Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Юдин, Многомерные варианты неравенства Пэли,
Матем. заметки, 2001, том 70, выпуск 6, 941–947

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm805>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 16:48:28

УДК 517

МНОГОМЕРНЫЕ ВАРИАНТЫ НЕРАВЕНСТВА ПЭЛИ

В. А. Юдин

Для тригонометрических полиномов двух переменных, имеющих спектр внутри и на границе строго выпуклой области, даются оценки снизу их норм в L . Они выражаются через коэффициенты Фурье, номера которых расположены на границе.

Библиография: 8 названий.

Пусть $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ — n -мерный тор, $xy = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ — скалярное произведение векторов x, y из $\mathbb{R}^n$. Через

$$\|f\|_p = \left\{ \int_{T^n} |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}$$

обозначим функции из $L_p(T^n)$, $p \geq 1$, а через

$$\tilde{f}_\nu = \int_{T^n} f(x) e^{-2\pi i \nu x} dx$$

— коэффициенты Фурье этих функций; $\text{sp } f = \{\nu \in \mathbb{Z}^n : \tilde{f}_\nu \neq 0\}$. Для функций из H_1 ($\text{sp } f = \mathbb{Z}_+$) в одномерном случае известно [1, с. 199] неравенство Пэли

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_{n_k}|^2 \right\}^{1/2} \ll \|f\|_1, \quad (1)$$

где $\{n_k\}_1^\infty$ — лакунарная последовательность натуральных чисел. Под обозначением $A \ll B$ понимается неравенство $A \ll cB$ с константой c , не зависящей от A и от B ; $A \asymp B$ означает, что $A \ll B$ и $B \ll A$.

В работе [2] дано новое доказательство неравенства (1). В настоящей работе содержащийся в [2] метод получения оценок развивается на случай функций многих переменных. Через D обозначим область из $\mathbb{R}^n$ с границей Γ , $\overline{D} = D \cup \Gamma$; положим

$$f_\Gamma(x) = \sum_{\nu \in \Gamma} \hat{f}_\nu e^{2\pi i \nu x}, \quad f(x) = \sum_{\nu \in \overline{D}} \hat{f}_\nu e^{2\pi i \nu x}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-01210.

Основной результат статьи состоит в доказательстве неравенства

$$\|f_\Gamma\|_2 \leq 4\|f\|_1$$

для произвольной строго выпуклой области из $\mathbb{R}^2$. Без ограничения строгой выпуклости неравенство в общем случае неверно. Действительно, пусть на Γ располагается “достаточно длинная арифметическая прогрессия”

$$P = \{a, a \pm \mu, a \pm 2\mu, \dots, a \pm (q-1)\mu\}, \quad a, \mu \in \mathbb{Z}^n, \quad q \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим тригонометрические полиномы

$$f^*(x) = f_\Gamma^*(x) = \frac{1}{q} \left| \sum_{s=0}^{q-1} e^{2\pi i s \mu x} \right|^2 e^{2\pi i a x}.$$

Нетрудно показать, что

$$\|f^*\|_1 = 1, \quad \|f_\Gamma^*\|_2 \asymp q^{1/2}.$$

Следовательно, при $q \rightarrow \infty$

$$\frac{\|f_\Gamma^*\|_2}{\|f^*\|_1} \rightarrow \infty.$$

Последовательности чисел $\{z_k\}_1^\infty$, $z_k \in \mathbb{C}$, $|z_k| \leq 1$, поставим в соответствие последовательность комплексных чисел $\{w_k\}_1^\infty$ по следующему правилу:

$$\begin{aligned} w_1 &= z_1, \quad w_2 = -\frac{\sin \alpha_1}{2} w_1^2 \bar{z}_2 + \cos \alpha_1 w_1 + \frac{\sin \alpha_1}{2} z_2, \quad \dots, \\ w_{k+1} &= -\frac{\sin \alpha_k}{2} w_k^2 \bar{z}_{k+1} + \cos \alpha_k w_k + \frac{\sin \alpha_k}{2} z_{k+1}, \quad \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Для последующих оценок потребуется

