Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Артамонов, Об устойчивости решений одного уравнения, возникающего в гидромеханике, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 1, 15–24

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm809>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 12:15:37

УДК 517.9

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩЕГО В ГИДРОМЕХАНИКЕ

Н. В. Артамонов

В работе рассматривается вопрос о сильной устойчивости уравнения малых колебаний упругого трубопровода, по которому течет идеальная жидкость. Доказана теорема о существовании и единственности обобщенного решения и найдены достаточные условия сильной устойчивости в случае пульсирующей жидкости.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. Уравнение малых поперечных колебаний шарнирно закрепленного прямолинейного трубопровода, по которому течет идеальная жидкость со скоростью $v(t)$ и при отсутствии внутреннего и внешнего трения, имеет вид [1] (в безразмерных координатах):

$$u_{tt} + 2\beta v(t)u_{tx} + u_{xxxx} + v^2(t)u_{xx} + \beta v'(t)u_x = 0, \quad (1)$$

$$0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0, \quad \beta \geq 0;$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = u_{xx}|_{x=0} = u_{xx}|_{x=1} = 0, \quad (2)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x).$$

Одним из основных является вопрос об устойчивости уравнения (1). В стационарном случае ($v(t) \equiv v_0$) исследование устойчивости сводится к изучению спектральных свойств квадратичного пучка, получающегося при разделении переменных. В работах [2], [3] достаточно полно исследованы пучки более общего вида. Случай стационарного уравнения с учетом трения подробно исследован в [3], [4]: при $v_0 < \pi$ спектр квадратичного пучка лежит в левой полуплоскости (уравнение устойчиво), при $v_0 \geq \pi$ уравнение неустойчиво. Нестационарное уравнение с учетом трения изучалось в [5] методом функций Ляпунова в предположении, что скорость имеет вид $v(t) = v_0 + \varepsilon \cos(\omega t)$. Показано, что при $0 \leq v_0 < \pi$ будет устойчивость при достаточно малых ε и при любых $\omega > 0$, при $v_0 \geq \pi$ устойчивости нет. В данной работе функционально-аналитическими методами изучается устойчивость уравнения (1) в случае, когда скорость имеет вид

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-01079.

$v(t) = v_0 + \varepsilon \tilde{v}(t)$, где ε – мало и $\tilde{v}(t)$ – T -периодическая функция. Так как спектр невозмущенного уравнения лежит на мнимой оси (за исключением конечного числа собственных значений), то использование метода функций Ляпунова является неэффективным. В работе применяется другой подход, основанный на сведении уравнения (1) к линейному гамильтоновому операторно-дифференциальному уравнению в сепарабельном гильбертовом пространстве и применении теории операторов в пространствах с индефинитной метрикой.

2. Существование и единственность решения. Рассмотрим вопрос о существовании и единственности решения уравнения. Введем сепарабельное гильбертово пространство $\mathcal{H} = L_2[0, 1]$ и операторы в $\mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} P_0 : D(P_0) &= \{y \in W_2^4(0, 1) \mid y(0) = y(1) = y''(0) = y''(1) = 0\}, & P_0 y &= \frac{d^4 y}{dx^4}; \\ P_1 : D(P_1) &= \{y \in W_2^2(0, 1) \mid y(0) = y(1) = 0\}, & P_1 y &= \frac{d^2 y}{dx^2}; \\ B : D(B) &= D(P_1), & B y &= \beta \frac{dy}{dx}. \end{aligned}$$

Они обладают следующими свойствами:

- (А) P_0 – самосопряженный положительно определенный оператор, $P_0^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$; через $\mathcal{H}_\theta$ будем обозначать шкалу гильбертовых пространств, построенную по оператору P_0 [6];
- (В) P_1 – замкнутый симметрический оператор, $D(P_1) \supset D(P_0^{\frac{1}{2}})$;
- (С) B – замкнутый кососимметрический оператор, $D(B) \supset D(P_0^{\frac{1}{2}})$.

