Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Бикчантаев, Задача Римана на конечнолистной римановой поверхности бесконечного рода, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 1, 25–35

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm810>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 12:49:51

УДК 517.544

ЗАДАЧА РИМАНА НА КОНЕЧНОЛИСТНОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ БЕСКОНЕЧНОГО РОДА

И. А. Бикчантаев

Пусть R есть риманова поверхность функции $u(z)$, определяемой уравнением $u^n = P(z)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $z \in \mathbb{C}$, где $P(z)$ – целая функция с бесконечным числом простых нулей. На R рассматривается краевая задача Римана для произвольного кусочно-гладкого контура Γ . Получены необходимые и достаточные условия разрешимости и в явном виде построено решение этой краевой задачи.

Библиография: 7 названий.

В работах Л. И. Чибриковой, В. Коппельмана и Э. И. Зверовича (см. [1], [2]) было получено в квадратурах решение краевой задачи Римана на компактной римановой поверхности. В работах [3] и [4] на некомпактной римановой поверхности была построена ее нётерова теория и вычислены дефектные числа. На произвольной открытой римановой поверхности эта задача была решена в явном виде лишь в случаях, когда коэффициент задачи равен 1 (см. [3]) или -1 (см. [5]). В этой статье получены условия разрешимости и дано явное решение краевой задачи Римана на некоторой конечнолистной параболической римановой поверхности R в случае произвольного кусочно-гладкого контура Γ . На такой поверхности условие Λ_0 -поведения искомой функции (которое использовалось в статьях [3]–[5]) означает ее ограниченность в окрестности идеальной границы. Решение задачи Римана (в общем случае) выражается через интегралы, ядра которых служат аналоги ядра Коши на некоторой вспомогательной компактной римановой поверхности, а для некоторых контуров Γ – через обычные интегралы типа Коши.

1. Постановка задачи. Пусть R есть риманова поверхность бесконечного рода, на которой существует мероморфная функция z такая, что накрывающая (R, z) комплексной плоскости $\mathbb{C}$ может быть реализована как риманова поверхность функции $u(z)$, определяемой уравнением $u^n = P(z)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $z \in \mathbb{C}$, где $P(z)$ – целая функция с бесконечным числом простых нулей, не имеющая нулей кратности больше 1. У такой накрывающей (R, z) существует циклическая группа преобразований наложения; порядок этой группы равен n ; образующий элемент группы обозначим через j_R .

Пусть Γ – кусочно-гладкая линия на R и $\zeta(q)$ – голоморфная функция в окрестности Γ такая, что $d\zeta$ не имеет нулей на Γ . Тогда ζ является локальной униформизирующей в окрестности любой точки $\tau \in \Gamma$. Если Γ не содержит точек ветвления накрывающей (R, z) , то можно взять $\zeta = z$. Если $\tau \in \Gamma$ есть точка ветвления, то в ее окрестности z и ζ связаны соотношением вида $z - z(\tau) = (\zeta - \zeta(\tau))^n a(\zeta)$, где $a(\zeta)$ – функция, голоморфная в точке $\zeta = \zeta(\tau)$, и $a(\zeta(\tau)) \neq 0$.

Работа выполнена при поддержке фонда НИОКР республики Татарстан, грант № 09-12/99.

Пусть $\alpha: [0, 1] \rightarrow R$ – путь на R . Его *длиной* мы назовем длину плоского пути $z \circ \alpha: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, т.е. $\int_0^1 |d(z \circ \alpha)|$. *Расстоянием* $\rho(p, q)$ между точками p и q на R назовем точную нижнюю грань длин всех путей, соединяющих p и q . Используя локальную однолистность функции $\zeta(q)$, нетрудно показать, что найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что из неравенств $\rho(t_1, t_2) \leq \varepsilon$, $t_1 \neq t_2$ вытекает неравенство $\zeta(t_1) \neq \zeta(t_2)$, $t_1, t_2 \in \Gamma$.

