Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Д. Тверитинов, Несколько замечаний о представлении бесконечномерной симплектической группы и о построении метаплектической группы, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 6, 861–876

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm81>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 12:59:08

УДК 517.946

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О ПРЕДСТАВЛЕНИИ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЙ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГРУППЫ И О ПОСТРОЕНИИ МЕТАПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГРУППЫ

И. Д. Тверитинов

Построено явное проективное представление подгруппы симплектической группы в пространстве Винера–Сигала–Фока, а также расширение Макки подгрупп симплектической группы.

Библиография: 9 названий.

Введение. В работе рассматриваются конструкции, связанные с построением проективного представления симплектической группы бесконечномерного симплектического пространства и унитарным представлением расширений симплектической группы и ее подгрупп. Для построения проективного представления используется техника преобразований Боголюбова. Поскольку в бесконечномерном пространстве, в отличие от конечномерного, существуют неэквивалентные невырожденные гауссовские меры, оказывается необходимым рассматривать не всю симплектическую группу, а некоторые ее подгруппы, для всех элементов которых существуют унитарные преобразования Боголюбова. В первой части работы найдены явные формулы для операторов проективного представления одной из таких подгрупп симплектической группы, причем операторы этого проективного представления, действующие в проективном пространстве, построенном по пространству Винера–Сигала–Фока, порождаются унитарными преобразованиями пространства Винера–Сигала–Фока (унитарными преобразованиями Боголюбова). Показано также, что в конечномерном случае используемая ниже конструкция представления (по-видимому, она впервые появилась в работе [1]) приводит к представлению, не эквивалентному представлению, рассмотренному в книге [2].

Далее в работе рассматриваются расширения Макки подгрупп симплектической группы; точнее, для каждого элемента этой подгруппы указывается определенное унитарное преобразование Боголюбова, порождающее соответствующий оператор проективного представления (действующий в проективном пространстве, построенном по пространству Винера–Сигала–Фока) и по коциклу, возникшему в результате выбора унитарных преобразований Боголюбова, строится расширение Макки. Используемая

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-01074.

операторнозначная функция, определенная на подгруппе симплектической группы (элемент подгруппы переходит в преобразование Боголюбова), продолжается до унитарного представления расширения Макки, построенного по кодиклу, соответствующему этой операторнозначной функции. Доказано отсутствие подгрупп в расширении Макки, имеющих двузначную проекцию. В то же время в работе приводится класс подгрупп симплектической группы (в конечномерном случае сама симплектическая группа принадлежит этому классу), для которых существует двулистное накрытие с указанным выше свойством (подгруппа расширения Макки имеет двузначную проекцию). Поэтому из результатов работы вытекают результаты, аналогичные полученным в книге [2], в которой построено двулистное накрытие конечномерной симплектической группы, так называемая метасимплектическая группа. Все результаты этой работы получены путем предъявления явных конструкций.

1. Предварительные сведения. Пусть Q и P – две копии действительного гильбертова пространства, H – комплексное гильбертово пространство, полученное путем наделения пространства $Q \times P$ комплексной структурой, задаваемой оператором

$$J: (q, p) \in Q \times P \mapsto (-p, q) \in Q \times P,$$

$B(\cdot, \cdot)$ – билинейная антисимметричная форма на $H \times H$, определяемая как мнимая часть эрмитова скалярного произведения в H . Группа обратимых преобразований (операторов) в H , сохраняющих форму $B(\cdot, \cdot)$, называется *симплектической группой* (см. [3], [4]). Симплектические преобразования удобно представлять матрицами

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – операторы, действующие соответственно из Q в Q , из P в Q , из Q в P , из P в P . В дальнейшем для обозначения такой матрицы будем использовать символ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Из равенства $B((p_1, q_1), (p_2, q_2)) = \langle p_1, q_2 \rangle - \langle p_2, q_1 \rangle$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в Q , получается следующее условие сохранения формы $B(\cdot, \cdot)$ при преобразовании $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$:

$$\delta^* \alpha - \beta^* \gamma = \text{id}, \quad \delta^* \beta = \beta^* \delta, \quad \gamma^* \alpha = \alpha^* \gamma.$$

Обозначим через $L_2(Q, \mu_{1/2})$ пространство, полученное в результате пополнения пространства цилиндрических функций, определенных на Q , с квадратом, интегрируемым по гауссовой цилиндрической мере с корреляционным оператором $I/2$ (гильбертово пространство $L_2(Q, \mu_{1/2})$ называют *пространством Винера–Сигала–Фока*). Эта гауссова цилиндрическая мера не является σ -аддитивной на алгебре цилиндрических подмножеств пространства Q . Стоит отметить, что эта мера будет σ -аддитивной, если считать множества из ее области определения подмножествами пространства Q_- , полученного пополнением Q по норме $\langle T(\cdot), T(\cdot) \rangle^{1/2}$, где T – инъективный оператор Гильберта–Шмидта в пространстве Q (подробнее см. [5]). Для всякого $a \in Q$ определим неограниченные операторы $\hat{q}_a, \hat{p}_a$ в пространстве $L_2(Q, \mu_{1/2})$ следующим образом:

$$\hat{q}_a: f \mapsto [x \mapsto \langle x, a \rangle f(x)], \quad \hat{p}_a: f \mapsto [x \mapsto -\text{id} f(x)(a) + i \langle x, a \rangle f(x)].$$

Эти операторы образуют представление Шрёдингера алгебры Гейзенберга. Симплектическая группа естественным образом действует на операторы представления Шрёдингера:

$$\begin{pmatrix} \hat{q}_a \\ \hat{p}_a \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \hat{q}_{\alpha^*(a)} + \hat{p}_{\beta^*(a)} \\ \hat{q}_{\gamma^*(a)} + \hat{p}_{\delta^*(a)} \end{pmatrix}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Унитарный оператор V_A такой, что для всех $a \in Q$ на общей области существенной самосопряженности операторов представления Шрёдингера выполнено равенство

$$\begin{pmatrix} V_A^{-1} \circ \hat{q}_a \circ V_A \\ V_A^{-1} \circ \hat{p}_a \circ V_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{q}_{\alpha^*(a)} + \hat{p}_{\beta^*(a)} \\ \hat{q}_{\gamma^*(a)} + \hat{p}_{\delta^*(a)} \end{pmatrix},$$

называется *унитарным преобразованием Боголюбова*, соответствующим симплектическому преобразованию.