Уравнение (1) с краевыми условиями (2) можно записать в виде операторно-дифференциального уравнения в $\mathcal{H}$:

$$u'' + 2v(t)Bu' + P_0 u + v^2(t)P_1 u + v'(t)Bu = 0 \quad (3)$$

с начальными условиями

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1. \quad (4)$$

Для дальнейших рассуждений конкретный вид операторов P_0 , P_1 , B не существен, важны лишь свойства (А), (В), (С). Отметим, что по теореме об интерполяции [6] из (В), (С) следует, что $P_1 \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_\theta, \mathcal{H}_{\theta-\frac{1}{2}})$ и $B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_\theta, \mathcal{H}_{\theta-\frac{1}{2}})$, $0 \leq \theta \leq 1/2$. Дадим определения классического и обобщенного решения уравнения (3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $u(t) \in \mathcal{H}_1$, $a \leq t \leq b$, дважды сильно непрерывно дифференцируемая в $\mathcal{H}$, называется *классическим* решением уравнения (3), если $u'(t) \in \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$, $u(t)$ сильно дифференцируема в $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$ и удовлетворяет уравнению (3) на $[a, b]$ в пространстве $\mathcal{H}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $u(t) \in \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$, $a \leq t \leq b$, называется *обобщенным* решением уравнения (3), если

1) $u(t)$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$ в пространстве $\mathcal{H}$, $u'(t)$ слабо непрерывна на $[a, b]$ в $\mathcal{H}$, $u'(t)$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$ в пространстве $\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}}$;

2) при п.в. $t \in [a, b]$ $u(t)$ удовлетворяет уравнению

$$(u' + v(t)Bu)' + P_0u + v^2(t)P_1u + v(t)Bu' = 0$$

в пространстве $\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $a > 0$ и $v(t) \in C^1[0, a]$. Тогда

а) если $u_0 \in \mathcal{H}_1$, $u_1 \in \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$, то существует единственное классическое решение на $[0, a]$ с начальными условиями (4);

б) если $u_0 \in \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$, $u_1 \in \mathcal{H}$, то существует единственное обобщенное решение на $[0, a]$ с начальными условиями (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Существование классического решения было доказано в [5].

б) Определим следующие операторы, заданные в виде матриц:

$$H_0 = \begin{pmatrix} P_0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad F = iH_0^{-\frac{1}{2}}\mathcal{J}H_0^{-\frac{1}{2}},$$

$$G_1(t) = \begin{pmatrix} -v^2(P_0^{-\frac{1}{2}}B)(BP_0^{-\frac{1}{2}}) & v(P_0^{-\frac{1}{2}}B) \\ -vBP_0^{-\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad G_2(t) = \begin{pmatrix} v^2P_0^{-\frac{1}{2}}P_1P_0^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

H_0 – самосопряженный, положительно определенный оператор в $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ с областью определения $D(H_0) = \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}$; $\mathcal{J}, F, G_1(t)$ и $G_2(t)$ – ограниченные операторы в $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, причем $G_1^*(t) = G_1(t)$, $G_2^*(t) = G_2(t)$, $F^* = F$, $\mathcal{J}^* = -\mathcal{J}$. Перейдем от уравнения 2-го порядка к уравнению первого порядка в пространстве $X = \mathcal{H} \times \mathcal{H}_{-\frac{1}{2}}$. Пусть $u(t)$ – обобщенное решение. Положим

$$w_1(t) = u(t), \quad w_2(t) = u'(t) + v(t)Bu(t). \quad (5)$$

Тогда $w(t) = (w_1(t), w_2(t)) \in \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \times \mathcal{H}$ удовлетворяет в пространстве X уравнению

$$w' = \mathcal{J}^{-1}H_0^{\frac{1}{2}}(I + G_1(t) + G_2(t))H_0^{\frac{1}{2}}w. \quad (6)$$

Обозначим $A(t) \equiv \mathcal{J}^{-1}H_0^{\frac{1}{2}}(I + G_1(t) + G_2(t))H_0^{\frac{1}{2}}$, $D(A(t)) = \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \times \mathcal{H}$ и рассмотрим пространство $Y = \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \times \mathcal{H}$. Y является гильбертовым пространством и, следовательно, рефлексивным, оно плотно вложено в X , $\|f\|_X \leq \text{const} \|f\|_Y \quad \forall f \in Y$. Так как $H_0^{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{B}(Y, \mathcal{H} \times \mathcal{H})$ и $\mathcal{J}^{-1}H_0^{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H} \times \mathcal{H}, X)$, то $A(t) \in \mathfrak{B}(Y, X) \quad \forall t \in [0, a]$, $\|A(t)\|_{Y, X} \in C[0, a]$, и отображение $F: X \rightarrow Y$ является изоморфизмом банаховых пространств. Положим

$$S(t) = \begin{pmatrix} -v(t)P_0^{-\frac{1}{2}}B & P_0^{-\frac{1}{2}} \\ P_0^{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{B}(X)$$