Обозначим через T множество всех узлов контура Γ . На T определим действительнозначную функцию $\lambda = \lambda(\tau)$. По аналогии с [6] введем пространство $H_{\mu, \lambda}(\Gamma, T)$, состоящее из функций на Γ , H_μ -непрерывных вне любой окрестности множества T и ведущих себя вблизи T как весовая функция

$$\rho_\lambda(t) = \prod_{\tau \in T} |\zeta(t) - \zeta(\tau)|^{\lambda(\tau)}.$$

Пространство $H_{\mu, \lambda}(\Gamma, T)$ банахово относительно нормы

$$\|\varphi\|_{\mu, \lambda} = \sup_{t \in \Gamma} |\varphi(t) \rho_{-\lambda}(t)| + \{\rho_{\mu-\lambda} \varphi\}_\mu,$$

где

$$\{\varphi\}_\mu = \sup_{\substack{t_1, t_2 \in \Gamma \\ \rho(t_1, t_2) < \varepsilon \\ t_1 \neq t_2}} \frac{|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|}{|\zeta(t_1) - \zeta(t_2)|^\mu}.$$

Выберем $\delta > 0$ столь малым, чтобы множества

$$\Gamma_\tau = \Gamma \cap \{q \in R : 0 < \rho(q, \tau) \leq \delta\}, \quad \tau \in T,$$

попарно не пересекались и распадались на компоненты $\Gamma_{\tau, i}$, $1 \leq i \leq n_\tau$, $\tau \in T$. Введем класс $H_{\mu, (\lambda)}(\Gamma, T)$ функций $\varphi(t)$, которые H_μ -непрерывны на Γ вне любой окрестности множества T и на каждом Γ_τ , $\tau \in T$, представимы в виде

$$\varphi(t) = p_{\tau, i}(t) + \varphi_\tau(t), \quad t \in \Gamma_{\tau, i},$$

где $p_{\tau, i}$ – многочлен степени меньше, чем $\lambda(\tau)$ (многочлен отрицательной степени условимся считать равным 0), $\varphi_\tau \in H_{\mu, \lambda(\tau)}(\Gamma_\tau, \tau)$. Пространство $H_{\mu, (\lambda)}(\Gamma, T)$ банахово относительно нормы

$$\|\varphi\|_{\mu, (\lambda)} = \sum_{\tau \in T} \left(\sum_{i=1}^{n_\tau} \sup_{\Gamma_\tau} |p_{\tau, i}| + \|\varphi_\tau\|_{H_{\mu, \lambda(\tau)}(\Gamma_\tau, \tau)} \right) + \|\varphi\|_{H_\mu(\Gamma')},$$

где $\Gamma' = \Gamma \cap \{q : \rho(q, T) \geq \delta/2\}$, $\rho(q, T) = \min_{\tau \in T} \rho(q, \tau)$ (ср. с [6]).

Зададим дивизор D , носитель которого лежит в $R \setminus \Gamma$ и функции $G \in H_{\mu, (\mu)}(\Gamma, T)$ и $g \in H_{\mu, \lambda}(\Gamma, T)$, $0 < \mu < 1$, $-1 < \lambda < 0$, причем $G(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$. Рассмотрим краевую задачу Римана в следующей постановке.

ЗАДАЧА. Найти кусочно-мероморфную функцию F на R с линией скачков Γ , кратную дивизору $1/D$ и ограниченную в окрестности идеальной границы поверхности R , предельные значения которой на Γ принадлежат классу $H_{\mu, \lambda}(\Gamma, T)$, $0 < \mu < 1$, $-1 < \lambda < 0$, и удовлетворяют соотношению

$$F^+(t) = G(t)F^-(t) + g(t), \quad t \in \Gamma. \quad (1)$$

2. Установим сначала следующую лемму.