Только что определенное преобразование операторов представления Шрёдингера также называют *преобразованиями Боголюбова*. Так как оператор V_A , удовлетворяющий тем же соотношениям, что и унитарные преобразования Боголюбова, определяется (если он существует) с точностью до комплексного скалярного множителя, не равного нулю, который при условии существования унитарных преобразований Боголюбова может быть выбран так, что V_A станет унитарным (см. [4]), то, рассматривая подгруппу симплектической группы, для всех элементов которой существуют унитарные преобразования Боголюбова, можно определить ее проективное представление. Так как каждый оператор этого проективного представления порождается унитарным оператором в пространстве Винера–Сигала–Фока (соответствующим преобразованием Боголюбова), то можно говорить о многозначном отображении (с точностью до комплексного множителя, равного по модулю единице) в группу унитарных операторов пространства Винера–Сигала–Фока, которое естественно назвать *унитарным проективным представлением*.

2. Явный вид некоторых преобразований Боголюбова. Симплектическому преобразованию $A = (\text{id}, 0, b, \text{id})$, где b – самосопряженный оператор Гильберта–Шмидта, соответствует унитарное преобразование Боголюбова

$$V_A: f \mapsto \left[x \mapsto \exp \frac{i \langle b(x), x \rangle}{2} f(x) \right].$$

Из того, что b – оператор Гильберта–Шмидта, следует возможность продолжения функции $\langle b(x), x \rangle$ на Q – до измеримой (см. [5]). Если $A = (0, \text{id}, -\text{id}, 0)$, то V_A – преобразование Фурье–Винера (см. [5]), определяемое на цилиндрических функциях из пространства Шварца формулой

$$V_A: f \mapsto \left[x \mapsto \exp \frac{\langle x, x \rangle}{2} \int_P e^{-i \langle x, y \rangle} f(y) d\mu_1(y) \right].$$

Если $A = (d^{-1}, 0, 0, d^*)$, где оператор d околоединичный (это означает, что $d - I$ – ядерный оператор), то

$$V_A: f \mapsto \left[x \mapsto \sqrt{|\det(d)|} \exp \left(\frac{\langle x, x \rangle}{2} - \frac{\langle d(x), d(x) \rangle}{2} \right) f(d(x)) \right].$$

Если $d - I$ является оператором Гильберта–Шмидта, то для оператора V_A можно аналогичным образом указать явную формулу.

Пусть $A = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, где оператор β обратимый и околоединичный. Тогда A можно представить в виде произведения симплектических преобразований рассмотренного выше типа. Действительно, преобразуя равенство

$$(d^{-1}, 0, 0, d^*) \cdot (\text{id}, 0, c, \text{id}) \cdot (0, \text{id}, -\text{id}, 0) \cdot (\text{id}, 0, b, \text{id}) = (\alpha, \beta, \gamma, \delta), \quad (1)$$

получаем

$$(d^{-1}b, d^{-1}, d^*cb - d^*, d^*c) = (\alpha, \beta, \gamma, \delta), \quad (2)$$

что эквивалентно

$$d = \beta^{-1}, \quad b = \beta^{-1}\alpha, \quad c = \beta^*\delta.$$

Для того чтобы при таком выборе параметров a, b, c определяемые ими операторы оказались симплектическими, требуется, чтобы были выполнены равенства $c^* = c, b^* = b$. Справедливость первого равенства следует из того, что A – симплектическое преобразование. Пользуясь (2) и учитывая, что симплектические преобразования образуют группу и что все множители в (1) кроме, быть может, сомножителя, содержащего параметр $b = \beta^{-1} \cdot \alpha$, являются симплектическими преобразованиями, получаем второе равенство. Таким образом, доказана следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть $A = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ – симплектическое преобразование, причем α, δ – операторы Гильберта–Шмидта и β – околоединичный обратимый оператор. Тогда для цилиндрических функций из класса Шварца унитарное преобразование Боголюбова V_A задается формулой

$$V_A: f \mapsto \left[x \mapsto \frac{\exp(\langle x, x \rangle / 2)}{\sqrt{|\det(\beta)|}} \int_P \exp \left(i \left\{ \frac{\langle \delta \beta^{-1} x, x \rangle}{2} - \langle \beta^{-1} x, y \rangle + \frac{\langle \beta^{-1} \alpha y, y \rangle}{2} \right\} \right) f(y) d\mu_1(y) \right].$$

Покажем, что от требования обратимости оператора β можно отказаться (по-прежнему предполагая, что β – околоединичный оператор, а α, δ – операторы Гильберта–Шмидта). Аппроксимируем A симплектическими операторами

$$A_n = \left(\alpha + \frac{a\gamma}{n} \beta + \frac{a\delta}{n}, \gamma, \delta \right)$$

с невырожденным β (a – ортогональный проектор на $\text{Ker } \beta^*$). Из равенств

$$\begin{aligned} \delta^* \left(\alpha + \frac{a\gamma}{n} \right) - \left(\beta^* + \frac{\delta^* a}{n} \right) \gamma &= \delta^* \alpha - \beta^* \gamma = \text{id}, \\ \delta^* \left(\beta + \frac{a\delta}{n} \right) &= \beta^* + \frac{\delta^* a \delta}{n} = \left(\beta + \frac{a\delta}{n} \right)^*, \\ \gamma^* \left(\alpha + \frac{a\gamma}{n} \right) &= \alpha^* \gamma + \frac{\gamma^* a \gamma}{n} = \left(\alpha + \frac{a\gamma}{n} \right)^* \gamma \end{aligned}$$