ограниченно обратимый оператор, $S(t)Y = Y$. Так как $v(t) \in C^1[0, a]$, то $S(t)$ – оператор-функция ограниченной вариации (относительно нормы $\mathfrak{B}(X)$) и $\|S(t)\| \leq \text{const}$ на $[0, a]$. Имеем

$$S(t)\mathcal{J}^{-1}H_0^{\frac{1}{2}}(I + G_1(t))H_0^{\frac{1}{2}}S^{-1}(t) = A_1(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 & I \\ -P_0 & -2v(t)P_0^{\frac{1}{2}}BP_0^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Так как $iA_1(t)$ – самосопряженный оператор в X , для любого $n \in \mathbb{N}$ и для произвольных n точек $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq a$ верно неравенство

$$\left\| \prod_{j=1}^n (A_1(t_j) - \lambda I)^{-1} \right\|_X \leq \lambda^{-n} \quad \forall \lambda > 0.$$

Отметим, что $\mathcal{J}^{-1}H_0^{\frac{1}{2}}G_2(t)H_0^{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{B}(X)$. Применяя предложения 3.5 и 4.4 из работы [7], получаем, что существуют числа $M, C > 0$ такие, что $\forall n \in \mathbb{N}$ и произвольных n точек $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq a$ справедлива оценка

$$\left\| \prod_{j=1}^n (A(t_j) - \lambda I)^{-1} \right\|_X \leq M(\lambda - C)^{-n} \quad \forall \lambda > C.$$

Аналогично показывается, что для оператора $F^{-1}A(t)F$ имеет место похожая оценка: существуют числа $M_1, C_1 > 0$ такие, что при $\lambda > C_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq a$

$$\left\| \prod_{j=1}^n (F^{-1}A(t_j)F - \lambda I)^{-1} \right\|_X \leq M_1(\lambda - C_1)^{-n}.$$

Применяя теоремы 4.1 и 5.1 из работы [7], получаем, что существует единственное семейство операторов $U(t, s)$, $0 \leq s \leq t \leq a$, такое, что:

i) $U(t, s)$ – сильно непрерывно на X , $U(s, s) = I$ и

$$\|U(t, s)\|_X \leq M \exp\{C(t - s)\};$$

ii) $U(t, s) = U(t, r)U(r, s)$, $s \leq r \leq t$ (групповое свойство);

iii) $U(t, s)Y \subset Y$, $U(t, s)$ слабо непрерывно по t , s в Y и

$$\|U(t, s)\|_Y \leq M_1 \exp\{C_1(t - s)\};$$

iv) $\forall y_0 \in Y$ при $t \in [s, a]$ функция $U(t, s)y_0$ в X абсолютно непрерывна, сильно дифференцируема, удовлетворяет уравнению (6) и производная слабо непрерывна.

Пусть $u_0 \in \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$, $u_1 \in \mathcal{H}$ – начальные данные (4). Положим $w_0 = (u_0, u_1 + v(0)Bu_0) \in Y$. Тогда существует единственное решение $w(t) = U(t, 0)w_0$ уравнения (6) с начальными данными $w(0) = w_0$. Из свойств i)–iv) получаем, что функция $u(t) \equiv w_1(t)$ удовлетворяет свойствам 1), 2) определения 2. Таким образом, уравнение (3) корректно разрешимо в пространстве $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \times \mathcal{H}$. Отметим также, что из результатов [7] следует, что разрешающий оператор $U(t, s)$ непрерывно зависит от $\max_{[0, a]} \|A(t)\|_{Y, X}$.

Если рассмотреть уравнение (4) с “обратным” временем $\tau = -t$, то для него также будут выполнены условия теорем 4.1 и 5.1 из [7], откуда легко получить, что оператор $U(t) \equiv U(t, 0)$ обратим $\forall t \in [0, a]$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $v(t) \in C^1[0, \infty)$, то решение $u(t)$ (классическое или обобщенное) определено на полуоси $[0, \infty)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Так как $H_0^{-\frac{1}{2}}(I + G(t))H_0^{\frac{1}{2}}$ – симметрический (неограниченный) оператор в пространстве $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, уравнение (6) имеет вид гамильтоновой системы в $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ [8]. Функция $w(t)$, определенная по формулам (5) в пространстве $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, удовлетворяет уравнению

$$(H_0^{-\frac{1}{2}}\mathcal{J}w)' = (I + G_1(t) + G_2(t))H_0^{\frac{1}{2}}w, \quad (7)$$

т.е. является обобщенным решением гамильтоновой системы [8].