ЛЕММА 1. *Если функция F голоморфна и ограничена в окрестности идеальной границы римановой поверхности R , то в некоторой окрестности идеальной границы выполняется соотношение $F \circ j_R = F$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем число $M > 0$ столь большим, что функция F голоморфна и ограничена на множестве $z^{-1}\{|z| \geq M\} \subset R$. Если $|z_0| > M$ и $P(z_0) \neq 0$, то в окрестности точки z_0 функция $F(q(z))$ ($q(z)$ – поднятие точки $z \in \mathbb{C}$ на накрывающую (R, z)) определяет n голоморфных функций $F_1(z), \dots, F_n(z)$. Положим

$$G_k(z) = \left(\sum_{j=0}^{n-1} F_{j+1}(z) \exp \frac{2\pi i k j}{n} \right)^n, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Функции $G_k(z)$ голоморфны и ограничены в области $\{|z| > M\}$ и обращаются в 0 в нулях функции $P(z)$. Следовательно,

$$G_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2)$$

Так как ранг матрицы $(\exp(2\pi i k j / n))$, $k = 1, \dots, n-1$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, равен $n-1$, то из равенств (2) вытекает, что $F_1(z) = F_2(z) = \dots = F_n(z)$, что и требовалось доказать.

3. Обозначим через E относительно компактное открытое множество на R , обладающее следующими свойствами:

- 1) граница ∂E множества E есть аналитическая жорданова кривая, состоящая из n компонент, гомеоморфных окружности;
- 2) ∂E не содержит точек ветвления накрывающей (R, z) ;
- 3) $j_R(E) = E$;
- 4) $\Gamma \subset E$;
- 5) число точек ветвления накрывающей (R, z) , лежащих в E , кратно числу n ;
- 6) среди множеств, обладающих свойствами 1)–5), E содержит минимальное число точек ветвления накрывающей (R, z) .

Обозначим через α_k , $k = 1, 2, \dots, nm$, точки ветвления накрывающей (R, z) , лежащие в E . В случае $m = 0$ E состоит из n односвязных компонент, каждая из которых однолистно и конформно отображается в $\mathbb{C}$ функцией $z: E \rightarrow \mathbb{C}$. В случае $m > 0$ E есть область рода $h = (n-1)(nm-2)/2$.

4.1. Рассмотрим сначала случай, когда $m > 0$. Через (S, z) обозначим n -листную накрывающую замкнутой комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, определяемую уравнением

$$w^n = \prod_{k=1}^{nm} (z - r_k), \quad (3)$$

где $r_k = z(\alpha_k)$; S есть замкнутая риманова поверхность рода $h = (n-1)(nm-2)/2$. Через E_0 обозначим область на S , являющуюся полным прообразом области $z(E) \subset \mathbb{C}$ относительно отображения $z: S \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$. Ясно, что E_0 содержит все точки ветвления накрывающей (S, z) и существует конформный гомеоморфизм $\alpha: E_0 \rightarrow E$ такой, что $z \circ \alpha = z$. Через j_S обозначим преобразование наложения накрывающей (S, z) , сужение которого на E_0 совпадает с $\alpha^{-1} \circ j_R \circ \alpha$. Очевидно, j_S порождает циклическую группу порядка n ; $S \setminus \overline{E_0}$ состоит из n односвязных компонент $E_1, \dots, E_n$. Отображение $z: E_k \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$,

$k = 1, 2, \dots, n$, однолистно и конформно; обратное к нему отображение обозначим через $\rho_k: z(E_k) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{z(E)} \rightarrow E_k$. Области $E_1, E_2, \dots, E_n$ упорядочим таким образом, чтобы выполнялись соотношения $j_S \circ \rho_k = \rho_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots, n$, $\rho_{n+1} := \rho_1$.

Положим $\Gamma_0 = \alpha^{-1}(\Gamma)$ и определим на Γ_0 ориентацию, индуцированную отображением $\alpha^{-1}: \Gamma \rightarrow \Gamma_0$. Пусть F – решение задачи Римана (1). В силу леммы 1 $F \circ j_R = F$ в $R \setminus E$. Поэтому на S определена однозначная кусочно-мероморфная функция

$$F_0(q) = \begin{cases} F(\alpha(q)), & q \in E_0, \\ F(p), & z(p) = z(q), q \in S \setminus E_0, p \in R \setminus E, \end{cases}$$