следует, что преобразование A_n симплектическое. Так как для околоединичных операторов обратимость эквивалентна отсутствию ядра, то получаем, что оператор $\beta + a\delta/n$ обратим. Применяя теорему 1, для цилиндрической функции из пространства Шварца получаем следующее:

$$\begin{aligned} V_A(f)(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} V_{A_n}(f)(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{|\det(\beta + a\delta/n)|}} \exp \frac{\langle x, x \rangle}{2} \int_P \exp \left(i \left\{ \frac{\langle \delta(\beta + a\delta/n)^{-1} x, x \rangle}{2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left\langle \left(\beta + \frac{a\delta}{n} \right)^{-1} x, y \right\rangle + \frac{\langle (\beta + a\delta/n)^{-1} (\alpha + a\gamma/n)y, y \rangle}{n} \right\} \right) f(y) d\mu_1(y). \end{aligned} \quad (3)$$

Сделав замену $y = (\beta^* + \delta^* a)z$ и учитывая, что

$$\frac{d\mu^{t^{-1}}}{d\mu}(x) = |\det(t)| \exp \frac{\langle x, x \rangle - \langle tx, tx \rangle}{2},$$

где оператор $(t - I)$ ядерный, а оператор t обратимый, получаем

$$\begin{aligned} V_A(f)(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{|\det(\beta + a\delta)|} \sqrt{n}^{\dim(\text{Ker } \beta^*)} \exp \frac{\langle x, x \rangle}{2} \\ &= \int_{\text{Im } \beta} \int_{\text{Ker } \beta^*} \exp \left(i \left\{ \frac{\langle ax + px, (\beta^* + \delta^* a/n)^{-1} \delta^* x \rangle}{2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \langle px + ax, z_1 + nz_2 \rangle + \frac{\langle (\alpha + \gamma/n)(\beta^* z_1 + \delta^* z_2), z_1 + nz_2 \rangle}{2} \right\} \right) \\ &\quad \times \exp \frac{\langle z, z \rangle - \langle (\beta^* + \delta^* a)z, (\beta^* + \delta^* a)z \rangle}{2} f(\beta^* z_1 + \delta^* z_2) d\mu_1(z_2) d\mu_1(z_1), \end{aligned}$$

где p – ортогональный проектор на $\text{Im } \beta$, а $z_1 = p(z)$, $z_2 = a(z)$.

ЛЕММА 1. *Справедливы равенства*

$$\begin{aligned} \left\langle ax + px, \left(\beta^* + \frac{\delta^* a}{n} \right)^{-1} \delta^* x \right\rangle &= n \langle ax, ax \rangle + \langle px, p\delta u \rangle, \\ \langle \alpha \beta^* z_1 + \alpha \delta^* z_2, z_1 + nz_2 \rangle &= \langle \alpha \beta^* z_1, z_1 \rangle + n \langle z_2, z_2 \rangle + \langle \alpha \delta^* z_2, z_1 \rangle. \end{aligned}$$

Здесь вектор u определяется равенством $px = \beta u$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$\begin{aligned}
 \left\langle ax + px, \left(\beta^* + \frac{\delta^* a}{n} \right)^{-1} \delta^* x \right\rangle &= \left\langle ax + px, \left(\beta^* + \frac{\delta^* a}{n} \right)^{-1} \delta^* (ax + px) \right\rangle \\
 &= \langle ax + px, nax \rangle + \left\langle ax + px, \left(\beta^* + \frac{\delta^* a}{n} \right)^{-1} \delta^* px \right\rangle \\
 &= n\langle ax, ax \rangle + \left\langle ax + px, \left(\beta^* + \frac{\delta^* a}{n} \right)^{-1} \delta^* \beta u \right\rangle \\
 &= \langle nax, nax \rangle + \left\langle ax + px, \left(\beta^* + \frac{\delta^* a}{n} \right)^{-1} \beta^* \delta u \right\rangle \\
 &= n\langle ax, ax \rangle + \left\langle ax + px, \left(\beta^* + \frac{\delta^* a}{n} \right)^{-1} \beta^* (a\delta u + p\delta u) \right\rangle \\
 &= n\langle ax, ax \rangle + \langle ax + px, p\delta u \rangle = n\langle ax, ax \rangle + \langle px, p\delta u \rangle
 \end{aligned}$$

и $A^{-1} = (\delta^*, -\beta^*, -\gamma^*, \alpha^*)$, то, используя условия симплектичности, получаем, что для всех $x \in \text{Ker } \beta^*$ выполнено $\delta\alpha^*x = x$. Таким образом,

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha\beta^*z_1 + \alpha\delta^*z_2, z_1 + nz_2 \rangle &= \langle \alpha\beta^*z_1, z_1 \rangle + n\langle \alpha\beta^*z_1, z_2 \rangle + n\left\langle \alpha\delta^*z_2, z_2 + \frac{1}{n}z_1 \right\rangle \\
 &= \langle \alpha\beta^*z_1, z_1 \rangle + n\langle z_2, z_2 \rangle + \langle \alpha\delta^*z_2, z_1 \rangle.
 \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Используя лемму 1, получаем

$$\begin{aligned}
 V_A(f)(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} V_{A_n}(f)(x) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \frac{\langle x, x \rangle}{2} \sqrt{|\det(\beta + a\delta)|} \sqrt{n}^{\dim \text{Ker } \beta} \\
 &\quad \times \int_{\text{Im } \beta} \int_{\text{Ker } \beta^*} \exp \frac{in\langle z_2 - ax, z_2 - ax \rangle}{2} \\
 &\quad \times \exp \left(i \left\{ \frac{\langle px, p\delta u \rangle}{2} - \langle px, z_1 \rangle + \frac{\langle \alpha\beta^*z_1, z_1 \rangle}{2} + \frac{\langle \alpha\delta^*z_2, z_1 \rangle}{2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\langle a\gamma(\beta^*z_1 + \delta^*z_2), z_2 \rangle}{2} \right\} \right) \\
 &\quad \times \exp \frac{\langle z_1 + z_2, z_1 + z_2 \rangle - \langle (\beta^* + \delta^*a)z, (\beta^* + \delta^*a)z \rangle}{2} \\
 &\quad \times f(\beta^*z_1 + \delta^*z_2) d\mu_1(z_2) d\mu_1(z_1).
 \end{aligned}$$