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 [3]. Для всех $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$ для членов последовательности (2) выполнена оценка

$$|w_k| \leq 1. \quad (3)$$

Пусть $f(x) \in L(T^n)$, $M = \{\nu^{(k)}\}_1^\infty \subset \text{sp } f \subset \mathbb{Z}^n$. Положим в (2)

$$z_1 = e^{2\pi i \nu^{(1)} x + i\varphi_1}, \quad \dots, \quad z_k = e^{2\pi i \nu^{(k)} x + i\varphi_k}, \quad \dots, \quad \widehat{f}_{\nu_k} = |\widehat{f}_{\nu_k}| e^{i\varphi_k}, \quad (4)$$

где φ_k – аргумент $\widehat{f}_{\nu_k}$. Определим структуру спектров возникающих тригонометрических полиномов $w_k(x)$. Пусть $X_k = \text{sp } w_k$; через

$$A \pm B = \{c : c = a \pm b; a \in A, b \in B\}$$

обозначим сумму (разность) Минковского множеств A, B . Если F, G – тригонометрические полиномы такие, что $\text{sp } F = A$, $\text{sp } G = B$, то из мультипликативных свойств тригонометрической системы функций вытекает, что

$$\text{sp } F^2 \overline{G} = A + A - B.$$

Следовательно, из (2), (4) находим

$$\begin{aligned} X_1 &= \{\emptyset \cup \emptyset \cup \{\nu^{(1)}\}\}, \\ X_2 &= \{[X_1 + X_1 - \{\nu^{(2)}\}] \cup X_1 \cup \{\nu^{(2)}\}\}, \\ &\dots\dots\dots \\ X_{k+1} &= \{[X_k + X_k - \{\nu^{(k+1)}\}] \cup X_k \cup \{\nu^{(k+1)}\}\}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Для всех $k \in \mathbb{N}$, $\nu \in X_k$ существуют число $s \in \mathbb{N}$, $1 \leq s \leq k$, и последовательность $\{k_{ij}\} \subset \mathbb{Z}_+$, $s \leq i \leq j \leq k$, такие, что

$$\nu = \nu^{(s)} + \sum_{s \leq i \leq j \leq k} k_{ij}(\nu^{(i)} - \nu^{(j)}). \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $k = 1, 2$ утверждение очевидно. Допустим его справедливость для k и докажем его для $k + 1$. Согласно (2) множество X_{k+1} есть объединение трех множеств $X_k + X_k - \{\nu^{(k+1)}\}$, X_k и одноэлементного множества $\{\nu^{(k+1)}\}$. Если $\nu = \nu^{(k+1)}$, то утверждение справедливо. Если $\nu \in X_k$, то оно вытекает из предположения индукции. Пусть $\nu \in X_k + X_k - \{\nu^{(k+1)}\}$, т.е. $\nu = u + v - \nu^{(k+1)}$, $u, v \in X_k$. По предположению индукции

$$u = \nu^{(p)} + \sum_{p \leq i \leq j \leq k} k'_{ij}(\nu^{(i)} - \nu^{(j)}), \quad v = \nu^{(q)} + \sum_{q \leq i \leq j \leq k} k''_{ij}(\nu^{(i)} - \nu^{(j)}).$$

Складывая, найдем

$$\begin{aligned} \nu &= \nu^{(p)} + \nu^{(q)} - \nu^{(k+1)} + \sum_{p \leq i \leq j \leq k} k'_{ij}(\nu^{(i)} - \nu^{(j)}) + \sum_{q \leq i \leq j \leq k} k''_{ij}(\nu^{(i)} - \nu^{(j)}) \\ &= \nu^{(r)} + \sum_{r \leq i \leq j \leq k+1} k_{ij}(\nu^{(i)} - \nu^{(j)}), \quad k_{ij} \in \mathbb{Z}_+, \quad r = \min\{p, q\}. \end{aligned}$$

Имеет место

ТЕОРЕМА. Пусть для $f(x) \in L(T^n)$ выполняются условия

- 1) $M \subset \text{sp } f$;
- 2) для всех $k \in \mathbb{N}$ $X_k + X_k - \{\nu^{(k+1)}\} \cap \text{sp } f = \emptyset$.