с линией скачков Γ_0 . Определим на S дивизор D_0 , полагая

$$\text{ord}_q D_0 = \begin{cases} \text{ord}_{\alpha(q)} D, & q \in E_0, \\ \min_{0 \leq k \leq n-1} \{ \text{ord}_{j_R^k(p)} D \}, & z(p) = z(q), q \in S \setminus E_0, p \in R \setminus E, j_R(p) \neq p, \\ \left[\frac{1}{n} \text{ord}_p D \right], & z(p) = z(q), q \in S \setminus E_0, p \in R \setminus E, j_R(p) = p. \end{cases}$$

Положим $T_0 = \alpha^{-1}(T)$ и доопределим на T_0 функцию λ , полагая $\lambda|_{T_0} = \lambda \circ \alpha|_{T_0}$. Функция F_0 мероморфна в $S \setminus \Gamma_0$, кратна дивизору $1/D_0$, а ее предельные значения на Γ_0 принадлежат классу $H_{\mu, \lambda}(\Gamma_0, T_0)$ и удовлетворяют соотношению вида

$$F_0^+(t) = G(\alpha(t))F_0^-(t) + g(\alpha(t)), \quad t \in \Gamma_0. \quad (4)$$

Кроме того, в $S \setminus E_0$ она удовлетворяет соотношению

$$F_0 \circ j_S = F_0. \quad (5)$$

Функции $G \circ \alpha$ и $g \circ \alpha$ принадлежат классам $H_{\mu, (\mu)}(\Gamma_0, T_0)$ и $H_{\mu, \lambda}(\Gamma_0, T_0)$ соответственно.

4.2. Существует взаимно однозначное соответствие между точками q поверхности S и парами чисел $(z, w) = (z(q), w(z(q)))$, связанными соотношением (3) (см., например, [7, гл. V, § 5]). Точку q обычно отождествляют с парой (z, w) . Тогда точке $j_S^k(q)$ соответствует пара $(z, w \exp(2\pi i k/n))$. Точке ветвления α_j соответствует пара $(r_j, 0)$, $j = 1, 2, \dots, nm$.

Через $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_h, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_h$ обозначим канонические циклы на поверхности S . Дифференциалы

$$\frac{z^j dz}{w^k(z)}, \quad j = 0, 1, \dots, mk - 2, \quad k = 1, 2, \dots, n - 1, \quad (6)$$

образуют базис пространства абелевых дифференциалов первого рода на S . С помощью дифференциалов (6) построим базис φ_j , $j = 1, 2, \dots, h$, этого пространства, нормированный условиями

$$\int_{\mathbf{a}_k} \varphi_j = \delta_{kj}, \quad k, j = 1, 2, \dots, h,$$

где δ_{kj} – символ Кронекера. Базис имеет вид

$$\varphi_j(q) = - \frac{\begin{vmatrix} 0 & \frac{dz}{w} & \frac{z dz}{w} & \dots & \frac{z^{m-2} dz}{w} & \dots & \frac{dz}{w^{n-1}} & \frac{z dz}{w^{n-1}} & \dots & \frac{z^{m(n-1)-2} dz}{w^{n-1}} \\ \delta_{j1} & \int_{a_1} \frac{dz}{w} & \int_{a_1} \frac{z dz}{w} & \dots & \int_{a_1} \frac{z^{m-2} dz}{w} & \dots & \int_{a_1} \frac{dz}{w^{n-1}} & \int_{a_1} \frac{z dz}{w^{n-1}} & \dots & \int_{a_1} \frac{z^{m(n-1)-2} dz}{w^{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{jh} & \int_{a_h} \frac{dz}{w} & \int_{a_h} \frac{z dz}{w} & \dots & \int_{a_h} \frac{z^{m-2} dz}{w} & \dots & \int_{a_h} \frac{dz}{w^{n-1}} & \int_{a_h} \frac{z dz}{w^{n-1}} & \dots & \int_{a_h} \frac{z^{m(n-1)-2} dz}{w^{n-1}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \int_{a_1} \frac{dz}{w} & \int_{a_1} \frac{z dz}{w} & \dots & \int_{a_1} \frac{z^{m-2} dz}{w} & \dots & \int_{a_1} \frac{dz}{w^{n-1}} & \int_{a_1} \frac{z dz}{w^{n-1}} & \dots & \int_{a_1} \frac{z^{m(n-1)-2} dz}{w^{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{a_h} \frac{dz}{w} & \int_{a_h} \frac{z dz}{w} & \dots & \int_{a_h} \frac{z^{m-2} dz}{w} & \dots & \int_{a_h} \frac{dz}{w^{n-1}} & \int_{a_h} \frac{z dz}{w^{n-1}} & \dots & \int_{a_h} \frac{z^{m(n-1)-2} dz}{w^{n-1}} \end{vmatrix}},$$