Рассмотрим в X оператор $|\mathcal{J}^{-1}H_0|$, $D(|\mathcal{J}^{-1}H_0|) = \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \times \mathcal{H}$, и построим по нему шкалу пространств X_θ , $0 \leq \theta \leq 1$. Легко проверить, что $X_\theta = \mathcal{H}_{\frac{\theta}{2}} \times \mathcal{H}_{\frac{\theta-1}{2}}$ и $X_1 = Y$. Так как $U(t) \in \mathfrak{B}(X_1, X_1)$ и $U(t) \in \mathfrak{B}(X_0, X_0)$, по теореме об интерполяции [6] $U(t) \in \mathfrak{B}(X_\theta, X_\theta)$, $0 \leq \theta \leq 1$. Для любых двух решений $w(t)$, $\tilde{w}(t)$ уравнения (7) выполнено соотношение [8]:

$$(\mathcal{J}w(t), \tilde{w}(t))_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}} = \text{const}.$$

Так как $|\mathcal{J}^{-1}H_0|^{-\theta} \in \mathfrak{B}(X, X_\theta)$ и $|H_0^{-\frac{1}{2}}\mathcal{J}| \in \mathfrak{B}(X, \mathcal{H} \times \mathcal{H})$ – изометрические операторы, то $(S_\theta = |\mathcal{J}^{-1}H_0|^{-\theta}|H_0^{-\frac{1}{2}}\mathcal{J}|^{-1} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H} \times \mathcal{H}, X_\theta))$

$$(S_\theta \mathcal{J}w(t), S_\theta \tilde{w}(t))_\theta = \text{const},$$

где $(\cdot, \cdot)_\theta$ – скалярное произведение в X_θ (норму в X_θ будем обозначать через $\|\cdot\|_\theta$). При $\theta = 1$ получим

$$(\hat{F}w(t), \tilde{w}(t))_1 = \text{const}, \quad \hat{F} = iS_1^2\mathcal{J} \in \mathfrak{B}(X_1), \quad \hat{F}^* = \hat{F},$$

откуда следует (в силу произвольности $w(t)$ и $\tilde{w}(t)$), что $U^*(t)\hat{F}U(t) = \hat{F}$. Так как $U^{-1}(t) \in \mathfrak{B}(X_1)$, оператор $U(t)$ является $\hat{F}$ -унитарным в пространстве X_1 [9] (отметим, что оператор $\hat{F}^{-1}$ может быть неограниченным). При $\theta = 1/2$ получаем

$$(\hat{\mathcal{J}}w(t), \tilde{w}(t))_{\frac{1}{2}} = \text{const}, \quad \hat{\mathcal{J}} = iS_{\frac{1}{2}}^2\mathcal{J} \in \mathfrak{B}(X_{\frac{1}{2}})$$

– ограниченно обратимый оператор и $\hat{\mathcal{J}}^* = -\hat{\mathcal{J}}$. В силу произвольности $w(t)$, $\tilde{w}(t)$ получаем, что $U^*(t)\hat{\mathcal{J}}U(t) = \hat{\mathcal{J}}$. Так как $U^{-1}(t) \in \mathfrak{B}(X_{\frac{1}{2}})$, то оператор $U(t)$ является $\hat{\mathcal{J}}$ -унитарным в пространстве $X_{\frac{1}{2}}$ [9].

3. Исследование устойчивости уравнения (3). Следуя [9], будем говорить, что уравнение (6) *устойчиво*, если все решения ограничены в пространстве $X_{\frac{1}{2}}$, т.е. для любого его решения выполнено неравенство

$$\|w(t)\|_{\frac{1}{2}} \leq C\|w(0)\|_{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

с константой, не зависящей от решения (в [9] условие записывалось в другой форме). Если функция $v(t)$ ограничена на $\mathbb{R}_+$, то это неравенство эквивалентно следующему:

$$\{\|u(t)\|_{\frac{1}{4}, \mathcal{H}}^2 + \|u'(t)\|_{-\frac{1}{4}, \mathcal{H}}^2\} \leq C\{\|u(0)\|_{\frac{1}{4}, \mathcal{H}}^2 + \|u'(0)\|_{-\frac{1}{4}, \mathcal{H}}^2\}, \quad t \in [0, \infty), \quad (9)$$

где $\|\cdot\|_{\theta, \mathcal{H}}$ – норма в пространстве $\mathcal{H}_\theta$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Уравнение (3) называется *устойчивым*, если для любого его обобщенного решения выполнена оценка (9) с константой, не зависящей от решения $u(t)$.

