{22} - t_{13} - t_{23}). \end{aligned}$$

Далее, пусть

$$\Phi_2^{(p^*)}(x - \xi; t_{11}, t_{22}, t_{13}, t_{23}) = \sum_{i=0}^Q \binom{h_3 + i - 1}{i} \Phi_0^{((h_3+i)q^{(3)})}(x - \xi)(t_{11} + t_{22} + t_{13} + t_{23})^i$$

и

$$\Phi_{k,l;m,n}^{(p^*)}(x; \xi) = \mathcal{D}_{11} \mathcal{D}_{22} \mathcal{D}_{13} \mathcal{D}_{23} \Phi_2^{(p^*)}(x - \xi; t_{11}, t_{22}, t_{13}, t_{23})|_{t_{11}=t_{22}=t_{13}=t_{23}=0}.$$

Тогда имеет место равенство

$$\mathcal{L}_2^p \Phi_{k,l;m,n}^{(p^*)}(x; \xi) = \delta(x - \xi)$$

и справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. Фундаментальное решение оператора $\mathcal{L}_2^p$, где $p = (h_3, h_3, h_3)$, $h_3 > 0$, имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_{k,l,m,n}^{(p^*)}(x; \xi) = & \frac{1}{(h_3 - 1)! G_k(\xi_{11} + \xi_{22}) G_l(\xi_{11} - \xi_{22}) \pi_m(\xi_{13}) \pi_n(\xi_{23})} \\ & \times \sum_{a=0}^K \sum_{b=0}^L \sum_{c=0}^M \sum_{d=0}^N (-1)^{a+b} \frac{(h_3 + a + b + c + d - 1)!}{4^{c+d} a! b! c! d!} \text{ad}_{C_{1,k}, C_{1,0}}^a G_k(x_{11} + x_{22}) \\ & \times \text{ad}_{C_{2,l}, C_{2,0}}^b G_l(x_{11} - x_{22}) \partial_{11}^c \partial_{22}^d \text{ad}_{(\partial_{13}, \partial_{13}) - U_m(x_{13}), (\partial_{13}, \partial_{13})}^c \pi_m(x_{13}) \\ & \times \text{ad}_{(\partial_{23}, \partial_{23}) - W_n(x_{23}), (\partial_{23}, \partial_{23})}^d \pi_n(x_{23}) \Phi_0^{((h_3 + a + b + c + d)q^{(3)})}(x - \xi). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Оператор $\mathcal{L}_2^p$ удовлетворяет

I) принципу Гюйгенса, если

- 1) s четное, $h_3 + K + L + M + N \leq s/2$, а r нечетное или для некоторых $a = 0, 1, \dots, K$, $b = 0, 1, \dots, L$, $c = 0, 1, \dots, M$ и $d = 0, 1, \dots, N$ имеет место неравенство $h_3 + a + b + c + d > r/2$;
- 2) r четное, $h_3 + K + L + M + N \leq r/2$, а s нечетное или для некоторых $a = 0, 1, \dots, K$, $b = 0, 1, \dots, L$, $c = 0, 1, \dots, M$ и $d = 0, 1, \dots, N$ имеет место неравенство $h_3 + a + b + c + d > s/2$;

II) усиленному принципу Гюйгенса, если s, r четные и

$$h_3 + K + L + M + N \leq \frac{r}{2}, \quad h_3 + K + L + M + N \leq \frac{s}{2}.$$

3°. Оператор $\mathcal{L}_3^p$. Рассмотрим оператор $\mathcal{L}_3^{(1,2,1)}$. Поскольку

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3^{(1,2,1)} = & \partial_{22}^2 \circ \left(\partial_{11} \circ \partial_{33} - \frac{1}{4}(\partial_{13}, \partial_{13}) + \frac{1}{4}U_m(x_{13}) \right) \\ & + \partial_{22} \circ \left(-\frac{1}{4}\partial_{11} \circ (\partial_{23}, \partial_{23}) + \frac{1}{4}W_n(x_{23}) \circ \partial_{11} \right) \\ & + T_l(x_{22}, \gamma) \circ \left(\partial_{11} \circ \partial_{33} - \frac{1}{4}(\partial_{13}, \partial_{13}) + \frac{1}{4}U_m(x_{13}) \right), \end{aligned}$$