$$j = 1, \dots, h, \quad q = (z, w) \in S.$$

Комплексно нормированный абелев интеграл третьего рода, служащий разрывным аналогом ядра Коши, имеет вид $\omega_{qq_0}(t) = \omega_q(t) - \omega_{q_0}(t)$, где

$$\omega_q(t) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{(\zeta^{n-1} + \zeta^{n-2} w + \dots + w^{n-1}) d\tau}{n\zeta^{n-1}(\tau - z)} & \frac{d\tau}{\zeta} & \dots & \frac{\tau^{m-2} d\tau}{\zeta} & \dots & \frac{d\tau}{\zeta^{n-1}} & \dots & \frac{\tau^{m(n-1)-2} d\tau}{\zeta^{n-1}} \\ \int_{a_1} \frac{(\zeta^{n-1} + \zeta^{n-2} w + \dots + w^{n-1}) d\tau}{n\zeta^{n-1}(\tau - z)} & \int_{a_1} \frac{d\tau}{\zeta} & \dots & \int_{a_1} \frac{\tau^{m-2} d\tau}{\zeta} & \dots & \int_{a_1} \frac{d\tau}{\zeta^{n-1}} & \dots & \int_{a_1} \frac{\tau^{m(n-1)-2} d\tau}{\zeta^{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{a_h} \frac{(\zeta^{n-1} + \zeta^{n-2} w + \dots + w^{n-1}) d\tau}{n\zeta^{n-1}(\tau - z)} & \int_{a_h} \frac{d\tau}{\zeta} & \dots & \int_{a_h} \frac{\tau^{m-2} d\tau}{\zeta} & \dots & \int_{a_h} \frac{d\tau}{\zeta^{n-1}} & \dots & \int_{a_h} \frac{\tau^{m(n-1)-2} d\tau}{\zeta^{n-1}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \int_{a_1} \frac{d\tau}{\zeta} & \int_{a_1} \frac{\tau d\tau}{\zeta} & \dots & \int_{a_1} \frac{\tau^{m-2} d\tau}{\zeta} & \dots & \int_{a_1} \frac{d\tau}{\zeta^{n-1}} & \int_{a_1} \frac{\tau d\tau}{\zeta^{n-1}} & \dots & \int_{a_1} \frac{\tau^{m(n-1)-2} d\tau}{\zeta^{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{a_h} \frac{d\tau}{\zeta} & \int_{a_h} \frac{\tau d\tau}{\zeta} & \dots & \int_{a_h} \frac{\tau^{m-2} d\tau}{\zeta} & \dots & \int_{a_h} \frac{d\tau}{\zeta^{n-1}} & \int_{a_h} \frac{\tau d\tau}{\zeta^{n-1}} & \dots & \int_{a_h} \frac{\tau^{m(n-1)-2} d\tau}{\zeta^{n-1}} \end{vmatrix}},$$

$$q = (z, w), \quad t = (\tau, \zeta) \in S.$$

4.3. Краевая задача Римана на компактной римановой поверхности наиболее полно была исследована Э.И. Зверовичем [2]. Выпишем решение задачи (4), следуя изложенной в [2] схеме. Положим

$$X(q) = \exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \ln G(\alpha(t)) \omega_{qq_0}(t)\right), \quad q \in S.$$