Далее будем рассматривать случай, когда скорость $v(t)$ имеет следующий вид: $v(t) = v_0 + \varepsilon \tilde{v}(t)$, где $\varepsilon \geq 0$ и $\tilde{v}(t) \in C^1[0, \infty) - T$ -периодическая функция.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Уравнение (3) называется *сильно устойчивым*, если существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ уравнение устойчиво.

В силу T -периодичности функции $v(t)$ имеем $U(t) = U(\tau)U^n(T)$, где $t = \tau + nT$, $0 \leq \tau < T$, откуда следует, что неравенство (8) эквивалентно следующему:

$$\|U^n(T)\|_{\frac{1}{2}} \leq \text{const}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10)$$

Следуя [9], будем называть $\hat{\mathcal{J}}$ -унитарный оператор U *устойчивым*, если для него выполнено неравенство (10), и *сильно устойчивым*, если существует $c > 0$ такое, что при выполнении неравенства $\|\tilde{U} - U\|_{\frac{1}{2}} < c$ все $\hat{\mathcal{J}}$ -унитарные операторы устойчивы. Если ввести для семейства $\{A(t)\}$ норму

$$\|A\| = \max_{[0, T]} \|A(t)\|_{Y, X} = \max_{[0, T]} \|I + G_1(t) + G_2(t)\|_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}},$$

то малым изменениям семейства $\{A(t)\}$ в смысле этой нормы отвечают малые изменения $U(T)$ в смысле равномерной операторной нормы. Обозначим через $U_\varepsilon(T)$ оператор $U(T)$ в случае, когда скорость имеет вид $v(t) = v_0 + \varepsilon \tilde{v}(t)$. Так как норма $\{A(t)\}$ непрерывно зависит от ε , то отображение $\varepsilon \rightarrow U_\varepsilon(T)$ непрерывно и получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для того чтобы уравнение (3) было сильно устойчиво, достаточно, чтобы оператор $U_0(T)$ был сильно устойчив.

При $\varepsilon = 0$ уравнение (3) имеет постоянные коэффициенты; пусть $L(\lambda) = \lambda^2 I + 2v_0 \lambda B + P_0 + v_0^2 P_1$ – пучок, получающийся при разделении переменных. Его спектр $\sigma(L)$ дискретен (в силу условия (A)), симметричен относительно мнимой оси и если оператор $P_0 + v_0^2 P_1$ положительно определен, то спектр чисто мнимый и алгебраически простой [2]. В уравнении (6) $A \equiv A(t)$ постоянный оператор, $\sigma_d(A) = \sigma(L)$ и $g_n = (e_n, \lambda_n e_n + B e_n) \in X_1$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_n ($e_n \in \text{Ker } L(\lambda_n)$). Тогда $U(t)g_n = e^{\lambda_n t} g_n$. Если существует собственное значение (с.з.) пучка L , не лежащее на мнимой оси, или присоединенный вектор, то уравнение неустойчиво; поэтому далее считаем, что спектр алгебраически простой и целиком лежит на мнимой оси. Отметим, что если $0 \in \sigma(L)$, то существует присоединенный вектор, отвечающий с.з. 0. Так как векторы $\{(e_n, \lambda_n e_n) \mid \lambda_n \in \sigma(L), e_n \in \text{Ker } L(\lambda_n)\}$ образуют базис Рисса в пространстве $X_1 = \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \times \mathcal{H}$ [2], то собственные векторы $\{g_n\}$ оператора $U(t)$ образуют базис Рисса в пространстве X_1 и, следовательно, в X_1

$$\sigma(U_0(T)) = \overline{\{e^{\lambda T} \mid \lambda \in \sigma(L)\}}.$$

Обозначим $a(x, \lambda) = |\lambda|^2(x, x) + (P_0x + v_0^2P_1x, x)$, $x \in \mathcal{H}_1$, и введем следующие множества:

$$\begin{aligned}\sigma_I &= \overline{\{e^{\lambda T} \mid \lambda \in \sigma(L), i\lambda^{-1}a(x, \lambda) > 0, \quad \forall x \in \text{Ker } L(\lambda)\}}, \\ \sigma_{II} &= \overline{\{e^{\lambda T} \mid \lambda \in \sigma(L), i\lambda^{-1}a(x, \lambda) < 0, \quad \forall x \in \text{Ker } L(\lambda)\}}, \\ \sigma_0 &= \{e^{\lambda T} \mid \lambda \in \sigma(L), \quad \exists x \in \text{Ker } L(\lambda) \quad a(x, \lambda) = 0\}.\end{aligned}$$