ЛЕММА 2. Пусть $f(\cdot)$ – функция из пространства Шварца. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \right)^k \int_{\mathbb{R}^k} \exp \frac{i\langle x, x \rangle n}{2} f(x) dx = \exp \frac{i\pi k}{4} f(0).$$

Применяя лемму 2, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Если $A = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ – симплектическое преобразование, причем оператор β околоединичный, а α, δ – операторы Гильберта–Шмидта, то для цилиндрической функции $f(\cdot)$ из класса Шварца унитарное преобразование Боголюбова задается следующей формулой:

$$V_A(f)(x) = \exp \frac{i\pi \dim \text{Ker } \beta}{4} \sqrt{|\det(\beta + \alpha\delta)|} \exp \frac{\langle px, px \rangle}{2} \\ \times \int_{\text{Im } \beta} \exp \left(i \left\{ \frac{\langle px, p\delta u \rangle}{2} - \langle px, z \rangle + \frac{\langle z, \alpha\beta^*z + \alpha\delta^*ax \rangle}{2} + \frac{\langle \gamma\beta^*z + \gamma\delta^*ax, ax \rangle}{2} \right\} \right) \\ \times \exp \frac{\langle z, z \rangle - \langle (\beta^* + \delta^*a)(z + ax), (\beta^* + \delta^*a)(z + ax) \rangle}{2} f(\beta^*z + \delta^*ax) d\mu_1(z).$$

Для случая конечномерного симплектического пространства аналогичная теорема доказана в [6].

3. Унитарные преобразования Боголюбова, порожденные унитарными симплектическими преобразованиями. Симплектическое преобразование вещественного пространства H является унитарным преобразованием комплексного пространства H тогда и только тогда, когда оно C -линейно или, что то же самое, когда $\alpha = \delta$, $\beta = -\gamma$. Ранее рассмотренный класс симплектических преобразований содержит не все унитарные преобразования, но известен явный вид для унитарных преобразований Боголюбова в пространстве Фока, отвечающих унитарным преобразованиям симплектического пространства. Пространство $F(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (\bigotimes^n H)$ с нормой

$$\| \cdot \|_{F(H)} = \sum_{n=0}^{\infty} \| \cdot \|_{H^n}$$

называется *пространством Фока* (подробнее см. [7], [8]). Для каждого $f \in H$ положим $a(f): F(H) \rightarrow F(H)$ так, чтобы

$$a^*(f): (a, z_1^1, \dots, z_1^n \vee \dots \vee z_n^n, \dots) \mapsto (0, af, f \vee z_1^1, \dots, f \vee z_1^n \vee \dots \vee z_n^n, \dots),$$

где

$$z_1 \vee \dots \vee z_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\sigma \in S_n} z_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes z_{\sigma(n)}.$$

Для операторов $a(f), a^*(f)$ верны канонические коммутационные соотношения (ККС)

$$[a(f), a(g)] = [a^*(f), a^*(g)] = 0, \quad [a(f), a^*(g)] = \langle f, g \rangle_C I,$$

где $[A, B] = AB - BA$. Для операторов

$$a_1(x \times y) = \frac{\hat{q}_x - i\hat{q}_y + \hat{p}_y + i\hat{p}_x}{\sqrt{2}}, \quad a_1^*(x \times y) = \frac{\hat{q}_x + i\hat{q}_y + \hat{p}_y - i\hat{p}_x}{\sqrt{2}},$$

действующих в пространстве Винера–Сигала–Фока и порождающих алгебру, порожденную операторами $\hat{q}_a, \hat{p}_a$, выполняются ККС. Унитарное преобразование U пространства H порождает преобразование операторов

$$\begin{pmatrix} a(f) \\ a^*(f) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a(U(f)) \\ a^*(U(f)) \end{pmatrix}.$$

Соответствующее преобразование Боголюбова

$$V_U: (a, z_1^1, \dots, z_1^n \vee \dots \vee z_n^n, \dots) \mapsto (a, U(z_1^1), \dots, U(z_1^n) \vee \dots \vee U(z_n^n), \dots).$$

Отсюда следует, что если

$$U = \exp i\phi_1 P_1 + \dots + \exp i\phi_n P_n,$$

где P_i – ортогональные проекторы на попарно ортогональные подпространства, то V_U обладает полной системой собственных функций, которая может быть описана следующим образом.

Если $\{e_n^i\}$ – ортонормированный базис в $P_i(H)$, то $\{e_n^i\}$ – полная система собственных функций для U . Легко видеть, что

$$(0, 0, \dots, e_{k_{1,1}}^1 \vee \dots \vee e_{k_{1,m_1}}^1 \vee e_{k_{2,1}}^2 \vee \dots \vee e_{k_{2,m_2}}^2 \vee \dots \vee e_{k_{n,m_n}}^n, 0)$$

– собственные функции оператора V_U с собственными значениями $\exp i(m_1\phi_1 + \dots + m_n\phi_n)$. Добавляя к ним собственную функцию $(1, 0, 0, \dots)$ с собственным значением 1, получаем полную систему собственных функций оператора V_U . Пусть теперь $T: F(H) \rightarrow L_2(Q, \mu_{I/2})$ – изоморфизм гильбертовых пространств такой, что

$$T: (1, 0, 0, \dots) \mapsto 1,$$

$$T: (0, \dots, z_1^n \vee \dots \vee z_n^n, 0, \dots) \mapsto a_1^*(\operatorname{Re}(z_1^1) \times \operatorname{Im}(z_1^1)) \circ \dots \circ a_1^*(\operatorname{Re}(z_n^n) \times \operatorname{Im}(z_n^n))(1).$$

При этом изоморфизме операторы $a(f), a^*(f)$ перейдут в операторы $a_1(f), a_1^*(f)$, а собственные функции оператора V_U перейдут в полиномиальные функции, которые являются собственными функциями преобразования Фурье.