Нули и бесконечности функции $X(q)$ образуют квазидивизор $(X) = \tau_1^{\varkappa_1} \tau_2^{\varkappa_2} \dots \tau_r^{\varkappa_r}$, где $\tau_k = \alpha^{-1}(t_k)$, $t_k \in T$, – узлы линии Γ_0 , $\varkappa_k$ – числа, определяемые коэффициентом G и выбором ветви функции $\ln G(\alpha(t))$ (см. [2]). Положим $\varkappa = \sum_{k=1}^r [\varkappa_k - \lambda(\tau_k)]$, где $[\cdot]$ означает целую часть числа. Число $\varkappa$, не зависящее от выбора ветви $\ln G$ о α , назовем индексом коэффициента задачи (3) в классе $H_{\mu, \lambda}(\Gamma_0, T_0)$. Положим

$$A = \tau_1^{[\varkappa_1 - \lambda(\tau_1)]} \tau_2^{[\varkappa_2 - \lambda(\tau_2)]} \dots \tau_r^{[\varkappa_r - \lambda(\tau_r)]}, \quad B = (q')^h q_1^{-1} \dots q_h^{-1},$$

где $q' \in S$ – произвольно фиксированная точка, не совпадающая с q_0 , точки $q_1, q_2, \dots, q_h$ образуют решение проблемы обращения Якоби вида

$$\sum_{j=1}^h \int_{q'}^{q_j} \varphi_\nu \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \ln G(\alpha(t)) \varphi_\nu(t) \quad (\text{по модулю периодов}), \quad \nu = 1, 2, \dots, h.$$

Тогда общее решение однородной ($g = 0$) задачи Римана (4) имеет вид

$$f(q) \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \ln G(\alpha(t)) \omega_{qq_0}(t) - \sum_{j=1}^h \left(\int_{q'}^{q_j} \omega_{qq_0} - 2\pi i m_j \int_{q'}^q \varphi_j \right) \right), \quad (7)$$

где в последних двух интегралах путь интегрирования не пересекает канонических сечений $a_1, a_2, \dots, a_h, m_j$ – вполне определенные целые числа, f – произвольная мероморфная функция, кратная дивизору $D_0^{-1}A^{-1}B^{-1}$. У функции (по переменной q) ω_{qq_0} выбрана фиксированная в $S \setminus \bigcup_{k=1}^h a_k$ ветвь, исчезающая в точке q_0 .

Обозначим через l_0 и l'_0 число линейно независимых мероморфных функций и дифференциалов на S , кратных соответственно дивизорам $D_0^{-1}A^{-1}B^{-1}$ и D_0AB . Через P обозначим целый дивизор порядка l'_0 с носителем в $S \setminus \Gamma_0$ такой, что не существует абелевых дифференциалов на S , кратных дивизору D_0ABP и отличных от тождественного 0. Для построения решения неоднородной задачи (4) найдем сначала частное решение этой задачи в классе функций, кратных дивизору $D_0^{-1}P^{-1}$. Такая задача безусловно разрешима в силу выбора дивизора P . Ее частным решением является функция вида (см. [2])

$$\frac{X_0(q)}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{g(\alpha(t))}{X_0^+(t)} A_1(t, q), \quad (8)$$

где X_0 – функция вида (7) при $f = 1$, $A_1(t, q)$ – мероморфный аналог ядра Коши на S с характеристическим дивизором Δ_1 , который получается делением дивизора D_0ABP на некоторый целый дивизор. Функция (8) будет решением задачи (4) в том и только том случае, если g удовлетворяет l'_0 условиям, обеспечивающим кратность функции (8) дивизору D^{-1} . Эти условия равносильны условиям разрешимости задачи (4) и имеют вид

$$\int_{\Gamma_0} g \circ \alpha \frac{\psi_j}{X_0} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, l'_0, \quad (9)$$

где $\psi_j, j = 1, 2, \dots, l'_0$, – базис пространства абелевых дифференциалов на S , кратных дивизору D_0AB .

При выполнении условия (9) общее решение задачи (4) имеет вид

$$F_0(q) = f(q) \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \ln G(\alpha(t)) \omega_{qq_0}(t) - \sum_{j=1}^h \left(\int_{q'}^{q_j} \omega_{qq_0} - 2\pi i m_j \int_{q'}^q \varphi_j \right) \right) + \frac{X_0(q)}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{g(\alpha(t))}{X_0^+(t)} A_1(t, q), \quad q \in S. \quad (10)$$

Для того чтобы эта функция определяла решение задачи (1), необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию (5).