то в силу (2) имеет место сплетающее соотношение

$$(\mathcal{L}_3^{(1,2,1)} - t_{22} - t_{13} - t_{23}) \circ \tilde{\mathcal{D}} \circ \tilde{\mathcal{D}}_{13} \circ \tilde{\mathcal{D}}_{23} = \tilde{\mathcal{D}} \circ \tilde{\mathcal{D}}_{13} \circ \tilde{\mathcal{D}}_{23} \circ (\mathcal{L}_V^{q^{(2)}} \circ \mathcal{L}_V^{q^{(3)}} - t_{22} - t_{13} - t_{23}),$$

где

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}} &= \frac{1}{G_l(\xi_{22})} \sum_{i=0}^L \frac{(-1)^i}{i!} \text{ad}_{\mathcal{L}_3^{(1,2,1)}, \mathcal{L}_{0;m,n}^{(1,2,1)}}^i G_l(x_{22}) \circ \frac{\partial^i}{\partial t_{22}^i}, \\ \tilde{\mathcal{D}}_{13} &= \frac{1}{\pi_m(\xi_{13})} \sum_{i=0}^M \frac{1}{4^i i!} \partial_{22}^{2i} \circ \text{ad}_{(\partial_{13}, \partial_{13}) - U_m(x_{13}), (\partial_{13}, \partial_{13})}^i \pi_m(x_{13}) \circ \frac{\partial^i}{\partial t_{13}^i}, \\ \tilde{\mathcal{D}}_{23} &= \frac{1}{\pi_n(\xi_{23})} \sum_{i=0}^N \frac{1}{4^i i!} \partial_{11}^{2i} \circ \partial_{22}^{2i} \circ \text{ad}_{(\partial_{23}, \partial_{23}) - W_n(x_{23}), (\partial_{23}, \partial_{23})}^i \pi_n(x_{23}) \circ \frac{\partial^i}{\partial t_{23}^i}. \end{aligned} \right.$$

Пусть

$$\Phi_3^{(p^*)}(x - \xi; t_{22}, t_{13}, t_{23}) = \sum_{i=0}^Q \binom{h_3 + i - 1}{i} \Phi_0^{(p^* + i(q^{(2)} + q^{(3)}))}(x - \xi)(t_{22} + t_{13} + t_{23})^i.$$

ТЕОРЕМА 3. Фундаментальное решение оператора $\mathcal{L}_3^p$, где $p = (h_3, 2h_3, h_1 + h_3)$, $h_1 \geq 0$, $h_3 > 0$, имеет вид

$$\Phi_{l;m,n}^{(p^*)}(x; \xi) = \tilde{\mathcal{D}}_{13} \tilde{\mathcal{D}}_{23} \tilde{\Phi}_3^{(p^*)}(x - \xi; t_{22}, t_{13}, t_{23})|_{t_{22}=t_{13}=t_{23}=0}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Оператор $\mathcal{L}_3^p$ удовлетворяет

I) принципу Гюйгенса, если

- 1) s четное, $2h_3 + 2(L + M + N) \leq s/2$, а r нечетное или для некоторых $a = 0, 1, \dots, L$, $b = 0, 1, \dots, M$ и $c = 0, 1, \dots, N$ имеет место неравенство $h_1 + h_3 + a + b + c > r/2$;
- 2) r четное, $h_1 + h_3 + L + M + N \leq r/2$, а s нечетное или для некоторых $a = 0, 1, \dots, L$, $b = 0, 1, \dots, M$ и $c = 0, 1, \dots, N$ имеет место неравенство $2h_3 + 2(a + b + c) > s/2$;

II) усиленному принципу Гюйгенса, если s, r четные и

$$h_1 + h_3 + L + M + N \leq \frac{r}{2}, \quad 2h_3 + 2(L + M + N) \leq \frac{s}{2}.$$

4°. Оператор $\mathcal{L}_4^p$. Пусть

$$\mathcal{D}_{33} = \frac{1}{G_l(\xi_{33})} \sum_{i=0}^L \frac{(-1)^i}{i!} \text{ad}^i_{\mathcal{L}_4^{(2,2,2)}, \mathcal{L}_V^{2q(3)}} G_l(x_{33}) \circ \frac{\partial^i}{\partial t_{33}^i};$$