Тогда

$$\left\{ \sum_{\nu \in M} |\hat{f}_\nu|^2 \right\}^{1/2} \leq 2\|f\|_1. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем произвольное $k \in \mathbb{N}$ и проинтегрируем $\bar{f}(x)$ с весом $w_{k+1}(x)$ на T^n . Имеем

$$I_{k+1} = \int_{T^n} \bar{f}(x) w_{k+1}(x) dx.$$

Из (3) найдем

$$|I_{k+1}| = \left| \int_{T^n} \bar{f}(x) w_{k+1}(x) dx \right| \leq \|f\|_1 \|w_{k+1}\|_\infty \leq \|f\|_1. \quad (7)$$

Из (2) получим

$$\begin{aligned} I_{k+1} = & -\frac{\sin \alpha_k}{2} \int_{T^n} \bar{f}(x) w_k^2(x) \bar{z}_{k+1}(x) dx \\ & + \cos \alpha_k \int_{T^n} \bar{f}(x) w_k(x) dx + \frac{\sin \alpha_k}{2} \int_{T^n} \bar{f}(x) z_{k+1}(x) dx. \end{aligned}$$

По условию 2) теоремы

$$\operatorname{sp} w_k^2 \bar{z}_{k+1} \cap \operatorname{sp} f = \emptyset,$$

следовательно, по равенству Парсеваля первое слагаемое обращается в 0, а

$$\int_{T^n} \bar{f}(x) z_{k+1}(x) dx = |\hat{f}_{\nu_{k+1}}|.$$

В итоге приходим к рекуррентной формуле

$$I_{k+1} = \frac{\sin \alpha_k}{2} |\hat{f}_{\nu_{k+1}}| + \cos \alpha_k I_k. \quad (8)$$

Выберем угол α_k так, чтобы правая часть (8) стала максимальной:

$$\sin \alpha_k = \frac{|\hat{f}_{\nu_{k+1}}|/2}{\sqrt{|\hat{f}_{\nu_{k+1}}|^2/4 + I_k^2}}, \quad \cos \alpha_k = \frac{I_k}{\sqrt{|\hat{f}_{\nu_{k+1}}|^2/4 + I_k^2}}.$$

Из (8) получаем рекуррентное соотношение

$$I_{k+1}^2 = \frac{1}{4} |\hat{f}_{\nu_{k+1}}|^2 + I_k^2,$$

откуда

$$I_{k+1}^2 = \frac{1}{4} (|\hat{f}_{\nu_{k+1}}|^2 + \dots + |\hat{f}_{\nu_2}|^2) + |\hat{f}_{\nu_1}|^2 \geq \frac{1}{4} \sum_{s=1}^{k+1} |\hat{f}_{\nu_s}|^2.$$

Используя неравенство (7), находим

$$\frac{1}{2} \left\{ \sum_{s=1}^{k+1} |\hat{f}_{\nu_s}|^2 \right\}^{1/2} \leq \|f\|_1;$$