ЛЕММА 3. Пусть симплектическое преобразование U унитарно и оператор V_U сплетающий для U в пространстве Фока, т.е. V_U удовлетворяет соотношению $V_U \circ a(z) \circ V_U^{-1} = a(U(z))$. Тогда оператор $T \circ V_U \circ T^{-1}$ является сплетающим в картине Винера–Сигала–Фока или, что то же самое, определяет соответствующее унитарное преобразование Боголюбова.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть U представим матрицей

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}.$$

Тогда U индуцирует автоморфизм в алгебре операторов (преобразование Боголюбова), который в картине Винера–Сигала–Фока имеет вид $a_1(z) \mapsto a_1(U^*(z))$ или, что то же самое в терминах $\hat{q}_x, \hat{p}_x$,

$$\begin{pmatrix} \hat{q}_a \\ \hat{p}_a \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \hat{q}_{A^*(a)} + \hat{p}_{-B^*(a)} \\ \hat{q}_{B^*(a)} + \hat{p}_{A^*(a)} \end{pmatrix}.$$

В силу унитарности U автоморфизм, задаваемый оператором U^{-1} в алгебре операторов $a(z)$, действующих в пространстве Фока, совпадает с автоморфизмом в алгебре операторов $a_1(z)$ пространства Винера–Сигала–Фока. Лемма доказана.

Из рассмотрения картины Фока, в которой унитарные преобразования Боголюбова, отвечающие унитарным преобразованиям симплектического пространства, имеют простой вид, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. Пусть последовательность унитарных операторов $\{U_n\}$ сходится в сильной операторной топологии (в топологии поточечной сходимости) к унитарному оператору U . Тогда последовательность соответствующих унитарных преобразований Боголюбова V_{U_n} сходится к V_U в сильной операторной топологии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что для произвольного элемента пространства Фока h последовательность $\{V_{U_n}(h)\}$ сходится по норме к $\{V_U(h)\}$. В силу унитарности U_n и U достаточно доказать это только для элементов h финитных и конечного ранга. А для таких h утверждение очевидно. Теорема доказана.

Последняя теорема позволяет получить явные формулы для унитарных преобразований Боголюбова, отвечающих унитарным преобразованиям H в картине Винера–Сигала–Фока. Пусть $H = Q \times P$ и $Q = Q_1 \times Q_2$. Тогда $H = H_1 \times H_2$, где $H_i = Q_i \times P_i$, $i = 1, 2$, и унитарный оператор U оставляет инвариантными H_1 и H_2 . Если рассматривать H_i как симплектические пространства, то в качестве преобразования Боголюбова V_U можно взять тензорное произведение

$$V_U = V_{U|H_1} \otimes V_{U|H_2}, \quad \text{где } V_U|H_i: L_2(Q_i, \mu_{1/2}) \rightarrow L_2(Q_i, \mu_{1/2}).$$

Так как унитарное преобразование Боголюбова определено с точностью до единичного множителя, можно было взять его таким образом, что $V_U(1) = 1$. Единица здесь играет роль вакуумного вектора в пространства Фока. Резюмируя, получаем, что

$$V_U(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} V_{U_n}(f(P_n(\cdot))),$$

где U_n и P_n определяются ниже. Пусть $\{e_i\}$ – последовательность собственных векторов U . Определим семейство T_n подпространств пространства Q таких, что

$$T_n = \text{Link}\{\text{Re}(e_i), \text{Im}(e_i), i = 1, \dots, n\}.$$

Обозначим через P_n ортогональный проектор на подпространство T_n . Пусть U_n – произвольный унитарный оператор, удовлетворяющий следующим условиям: n первых собственных векторов оператора $U_n|_{T_n}$ являются собственными векторами оператора U с теми же собственными значениями и $U_n|(T_n)^\perp = \text{id}$. Мы предполагаем, что $f(\cdot)$ – гладкая быстро убывающая функция. Так как всякий унитарный оператор обладает спектральным представлением (т.е. $U = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp i\phi dE_\phi$), то V_U есть предел унитарных операторов рассмотренного выше типа (обладающих полной системой собственных функций).

4. Некоторые подгруппы симплектической группы. Вопрос о существовании преобразований Боголюбова решает теорема Шейла (см., например, [8]), а именно, для преобразования S существует унитарное преобразование Боголюбова тогда и только тогда, когда $(S^*S)^{1/2} - I$ – оператор Гильберта–Шмидта. Обозначим множество всех симплектических операторов S таких, что оператор $(S^*S)^{1/2} - I$ ядерный, через S_1 , а множество всех симплектических операторов S таких, что $(S^*S)^{1/2} - I$ – оператор Гильберта–Шмидта, – через S_2 .