Тогда $\sigma(U_0(T)) = \sigma_I \cup \sigma_{II} \cup \overline{\sigma}_0$. Отметим, что если оператор $P_0 + v_0^2P_1$ положительно определен, то $\sigma_0 = \emptyset$ и

$$\sigma_I = \overline{\{e^{\lambda T} \mid \lambda \in \sigma(L), \quad \text{Im } \lambda > 0\}}, \quad \sigma_{II} = \overline{\{e^{\lambda T} \mid \lambda \in \sigma(L), \text{Im } \lambda < 0\}}.$$

Пусть $\sigma \subset \sigma(U_0(T))$ – изолированная часть спектра, P_σ – проектор Рисса, g_n – собственный вектор, отвечающий с.з. $\nu_n = \exp\{\lambda_n T\}$ (с.з. считаем столько раз, какова его кратность). Тогда

$$\mathfrak{L}_\sigma = P_\sigma X = \left\{ \sum_{\nu_n \in \sigma} c_n g_n \mid \{c_n\}_1^\infty \in l_2 \right\}.$$

Так как $\{(e_n, \lambda_n e_n)\}$ – собственные векторы оператора, симметричного относительно индефинитной метрики [2]

$$\begin{aligned}[x, y] &= (P_0x_1 + v_0^2P_1x_1, y_1)\mathcal{H} + (x_2, y_2)\mathcal{H}, \\ x &= (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2),\end{aligned}$$

они ортогональны относительно этой метрики. Отсюда, учитывая что $L(\lambda_n)e_n = 0$, легко получить, что $(\widehat{F}g_n, g_m)_1 = 0$ при $n \neq m$ и $(\widehat{F}f, f)_1 = \sum |c_k|^2 (\widehat{F}g_k, g_k)_1 \quad \forall f \in X_1$, $f = \sum c_k g_k$. Подпространство $\mathfrak{L} \subset X$ назовем *положительным* (*отрицательным*) относительно $\widehat{F}$, если $(\widehat{F}f, f)_1 > 0$ (< 0) $\forall f \in \mathfrak{L}$, $f \neq 0$. Так как $(\widehat{F}g_k, g_k)_1 > 0$ (< 0), если $e^{\lambda_k T} \in \sigma_I$ ($e^{\lambda_k T} \in \sigma_{II}$), то подпространство $\mathfrak{L}_\sigma$ положительно (отрицательно) тогда и только тогда, когда $\sigma \subset \sigma_I$ ($\sigma \subset \sigma_{II}$).

ТЕОРЕМА 2. Пусть спектр пучка $L(\lambda)$ лежит на мнимой оси и присоединенные векторы отсутствуют. Если $\sigma_0 = \emptyset$ и $\sigma_I \cap \sigma_{II} = \emptyset$, то уравнение (3) сильно устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что при выполнении условий теоремы оператор $U_0(T)$ сильно устойчив. Так как $\sigma_0 = \emptyset$, то $\sigma(U_0(T)) = \sigma_I \cup \sigma_{II}$. Обозначим при $\psi < \theta$

$$I(\psi, \theta) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, \psi < \arg z < \theta\}$$

– дуга единичной окружности. Пусть $z_1 \in \sigma_I$. Тогда положим $I_1 \equiv I(\psi_1, \theta_1)$ – наибольшая дуга единичной окружности такая, что $z_1 \in I_1$ и $I_1 \cap \sigma_{II} = \emptyset$ (она существует, так как σ_{II} – замкнуто и $\exp\{i\psi_1\}, \exp\{i\theta_1\} \in \sigma_{II}$). Если $\sigma_I \setminus I_1 \neq \emptyset$, то пусть $z_2 \in \sigma_I \setminus I_1$ и $I_2 \equiv I(\psi_2, \theta_2)$ – наибольшая дуга такая, что $z_2 \in I_2$ и $I_2 \cap \sigma_{II} = \emptyset$ (причем $\exp\{i\psi_2\}, \exp\{i\theta_2\} \in \sigma_{II}$ в силу замкнутости σ_{II} и $I_1 \cap I_2 = \emptyset$). Если $\sigma_I \setminus$