устремляя $k \rightarrow \infty$, имеем (6). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $n = 2$ и Γ – граница строго выпуклой области D . Тогда

$$\|f_\Gamma\|_2 \leq 4\|f\|_1. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем к D четыре опорные прямые: две вертикальные и две горизонтальные. Ввиду строгой выпуклости каждая прямая имеет с Γ лишь одну общую точку. Полученные четыре точки разобьют кривую Γ на четыре части $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$. Будем считать, что Γ_1 ограничена точками A и B . Точка A лежит на нижней опорной прямой, а B лежит на правой вертикальной прямой. Заномеруем целые точки из Γ_1 , двигаясь по Γ_1 в направлении от A к B . Их совокупность обозначим через M . Так как Γ_1 – график строго выпуклой вниз функции, то отношения разностей возрастают. Из представления (5) вытекает, что если хотя бы один коэффициент $k_{ij} \neq 0$, то $\nu \notin \overline{D}$. Таким образом,

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad X_k + X_k - \nu^{(k+1)} \cap \overline{D} = \emptyset.$$

Из (6) получим

$$\|f_{\Gamma_1}\|_2^2 \leq 4\|f\|_1^2,$$

аналогично устанавливаем

$$\|f_{\Gamma_i}\|_2^2 \leq 4\|f\|_1^2, \quad i = 2, 3, 4.$$

Складывая, найдем

$$\|f_\Gamma\|_2^2 = \|f_{\Gamma_1}\|_2^2 + \dots + \|f_{\Gamma_4}\|_2^2 \leq 16\|f\|_1^2,$$

откуда следует (9).

Отметим, что в частном случае, когда весь спектр f содержится на строго выпуклой кривой $f = f_\Gamma$, неравенство Кука [4], [5] $\|f\|_4 \ll \|f\|_2$ приводит к более сильной оценке $\|f\|_4 \ll \|f\|_1$.

Оценки, подобные (9), иногда справедливы и в ситуациях, когда лишь часть границы D является строго выпуклой кривой. Рассмотрим один пример. Пусть функции $\varphi(t), \psi(t)$ определены на отрезке $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{Z}$, и $1 + \varphi(t) \leq \psi(t)$, $t \in [a, b]$. Положим

$$\begin{aligned} \overline{D} &= \{\nu \in \mathbb{Z}^2 : a \leq \nu_1 \leq b, \varphi(\nu_1) \leq \nu_2 \leq \psi(\nu_1)\}, \\ \Gamma &= \{\nu \in \mathbb{Z}^2 : a \leq \nu_1 \leq b, \nu_2 = [\varphi(\nu_1)] + 1\}, \end{aligned}$$

где $[x]$ – целая часть x .

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть функция $\varphi(t)$ дважды дифференцируема на (a, b) , причем $\varphi''(t) \geq \lambda > 0$, $t \in (a, b)$. Тогда

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda} + 2} \right)^{1/2} \|f_\Gamma\|_2 \leq \|f\|_1. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все множество Γ разобьем на $q = 1 + [\sqrt{2/\lambda}]$ частей:

$$\Gamma_j = \{a + j + kq, [\psi(a + j + kq)] + 1\}, \quad j = 0, 1, \dots, q-1, \quad k = 0, 1, \dots, \left[\frac{b-a}{q}\right].$$

При каждом j оценим снизу вторые разности:

$$\begin{aligned} I_j &= [\varphi(a + j + (k-1)q)] - 2[\varphi(a + j + kq)] + [\varphi(a + j + (k+1)q)] \\ &\geq \varphi(a + j + (k-1)q) - 2\varphi(a + j + kq) + \varphi(a + j + (k+1)q) - 2. \end{aligned}$$

Так как

$$\varphi(t-h) - 2\varphi(t) + \varphi(t+h) = h^2\varphi''(\bar{t}), \quad \bar{t} \in (-h, h),$$

то

$$I_j \geq q^2\lambda - 2 = \left(1 + \left[\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\right]\right)^2 \lambda - 2 > 0.$$

Таким образом, все целые точки Γ_j располагаются на строго выпуклой кривой. Следовательно, вся последовательность множеств

$$X_k + X_k - \{a + j + (k+1)q, [\varphi(a + j + (k+1)q)] + 1\}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

соответствующая Γ_j , не пересекается с D . Согласно (6) имеем

$$\|f\|_1^2 \geq \frac{1}{4} \|f_{\Gamma_j}\|_2^2, \quad j = 0, 1, \dots, q-1.$$

Складывая, найдем

$$\|f\|_1^2 \geq \frac{1}{4q} \sum_{j=0}^{q-1} \|f_{\Gamma_j}\|_2^2 = \frac{1}{4q} \|f_{\Gamma}\|_2^2 = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda} + \sqrt{2}} \|f_{\Gamma}\|_2^2,$$

откуда следует (10).