ТЕОРЕМА 4. Пусть $g \in S_i$. Тогда существуют унитарные преобразования U_1, U_2 и преобразование $W \in S_i$ вида $W = (d^{-1}, 0, 0, d^*)$ такие, что выполнено равенство $g = U_1 \circ W \circ U_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим U_1, U_2, W соответственно через $U_1(g), U_2(g), W(g)$. Пусть

$$J: Q \times P \ni x \times y \mapsto -y \times x \in Q \times P$$

– умножение на мнимую единицу. Тогда условие симплектичности g имеет вид $J\dot{g}\dot{g}^{-1} = g^*g^{-1}$. Из симплектичности самосопряженного отображения g^*g следует, что если e – собственный вектор отображения g^*g с собственным значением λ , то $J(e)$ – тоже собственный вектор с собственным значением $1/\lambda$. Отсюда следует, что существуют унитарное отображение V , подпространство H пространства M такое, что $H = M \times JM$, оператор $t: M \rightarrow M$ такой, что $V(Q) = M$ и

$$g^*g: Q \times P \ni x \times y \mapsto t \circ V(x) \times J \circ t^{-1} \circ V(y) \in M \times M = H.$$

Так как

$$(g^*g)^{1/2}: Q \times P \ni x \times y \mapsto t^{1/2} \circ V(x) \times J \circ t^{-1/2} \circ V(y) \in M \times M = H,$$

то $(g^*g)^{1/2}$ симплектическое. Пусть $g = O \circ (g^*g)^{1/2}$, где O ортогонально. Тогда из группового закона следует, что O унитарный. Отсюда следует заключение теоремы.

Имеет место и обратное утверждение: если g представим в виде $g = U_1 \circ W \circ U_2$, где $W \in S_i$, то $g \in S_i$. Это замечание позволяет определить множества S_i как множества симплектических преобразований, представимых в виде $U + K$, где оператор U унитарный, а K – оператор Гильберта–Шмидта или ядерный. Отсюда следует, что S_i являются подгруппами симплектической группы. Это утверждение позволяет написать явную формулу для унитарного преобразования Боголюбова, соответствующего симплектическому преобразованию из S_1 .

5. Связь с подобными результатами. В книге [2] определяется другое проективное представление симплектической группы конечномерного симплектического пространства, которое оказывается ψ -эквивалентным рассмотренному выше (о понятии ψ -эквивалентности подробнее см. [9]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Представления $T(\cdot), T_1(\cdot)$ группы G называются ψ -эквивалентными, если существует автоморфизм ψ группы G такой, что $T(\psi(\cdot))$ и $T_1(\cdot)$ эквивалентны в обычном смысле.

Если в качестве сплетающего оператора взять тождественный, а автоморфизм симплектической группы $\psi((\alpha, \beta, \gamma, \delta)) = (\delta, \gamma, \beta, \alpha)$, то эти проективные унитарные представления будут ψ -эквивалентны. Под эквивалентностью проективных унитарных представлений подразумевается коммутативность соответствующей диаграммы с точностью до умножения на комплексное число с единичным модулем, зависящее от элемента группы. Вопрос об эквивалентности этих представлений решает

ТЕОРЕМА 5. *Рассмотренная пара представлений конечномерной симплектической группы не эквивалентна в обычном смысле.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Операторы эквивалентных представлений, соответствующие одному и тому же элементу группы, имеют одинаковый спектр. Рассмотрим симплектическое преобразование

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix},$$

т.е. так называемый “поворот”. Спектр соответствующего унитарного преобразования Боголюбова имеет вид $\{\exp in\varphi, n = 0, 1, \dots\}$. Так как на унитарных преобразованиях автоморфизм ψ реализуется оператором взятия обратного, то у оператора второго представления спектр $\{\exp -in\varphi, n = 0, 1, \dots\}$. Так как при подходящем φ спектр различен, то теорема доказана.

6. Копикл проективного представления и подъем проективного представления до обычного. Максимальное изотропное подпространство H , т.е. максимальное подпространство K такое, что для всех $x, y \in K$ выполнено равенство $B(x, y) = 0$, называют *лагранжевой плоскостью* (подробнее см. [2]). Удобно представлять лагранжеву плоскость как замыкание вещественной линейной оболочки комплексного ортогонального базиса. В случае конечномерного пространства H индекс Маслова трех лагранжевых плоскостей l_1, l_2, l_3 определяется как сигнатура квадратичной формы $B(x, y) + B(y, z) + B(z, x)$ на пространстве $l_1 \times l_2 \times l_3$ и обозначается через $\tau(l_1, l_2, l_3)$. Основное свойство индекса Маслова, так называемое *цепное правило*, имеет вид

$$\tau(l_1, l_2, l_3) = \tau(l_1, l_2, l_4) + \tau(l_2, l_3, l_4) + \tau(l_3, l_1, l_4).$$

Доказательство см. в книге [2].

Если есть унитарное проективное представление $T(\cdot)$ группы G , то для каждого элемента $g \in G$ можно взять определенный оператор $T(g)$; тогда комплекснозначная функция $c(\cdot, \cdot)$, равная по модулю единице, такая, что выполняется равенство

$$T(g_1) \circ T(g_2) = c(g_1, g_2) T(g_1 g_2),$$

называется *коциклом* проективного унитарного представления. Коцикл удовлетворяет уравнению коцикла

$$c(g_1, g_2)c(g_1 g_2, g_3) = c(g_1, g_2 g_3)c(g_2, g_3),$$

которое следует из ассоциативности умножения. Выберем теперь V_g , $g \in S_1$, так, чтобы $V_g(1)(0) > 0$. Так как функция $V_g(1)$ представляет собой экспоненту от квадратичной формы, которая продолжается на $\mathbb{Q}_-$, мы можем естественным образом определить ее значение в точке 0.

ЛЕММА 4. Пусть $g_1, g_2 \in S_1$. Тогда

$$\begin{aligned} c(g_1, g_2) &= c(U_1(g_1) \cdot U_1(W(g_1) \dot{U}_2(g_1)g_2), W(W(g_1) \cdot U_2(g_1)g_2)) \\ &\quad \times c^{-1}(U_1(W(g_1) \cdot U_2(g_1) \cdot g_2), W(W(g_1) \cdot U_2(g_1) \cdot g_2)) \\ &\quad \times c(U_2(g_1) \dot{U}_1(g_2), W(g_2)) \cdot c^{-1}(U_1(g_1), W(g_1)) \cdot c^{-1}(U_1(g_2), W(g_2)), \end{aligned}$$

где U_1, W, U_2 определены в теореме 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из уравнения коцикла и из того, что

$$c(W(h_1) \cdot h_2, h_3) = c(h_2, h_3), c(h_1, h_2 \cdot U) = c(h_1, h_2)$$

для симплектических h_1, h_2, h_3 и унитарного U .