$(I_1 \cup I_2) \neq \emptyset$, то положим $z_3 \in \sigma_I \setminus (I_1 \cup I_2)$ и т.д. Если процесс продолжается неограниченно, то получаем две последовательности $\{z_n\}_1^\infty$ и $\{\exp(i\psi_n)\}_1^\infty$ такие, что $|z_n - e^{i\psi_n}| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$. Так как $\{z_n\}_1^\infty \subset \sigma_I$, $\{\exp(i\psi_n)\}_1^\infty \subset \sigma_{II}$ и σ_I, σ_{II} – замкнуты, получаем, что $\sigma_I \cap \sigma_{II} \neq \emptyset$. Таким образом, существует конечный набор дуг $\{I_k\}_{k=1}^N$:

$$\sigma_I \subset \bigcup_{k=1}^N I_k, \quad \sigma_{II} \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \setminus \bigcup_{k=1}^N I_k,$$

откуда следует, что

$$\sigma_I = \bigcup_{k=1}^N \sigma(k), \quad \sigma_{II} = \bigcup_{k=N+1}^{2N} \sigma(k),$$

где $\sigma(k)$ – изолированные части спектра. Подпространство $\mathcal{L}_k = P_{\sigma(k)}X$ положительно, если $1 \leq k \leq N$, и отрицательно, если $N+1 \leq k \leq 2N$. Таким образом, оператор $U_0(T)$ не имеет спектра смешанного рода в пространстве X_1 [9] и, следовательно, сильно устойчив [9]. Применяя предложение 1, получаем, что уравнение (3) сильно устойчиво.

В случае уравнения (1) спектр пучка $L(\lambda)$ совпадает с собственными значениями краевой задачи

$$y^{IV} + v_0^2 y'' + 2\beta v_0 \lambda y' + \lambda^2 y = 0, \quad (11)$$

$$y(0) = y(1) = y''(0) = y''(1) = 0. \quad (12)$$

При $v_0 < \pi$ оператор $P_0 + v_0^2 P_1$ положительно определен и, следовательно, спектр задачи (11), (12) чисто мнимый. Положим $\lambda = is^2$. Функция $e^{\mu x}$ является решением уравнения (11) тогда и только тогда, когда μ – корень многочлена

$$\left(\frac{\mu}{s}\right)^4 + \frac{v_0^2}{s^2} \left(\frac{\mu}{s}\right)^2 + 2i\beta \frac{v_0}{s} \left(\frac{\mu}{s}\right) - 1 = 0.$$

При достаточно малом v_0/s все корни многочлена различны и аналитически зависят от v_0/s . Вычисляя три первых коэффициента в ряде Тейлора для корней μ_k , $k = 1, \dots, 4$, получим

$$\mu_k = s \left(\omega_k - \frac{1}{2} i \beta \omega_k^2 \frac{v_0}{s} + \frac{1}{4 \omega_k} \left(1 - \frac{1}{2} \beta^2 \right) \frac{v_0^2}{s^2} + O \left(\frac{v_0^3}{s^3} \right) \right),$$

где $\{\omega_k\}_1^4$ – корни из 1. Функции $y_k(x) = \exp\{\mu_k x\}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (11). Положим $y = \sum c_k y_k$ и, подставив $y(x)$ в краевые условия (12), получаем однородную систему линейных уравнений относительно c_k . Она имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда $y(x)$ – собственная функция и is^2 – собственное значение. Учитывая, что $s^2 \in \mathbb{R}$, после преобразований получим, что собственные значения краевой задачи должны удовлетворять одному из двух уравнений

$$\sin s + \frac{1}{4s} \left(1 - \frac{1}{2} \beta^2 \right) v_0^2 \cos s + O \left(\frac{v_0^3}{s^3} \right) = 0,$$

$$\sin is + \frac{1}{4is} \left(1 - \frac{1}{2} \beta^2 \right) v_0^2 \cos is + O \left(\frac{v_0^3}{s^3} \right) = 0.$$

Решая уравнения, получаем четыре последовательности

$$s_{k,n} = \omega_n \left(\pi k - \left(1 - \frac{1}{2}\beta^2 \right) \frac{v_0^2}{4\pi k} + O\left(\frac{v_0^3}{k^2}\right) \right), \quad k \in \mathbb{N}, \quad n = 1, \dots, 4.$$