Оценка (10) не зависит от вида функции $\psi(t)$, т.е. от формы верхней границы D . В частности, пусть

$$\overline{D}_N = \{\nu \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leq \nu_1 \leq N, \nu_1^2 \leq \nu_2 \leq N^2\}, \quad \Gamma = \{\nu \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leq \nu_1 \leq N, \nu_2 = \nu_1^2\}.$$

Здесь $\varphi(t) = t^2$, $\varphi''(t) = 2 = \lambda$, $\psi(t) = N^2$. Все коэффициенты Фурье тригонометрического полинома $f(x)$ положим равными 1. Из (10) найдем

$$\|f\|_1 = \int_{T^n} \left| \sum_{\nu \in \overline{D}_n} e^{2\pi i \nu x} \right| dx \gg \|f_{\Gamma}\|_2 = \left\{ \sum_{\nu \in \Gamma} 1 \right\}^{1/2} \gg N^{1/2}.$$

Тем самым, получена оценка снизу $N^{1/2}$ для нормы в L_1 ядра Дирихле, соответствующего $\overline{D}_N$. Из анизотропной оценки [6], [7]

$$\|f\|_1 \ll L_1^{1/2} \ln \left(\frac{L_2}{L_1} + 1 \right),$$

где L_1 – толщина $\overline{D}_N$ в направлении оси OX_2 ($L_1 \asymp N$), а L_2 – толщина $\overline{D}_N$ в направлении оси OX_1 ($L_2 \asymp N^2$), находим

$$\|f\|_1 \ll N^{1/2} \ln N.$$

Верхняя и нижняя оценка различаются лишь на логарифмический множитель. Однако использование неравенств (9), (10) для оценки константы Лебега, порожденной кругом, приводит к плохим оценкам снизу. Неравенства (9), (10) “хороши”, когда “достаточно большая” часть спектра f сосредоточена на границе.

В заключение отметим, что в статье использовались соображения из [2], однако возможно применение более ранних результатов [8]. Благодарю С. В. Конягина за полезные рассуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. II. М.: Мир, 1965.
- [2] Smith B. Two trigonometric designs: one-sided Riesz products and Littlewood products. General inequalities 3. // Intern. Ser. of Numer. Math. 1983. V. 64. P. 141–148.
- [3] Юдин В. А. Интегральные нормы тригонометрических полиномов // Матем. заметки. 2001. Т. 70. №2. С. 308–315.
- [4] Cooke R. A Cantor–Lebesgue theorem in two dimensions // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. V. 30. P. 547–550.
- [5] Алимов Ш. А., Ильин В. А., Никишин Е. М. Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений. I // УМН. 1976. V. 31. №6. P. 28–83; II // УМН. 1977. V. 32. №1. P. 107–130.
- [6] Подкорытов А. Н. О константах Лебега двойных рядов Фурье // Вест. ЛГУ. 1977. №7. С. 79–84.
- [7] Юдин А. А., Юдин В. А. Дискретные теоремы вложения и константы Лебега // Матем. заметки. 1977. Т. 22. №3. С. 381–394.
- [8] Fournier J. F. On a theorem of Paley and the Littlewood conjecture // Archiv für Math. 1979. V. 17. P. 199–216.

Московский энергетический институт
E-mail: yudin@vayudin.mcsme.ru

Поступило
23.03.2000
Исправленный вариант
02.04.2001