Последняя лемма позволяет выразить значение коцикла в произвольных элементах S_1 через значения в элементах более простого вида. Справедлива следующая

ЛЕММА 5. Пусть $\operatorname{Re}(a) > 0$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \frac{-ax^2}{2} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a}},$$

где $\arg \sqrt{a} \in [-\pi/2, \pi/2]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теоремы Коши.

ТЕОРЕМА 6. Пусть унитарное преобразование $U = (A, -B, B, A)$, а симплектическое преобразование $W = (d^{-1}, 0, 0, d^*)$. Тогда коцикл

$$c(U, W) = \frac{(\det(I + (d^* \cdot d - I) \cdot (B^* B + iA^* \cdot B)))^{1/2}}{|\det(I + (d^* \cdot d - I) \cdot (B^* B + iA^* \cdot B))|^{1/2}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем для простоты считать, что B обратим. В силу выбора унитарных преобразований Боголюбова

$$c(U, W) = \frac{|V_{U \circ W}(1)(0)|}{V_{U \circ W}(1)(0)}.$$

Иначе говоря,

$$\frac{1}{V_{U \circ W}(1)(0)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{T_n} \exp \left(i \left\{ \frac{\langle \beta_n^{-1} \alpha_n y, y \rangle}{2} \right\} - \frac{\langle y, y \rangle}{2} \right) dy}{\int_{T_n} \exp \left(i \left\{ \frac{\langle \beta_n^{-1} \alpha_n y, y \rangle}{2} \right\} - \frac{\langle P_n dy, P_n \cdot dy \rangle}{2} \right) dy},$$

где P_n – ортогональный проектор на $T_n = \text{Link}\{\text{Re}(e_i), \text{Im}(e_i), i = 1, \dots, n\}$, $\{e_i\}$ – собственные вектора U , а α_n, β_n – элементы матрицы унитарного оператора, совпадающего на T_n с оператором U и тождественного на ортогональном дополнении к T_n . Учитывая, что

$$(i\beta^{-1} \cdot \alpha - I)^{-1} = -\beta^* \cdot \beta - i\alpha^* \circ \beta,$$

и применяя последнюю лемму, получаем заключение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ. В [2] для случая конечномерной симплектической группы и некоторой ветви проективного представления справедливо представление для коцикла

$$c(g_1, g_2) = \exp \frac{i \cdot \pi \tau(P, g_1(P), g_1 \cdot g_2(P))}{4},$$

где проективное представление, рассматриваемое в [2], ϕ -эквивалентно рассматриваемому в работе.

Аналогично, используя явные формулы для операторов представления, можно получить другое представление для коцикла. Если симплектические преобразования $g_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$, $g_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2)$ околоединичные, то

$$c(g_1, g_2)^2 = \frac{(\det(\alpha_1 + i \cdot \beta_1)/|\det(\alpha_1 + i \cdot \beta_1)|) \cdot (\det(\alpha_2 + i \cdot \beta_2)/|\det(\alpha_2 + i \cdot \beta_2)|)}{\det(\alpha_3 + i \cdot \beta_3)/|\det(\alpha_3 + i \cdot \beta_3)|},$$

где $g_1 \cdot g_2 = (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \delta_3)$. Справедливость данного представления для коцикла устанавливается путем приближения ядерного оператора конечномерным.

Если дана группа G и ее проективное унитарное представление с некоторой ветвью $T: G \rightarrow U(H)$, коцикл $c: G \times G \rightarrow S^1$, то можно построить расширение $\hat{G}$ такое, что проективное представление T группы G поднимется до обычного представления $\hat{T}$ группы $\hat{G}$. Как множество группа $\hat{G}$ отождествляется с $G \times S^1$, а умножение определяется так:

$$(g, t)(g_1, t_1) = \left(gg_1, \frac{tt_1}{c(g, g_1)} \right).$$

Эта группа называется *расширением Макки* группы G . Если положить $\widehat{T}((g, t)) = tT(g)$, то получится настоящее (не проективное) представление группы G . Если в качестве G взять S_1 , то получится некоторое накрытие, на котором проективное представление будет обычным. В случае $\dim H < \infty$ в [2] строится двулистное накрытие симплектической группы, на которое проективное представление поднимается до обычного. Полученная группа называется *метаплектической*. Для построения метаплектической группы находят функцию $f: G \rightarrow S^1$ такую, что верно равенство

$$c(g_1, g_2)^2 = \frac{f(g_1)f(g_2)}{f(g_1g_2)}.$$

ЛЕММА 6. Пусть подмножество в $G \times S^1$ вида (g, t_i) , $i = 1, 2$ (т.е. имеет двузначную проекцию на G), – подгруппа. Тогда $t_1^2 = t_2^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для $g, h, p \in G$ выполнено $g \cdot h = p$. Тогда из двулистности проекции получаем

$$\begin{aligned} (g, a_1) \cdot (h, b_1) &= (p, c_1), & (g, a_1) \cdot (h, b_2) &= (p, c_2), \\ (g, a_2) \cdot (h, b_1) &= (p, c_2), & (g, a_2) \cdot (h, b_2) &= (p, c_1). \end{aligned}$$

Приравнивая вторые компоненты, выводим

$$\frac{a_1 b_1}{c(g, h)} = c_1, \quad \frac{a_1 b_2}{c(g, h)} = c_2, \quad \frac{a_2 b_1}{c(g, h)} = c_2, \quad \frac{a_2 b_2}{c(g, h)} = c_1.$$

Деля соответствующие равенства друг на друга, а затем приравнивая, получаем

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_1}, \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{b_2}{b_1}, \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{c_2}{c_1}.$$

Отсюда получается утверждение леммы.

