Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Чешкова, Эволютные поверхности в E^4 , *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 6, 951–953

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm807>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 12:09:13

ЭВОЛЮТНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ В E^4

М. А. Чешкова

Введение. В евклидовом пространстве E^4 рассматриваются две гладкие 2-поверхности $M, \overline{M}$. Поверхность $\overline{M}$ есть эволюта поверхности M , если она является огибающей нормальных 2-плоскостей поверхности M . Тогда касательные 2-плоскости в соответствующих точках $p \in M, f(p) \in \overline{M}$ ортогональны и вектор $\overrightarrow{pf(p)} = \tau(p), \tau(p) \in T_p^\perp M$, – нормальный вектор поверхности M .

ТЕОРЕМА 1. Если для 2-поверхности $M \subset E^4$ существует эволюта $\overline{M}$, то нормальная связность поверхности M локально плоская.

ТЕОРЕМА 2. Если 2-поверхность $\overline{M} \subset E^4$ есть эволюта для некоторой 2-поверхности M , то связность Леви–Чивита поверхности $\overline{M}$ локально плоская.

ТЕОРЕМА 3. Минимальные поверхности не имеют эволют.

ТЕОРЕМА 4. Косинус угла φ между вектором $\eta(p)$ средней нормали поверхности M и вектором $\overrightarrow{pf(p)} = \tau(p)$, соединяющим соответствующие точки поверхности M и ее эволюты $\overline{M}$, равен

$$\cos \varphi = \frac{1}{lH},$$

где $l = |\tau(p)|$, H – средняя кривизна поверхности M в точке $p \in M$.

СЛЕДСТВИЕ. Если орт средней нормали η совпадает с ортом вектора τ , то $l = 1/H$.

1. Основные формулы. Пусть $M, \overline{M}$ – две гладкие 2-поверхности в евклидовом пространстве E^4 , $f: M \rightarrow \overline{M}$ – диффеоморфизм, $F(M)$ – R -алгебра дифференцируемых на M функций, $T_s^q(M)$ – F -модуль дифференцируемых на M тензорных полей типа (q, s) , ∂ – дифференцирование в E^4 .

Формулы Гаусса–Вейнгартена поверхности M имеют вид [1, с. 23]

$$\partial_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y), \quad \partial_X \xi = -A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi, \quad (1)$$

где $X, Y \in T_0^1(M)$, ∇ – связность Леви–Чивита метрики $g(X, Y) = \langle X, Y \rangle$, α – вторая фундаментальная форма поверхности M , $\nabla^\perp$ – нормальная связность, $A_\xi \in T_1^1(M)$ – симметричный оператор, соответствующий полю $\xi \in T^\perp M$. Выполняются уравнения Гаусса–Кодацци:

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= A_{\alpha(Y, Z)}X - A_{\alpha(X, Z)}Y, \\ \langle R^\perp(X, Y)\xi, \nu \rangle &= g([A_\xi, A_\nu]X, Y), \quad X, Y, Z \in TM, \quad \xi, \nu \in T^\perp M, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z$$

– кривизна связности ∇ ,

$$R^\perp(X, Y)\xi = \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi - \nabla_{[X, Y]}^\perp \xi$$

– кривизна нормальной связности $\nabla^\perp$, $X, Y, Z, W \in TM$, $\xi \in T^\perp M$, $[\cdot, \cdot]$ – коммутатор матриц.

Обозначим через r радиус-вектор точки $p \in M$, через $\bar{r}$ – радиус-вектор точки $f(p) \in \overline{M}$. Тогда отображение $f: M \rightarrow \overline{M}$ запишется в виде

$$\bar{r} = r + \tau, \quad \tau \in T^\perp M. \quad (3)$$

Дифференциал отображения f определится из равенства

$$df(X) = df(\partial_X r) = \partial_X \bar{r}, \quad \partial_X r = X \in TM.$$

Дифференцируя (3) и используя (1), получим

$$df(X) = X - A_\tau X + \nabla_X^\perp \tau.$$

Так как касательные плоскости поверхностей $M, \overline{M}$ в соответствующих точках ортогональны, то касательная составляющая $F_X = X - A_\tau X$ вектора $df(X)$ равна нулю. Имеем

$$A_\tau X = X, \quad df(X) = \Omega X, \quad \Omega X = \nabla_X^\perp \tau. \quad (4)$$

Связность $\bar{\nabla}$ Леви–Чивита метрики $\bar{g}(X, Y) = \langle df X, df Y \rangle = \langle \Omega X, \Omega Y \rangle$ имеет вид

$$\bar{\nabla}_X Y = \Omega^{-1} \nabla_X^\perp \Omega Y. \quad (5)$$

Действительно, дифференцируя $\bar{g}(X, Y) = \langle \Omega X, \Omega Y \rangle$ вдоль Z и используя (2), получим

$$Z\bar{g}(X, Y) = Z\langle \Omega X, \Omega Y \rangle = \langle \nabla_Z^\perp \Omega X, \Omega Y \rangle + \langle \Omega X, \nabla_Z^\perp \Omega Y \rangle.$$

Откуда в силу (5)

$$(\bar{\nabla}_Z \bar{g})(X, Y) = Z\bar{g}(X, Y) - \bar{g}(\bar{\nabla}_Z X, Y) - \bar{g}(X, \bar{\nabla}_Z Y) = 0.$$

Так как [2]

$$\bar{T}(X, Y) = \bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X - [X, Y] = 0,$$

то $\bar{\nabla}$ – связность Леви–Чивита метрики $\bar{g}$.