Таким образом, собственные значения краевой задачи (11), (12) имеют асимптотику

$$\lambda_k = \pm i \left\{ (\pi k)^2 - \left(1 - \frac{1}{2}\beta^2 \right) \frac{v_0^2}{2} + O\left(\frac{v_0^3}{k}\right) \right\}. \quad (13)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\beta \neq \sqrt{2}$ и $T = 2q/(\pi p)$, $q, p \in \mathbb{N}$. Тогда существует $\delta = \delta(T) > 0$ такое, что для любого v_0 , $0 < v_0 < \delta$ уравнение (1) с граничными условиями (2) сильно устойчиво.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для уравнения трубопровода (1) $0 \leq \beta \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Считаем $v_0 < \pi$. Оператор $P_0 + v_0^2 P_1$ положительно определен, поэтому $\sigma_0 = \emptyset$ и присоединенные векторы отсутствуют. Разделим единичную окружность на $2p$ дуг точками

$$\mathfrak{M} = \left\{ e^{i\frac{2\pi}{2p}s} \mid s = \overline{0, 2p-1} \right\}$$

и занумеруем их, обходя против часовой стрелки начиная с 1, числами от 1 до $2p$. Имеем

$$\sigma_I = \overline{\{\exp(i\lambda_k T) \mid \operatorname{Im} \lambda_k > 0\}}, \quad \sigma_{II} = \overline{\{\exp(-i\lambda_k T) \mid \operatorname{Im} \lambda_k < 0\}}.$$

При $v_0 = 0$ $\sigma(L) = \{\pm(\pi n)^2\}_{n=1}^\infty$ и

$$\sigma(U(T)) \subset \left\{ e^{i2\pi\frac{k}{p}}, k = 0, \dots, p-1 \right\}.$$

В силу (13) существует $\delta = \delta(T)$ такое, что при $0 < v_0 < \delta$ σ_I лежит на положительном расстоянии от $\mathfrak{M}$ на дугах с четными номерами (если $|\beta| < \sqrt{2}$) или с нечетными (если $|\beta| > \sqrt{2}$). Так как множества σ_I и σ_{II} комплексно сопряжены и количество дуг – четное число, получаем, что

$$\sigma_I \cap \sigma_{II} = \emptyset.$$

По теореме 2 уравнение (1) сильно устойчиво.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В случае $\beta = 0$ утверждение предложения 2 можно усилить: уравнение сильно устойчиво, если

$$v_0^2 \in \left(\frac{\pi^2(n-1)}{q}, \pi^2 \left(\frac{n}{q} - \frac{n^2}{4q^2} \right) \right), \quad 1 \leq n \leq 2\sqrt{q}.$$

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору А. Г. Костюченко за постановку задачи и постоянное внимание к работе

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Paidoussis M. P., Issid N. T. Dynamic stability of pipes conveying fluid // J. Sound and Vibration. 1974. V. 33. № 3. P. 267–294.
- [2] Зефирова В. И., Колесов В. В., Милославский А. И. Исследование собственных частот прямолинейного трубопровода // Изв. АН СССР. Сер. Мех. тв. тела. 1985. № 1. С. 179–188.
- [3] Shkalilov A. A. Operator pencils arising in elasticity and hydrodynamics: the instability index formula // Operator Theory: Advances and Applications. V. 87. Basel: Birkhäuser Verlag, 1996. P. 358–385.
- [4] Милославский А. И. О спектре неустойчивости операторного пучка // Матем. заметки. 1991. Т. 49. № 4. С. 88–94.
- [5] Буй Та Лонг. Применение функциональных методов к некоторым задачам устойчивости. Дисс. канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1988.
- [6] Крейн С. Г., Петунин Ю. И. Шкалы банаховых пространств // УМН. 1966. Т. 21. № 2. С. 87–186.
- [7] Kato T. Linear evolution equation of hyperbolic type // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. I. A Math. 1970. V. 17. P. 241–258.
- [8] Дергузов В. И., Якубович В. А. Существование решений линейных гамильтоновых уравнений с неограниченными операторами // Проблемы мат. анализа. Вып. 2. Линейные операторы и операторные уравнения, 1969.
- [9] Дергузов В. И. Об устойчивости решений уравнений Гамильтона с неограниченными периодическими коэффициентами // Матем. сб. 1964. Т. 63 (105). № 4. С. 591–619.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило

03.12.1998

Исправленный вариант

30.08.1999