Эту лемму можно перенести на случай n -листного накрытия. Из леммы получаем, что если в расширении Макки есть подгруппа с двузначной проекцией, то существует функция $G: f \rightarrow S^1$, для которой при всех $g_1, g_2 \in G_1$

$$c(g_1, g_2)^2 = \frac{f(g_1)f(g_2)}{f(g_1g_2)}.$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 7. Для S_1 существует подгруппа в расширении Макки, обладающая двулистной проекцией, такая, что проективное представление поднимается на эту подгруппу до обычного.

Но двулистное накрытие существует и для больших подгрупп симплектической группы.

ТЕОРЕМА 8. Для подгруппы симплектической группы, состоящей из преобразований g таких, что $g = e^{i \cdot \phi} + \varepsilon = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, где оператор ε ядерный, справедливо равенство

$$c(g_1, g_2)^2 = \frac{f(g_1)f(g_2)}{f(g_1 g_2)},$$

где

$$f(g) = \frac{\det(\alpha \cos \phi - \beta \sin \phi + i(\alpha \sin \phi + \beta \cos \phi))}{|\det(\alpha \cos \phi - \beta \sin \phi + i(\alpha \sin \phi + \beta \cos \phi))|}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала операторы

$$g_1 = e^{i \cdot \phi_1} \cdot (I + \varepsilon_1), \quad g_2 = e^{i \cdot \phi_2} \cdot (I + \varepsilon_2)$$

таковы, что $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ конечномерные. Обозначим через P_1 подпространство P такое, что подпространство $P_1 \times P_1$, обозначаемое как H_1 , содержит образы операторов $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Так как

$$c(g_1, g_2) = c(g_1|_{H_1}, g_2|_{H_1}) \cdot c(g_1|_{(H_1)^\perp}, g_2|_{(H_1)^\perp})$$

и на подгруппе унитарных операторов коцикл равен единице, то

$$c(g_1, g_2) = c(g_1|_{H_1}, g_2|_{H_1}).$$

Положим

$$h(g) = \frac{\det(\alpha + i \cdot \beta)}{|\det(\alpha + i \cdot \beta)|},$$

тогда

$$c(g_1, g_2) = \frac{h(g_1|_{H_1}) \cdot h(g_2|_{H_1})}{h((g_1 \cdot g_2)|_{H_1})}.$$

Сокращая на операторы вида $e^{i \cdot t}$, получаем нужное утверждение. Если на рассматриваемой подгруппе ввести расстояние

$$\rho(g_1, g_2) = |\phi_1 - \phi_2| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|_1,$$

где $|\cdot|_1$ — обычная ядерная норма, то представление $f(\cdot)$ окажется непрерывным (предполагается, что в пространстве операторов представления имеется сильная операторная топология). Таким образом, формула распространяется на операторы g с ядерным ε . Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Предыдущая теорема переносится на подгруппу симплектических преобразований, представимых в виде $g = e^{i \cdot t A} + \varepsilon$, где однопараметрическая подгруппа $e^{i \cdot t A}$ имеет тривиальное пересечение с подгруппой G_1 (состоящей из преобразований, являющихся суммой тождественного и ядерного), а оператор ε ядерный.

ТЕОРЕМА 9. Для группы S_1 не существует подгруппы расширения Макки, имеющей двулистную проекцию, на которую проективное представление поднимается до обычного.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как у группы унитарных операторов бесконечномерного гильбертова пространства нет нетривиальных характеров и сужение нашего проективного представления на эту подгруппу допускает выделение однозначной ветви, то сужение функции f на группу унитарных операторов тождественно равно 1. По аналогичным причинам $f(W) = \pm 1$ для $W \in G_1$, $W = (d^{-1}, 0, 0, d^*)$. Из того, что операторы представления, соответствующие унитарным преобразованиям, сохраняют вакуумный вектор, а операторы, соответствующие растяжениям сохраняют “значение вакуумного вектора в нуле”, следует, что для $g = U \cdot W \cdot V$ выполнено $f(g) = c(U, W)$. Последняя формула для $f(g)$ не согласуется с тем, что $f(W \cdot g) = f(g)$, поскольку последнее равенство не верно, если взять $W_2 \cdot U_1 \cdot W_1 = U \cdot W \cdot V$, где

$$W_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad U_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad W_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} -0.0854 & -0.9963 \\ 0.9963 & -0.0854 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 0.2286 & 0 \\ 0 & 4.3748 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0.3932 & 0.9194 \\ -0.9194 & 0.3932 \end{pmatrix}.$$

Предполагается, что приведенные выше симплектические преобразования задаются указанными матрицами на общем конечномерном подпространстве симплектического пространства, а на ортогональном дополнении к нему они тождественны. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность О.Г. Смолянову за постановку задачи и ее обсуждение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Купш И., Смолянов О. Г. Реализация в пространствах типа Винера–Сигала–Фока унитарных преобразований, порождающих преобразования Боголюбова // Докл. РАН. 2000. Т. 371. № 1. С. 21–25.
- [2] Лион Ж., Вернь М. Представление Вейля, индекс Маслова и тэта-ряды. М.: Мир, 1983.
- [3] Ленг С. $SL_2(R)$. М.: Мир, 1977.
- [4] Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1965.
- [5] Далецкий Ю. Л., Фомин С. В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. М.: Наука, 1983.
- [6] Тверитинов И. Д. Преобразования Боголюбова, соответствующие симплектическим преобразованиям // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 2002. № 4. С. 9–14.
- [7] Ottesen J. T. Infinite-Dimensional Groups and Algebras in Quantum Physics. Berlin: Springer 1995.
- [8] Baez J. C., Segal I. E., Zhou Z. Introduction to Algebraic and Constructive Quantum Field Theory. Princeton: Princeton Univ. Press, 1992.
- [9] Березин Ф. А. Несколько замечаний о представлении соотношений коммутации // УМН. 1969. Т. 24. № 4. С. 65–88.