тогда

$$(\mathcal{L}_4^{(2,2,2)} - t_{33}) \circ \mathcal{D}_{33} = \mathcal{D}_{33} \circ (\mathcal{L}_V^{2q(3)} - t_{33}).$$

Полагая

$$\Phi_4^{(p^*)}(x - \xi; t_{33}) = \sum_{i=0}^Q \binom{h_3 + i - 1}{i} \Phi_0^{(p^* + 2iq(3))}(x - \xi) t_{33}^i,$$

имеем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. Фундаментальное решение оператора $\mathcal{L}_4^p$, где $p = (2h_3, h_2 + 2h_3, h_1 + 2h_3)$, $h_1, h_2 \geq 0$, $h_3 > 0$, имеет вид

$$\Phi_l^{(p^*)}(x; \xi) = \mathcal{D}_{33} \Phi_4^{(p^*)}(x - \xi; t_{33})|_{t_{33}=0}.$$

СЛЕДСТВИЕ 4. Оператор $\mathcal{L}_4^p$ удовлетворяет

I) принципу Гюйгенса, если

- 1) s четное, $h_2 + 2h_3 + 2L \leq s/2$, а r нечетное или для некоторых $a = 0, 1, \dots, L$ имеет место неравенство $h_1 + 2h_3 + 2a > r/2$;
- 2) r четное, $h_1 + 2h_3 + 2L \leq r/2$, а s нечетное или для некоторых $a = 0, 1, \dots, L$ имеет место неравенство $h_2 + 2h_3 + 2a > s/2$;

II) усиленному принципу Гюйгенса, если s, r четные и

$$h_1 + 2h_3 + 2L \leq \frac{r}{2}, \quad h_2 + 2h_3 + 2L \leq \frac{s}{2}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Метод сплетающих операторов с несколькими спектральными параметрами позволяет комбинировать потенциалы Лагнеше–Штельмахера, Калоджеро–Мозера и Береста–Луценко [8], определенные на подпространствах $\mathbb{R}^r$ или $\mathbb{R}^s$, с сохранением гюйгенсовости.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Изогюйгеновы деформации подобного типа могут быть произведены и над однородными дифференциальными операторами, связанными с самосопряженными конусами произвольного ранга большего 2, а также со специальным несамосопряженным конусом ранга 3.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гиндикин С. Г. Анализ в однородных областях // УМН. 1964. Т. 19. № 4. С. 3–92.
- [2] Вайнберг Б. Р., Гиндикин С. Г. Об усиленном принципе Гюйгенса для одного класса дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // Тр. ММО. 1967. Т. 16. С. 151–180.
- [3] Garding L. The solution of Cauchy's problem for two totally hyperbolic differential equations by means of Riesz integrals // Ann. Math. 1947. V. 48. № 4. P. 785–826.
- [4] Berest Y. Hierarchies of Huygens' operators and Hadamard's conjecture // Acta Appl. Math. 1998. V. 53. P. 125–185.
- [5] Берест Ю. Ю., Веселов А. П. Принцип Гюйгенса и интегрируемость // УМН. 1994. Т. 49. № 6. С. 8–78.
- [6] Berest Y., Molchanov Y. Fundamental solution for partial differential equations with reflection group invariance // J. Math. Phys. 1995. V. 36. № 8. P. 4324–4339.
- [7] Гиндикин С. Г. Задача Коши для сильно однородных дифференциальных операторов // Тр. ММО. 1967. Т. 16. С. 181–208.
- [8] Berest Y. Y. Loutsenko I. M. Huygens' principle in Minkowski spaces and soliton solutions of the Korteweg–de Vries equation // Comm. Math. Phys. 1997. V. 190. P. 113–132.
- [9] Burchnall J. L., Chaundy T. W. A set of differential equations, which can be solved by polynomials // Proc. London Math. Soc. 1929–1930. V. 30. P. 401–414.
- [10] Демидов Е. Е. Иерархия Кадомцева–Петрашвили и проблема Шоттки. Специальный курс. М.: МК НМУ, 1995.
- [11] Хэкало С. П. Фундаментальное решение итерированного оператора типа Кэли–Гординга // УМН. 2000. Т. 55. № 3. С. 191–192.