Используя (5), определим тензор $\bar{R}$ кривизны связности $\bar{\nabla}$. Имеем

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Z &= \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_{[X, Y]}Z \\ &= \bar{\nabla}_X \Omega^{-1} \nabla_Y^\perp \Omega Z - \bar{\nabla}_Y \Omega^{-1} \nabla_X^\perp \Omega Z - \Omega^{-1} \nabla_{[X, Y]}^\perp \Omega Z. \end{aligned}$$

Откуда

$$\bar{R}(X, Y)Z = \Omega^{-1} R^\perp(X, Y) \Omega Z. \quad (6)$$

2. Доказательства теорем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Размерность нормального пространства $T_p^\perp M$ равна 2. Пусть $\tau(p), \xi(p) \perp \tau(p)$ – базис $T_p^\perp M$. Так как в силу (4) $A_\tau X = X$, матрица оператора A_τ единичная, то $[A_\tau, A_\xi] = A_\tau A_\xi - A_\xi A_\tau = 0$. Из (2) имеем

$$\begin{aligned}\langle R^\perp(X, Y)\tau, \xi \rangle &= 0, & \langle R^\perp(X, Y)\tau, \tau \rangle &= 0, \\ \langle R^\perp(X, Y)\xi, \xi \rangle &= 0, & \langle R^\perp(X, Y)\xi, \tau \rangle &= 0.\end{aligned}$$

Следовательно, $R^\perp(X, Y)\tau = 0$, $R^\perp(X, Y)\xi = 0$, нормальная связность поверхности M локально плоская.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Из (6) имеем

$$\bar{g}(\bar{R}(X, Y)Z, W) = \langle R^\perp(X, Y)\Omega Z, \Omega W \rangle = 0,$$

т.е. связность $\bar{\nabla}$ локально плоская.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть ξ_1, ξ_2 – орты векторов τ, ξ , $A_i = A_{\xi_i}$, $i = 1, 2$. Тогда из (4) имеем

$$A_1 X = \frac{1}{l} X, \quad \tau = l \xi_1, \quad l = |\tau|.$$

Поле векторов η средней нормали поверхности M примет вид [1, с. 40]

$$\eta = \frac{1}{2}(\text{tr } A_1 \xi_1 + \text{tr } A_2 \xi_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{l} \xi_1 + \text{tr } A_2 \xi_2 \right).$$

Откуда замечаем, что η не может быть нулевым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4 и СЛЕДСТВИЯ. Имеем

$$\cos \varphi = \frac{\langle \xi_1, \eta \rangle}{|\eta|} = \frac{1}{lH},$$

где $H = |\eta|$ – средняя кривизна поверхности M .

В частности, если орт средней нормали η совпадает с ортом вектора τ , то $l = 1/H$.

ПРИМЕР. Поверхность M есть поверхность переноса $r = r_1(s_1) + r_2(s_2)$ в E^4 , линии переноса γ_i , заданные уравнениями $r_i = r_i(s_i)$, $i = 1, 2$, – плоские кривые, расположенные во взаимно ортогональных 2-плоскостях. Поверхность $\bar{M}$ – поверхность переноса, линии переноса $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2$ которой – эволюты кривых γ_1, γ_2 . Если $s_i, k_i, \{t_i, n_i\}$ – длина дуги, кривизна, репер Френе кривой γ_i , $i = 1, 2$, соответственно, то

$$\bar{r} = r_1(s_1) + \frac{1}{k_1(s_1)} n_1 + r_2(s_2) + \frac{1}{k_2(s_2)} n_2.$$

Отсюда

$$T_p^\perp M = \{n_1(p), n_2(p)\}, \quad T_p M = \{t_1(p), t_2(p)\}, \quad T_{f(p)} \bar{M} = \{n_1(p), n_2(p)\} = T_p^\perp M,$$

$$\bar{r} - r = \frac{1}{k_1(s_1)} n_1 + \frac{1}{k_2(s_2)} n_2 \in T_p^\perp M.$$

Таким образом, $\bar{M}$ – эволюта поверхности M .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 2. М.: Наука, 1981.
2. Чешкова М. А. // Сиб. матем. ж. 1995. № 1. С. 228–232.