Обозначим через $f_1, f_2, \dots, f_{l_0}$ базис пространства мероморфных функций на S , кратных дивизору $D_0^{-1}A^{-1}B^{-1}$. Тогда функция F_0 может быть записана в виде

$$F_0(q) = X_0(q) \sum_{k=1}^{l_0} c_k f_k(q) + \frac{X_0(q)}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{g(\alpha(t))}{X_0^+(t)} A_1(t, q), \quad (11)$$

где c_k – произвольные комплексные числа.

Пусть s – фиксированная точка в $S \setminus E_0$ такая, что $z(s) \neq \infty$ и функции $X_0(q)$, $f_k(q)$, $A_1(t, q)$ голоморфны по q в точках $j_S^\nu(s)$, $\nu = 0, 1, \dots, n-1$. Разложим функции $(X_0 f_k) \circ j_S^\nu$ в ряд Тейлора по степеням $z(q) - z(s)$:

$$X_0(j_S^\nu(q))f_k(j_S^\nu(q)) = \sum_{i=0}^{\infty} b_{ik\nu}(z(q) - z(s))^i, \quad k = 1, 2, \dots, l_0, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1.$$

Аналогично в окрестности точки $q = s$ имеем

$$\frac{X_0(j_S^\nu(q))A_1(t, j_S^\nu(q))}{2\pi i X_0^+(t)} = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_{i\nu}(t)(z(q) - z(s))^i.$$

В силу этих разложений равенство (5) равносильно следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^{l_0} (b_{ik\nu} - b_{ik0})c_k = - \int_{\Gamma_0} g(\alpha(t))(\gamma_{i\nu}(t) - \gamma_{i0}(t)), \quad \nu = 1, 2, \dots, n-1, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

Полагая

$$U_i = \begin{pmatrix} b_{i11} & b_{i12} & \dots & b_{i1l_0} \\ b_{i21} & b_{i22} & \dots & b_{i2l_0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i,n-1,1} & b_{i,n-1,2} & \dots & b_{i,n-1,l_0} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ \vdots \end{pmatrix},$$

$$\gamma_i = -((\gamma_{i1} - \gamma_{i0}) \circ \alpha^{-1}, (\gamma_{i2} - \gamma_{i0}) \circ \alpha^{-1}, \dots, (\gamma_{i,n-1} - \gamma_{i0}) \circ \alpha^{-1}),$$

$$\beta = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots)^t, \quad c = (c_1, c_2, \dots, c_{l_0})^t,$$

перепишем систему (12) в виде

$$Uc = \int_{\Gamma} g\beta. \quad (13)$$

Обозначим через r ранг матрицы U . Пусть V – невырожденная квадратная матрица порядка r , составленная из элементов матрицы U , стоящих на пересечении строк с номерами $i_1, i_2, \dots, i_r$ ($i_1 < i_2 < \dots < i_r$) и столбцов с номерами $k_1, k_2, \dots, k_r$ ($k_1 < k_2 < \dots < k_r$), V_i – квадратная матрица порядка $r+1$, состоящая из элементов расширенной матрицы $(U, \int_{\Gamma} g\beta)$, стоящих на пересечении строк с номерами $i_1, i_2, \dots, i_r, i$ и столбцов с номерами $k_1, k_2, \dots, k_r, l_0 + 1$. Тогда $\det V_i = \int_{\Gamma} g\lambda_i$, где

$$\lambda_i = \sum_{n=1}^r V_{i,i_n} \beta_{i_n} + V_{i,i} \beta_i,$$

$\beta_i, i \in \mathbb{N}$, $-i$ -я компонента вектора β , $V_{i,j}$ – алгебраическое дополнение элемента $\int_{\Gamma} g\beta_j$ матрицы V_i , $V_{i,i} = \det V$. Условия разрешимости системы (13) имеют вид

$$\int_{\Gamma} g\lambda_i = 0, \quad i \in \mathbb{N}, \quad i \neq i_1, i_2, \dots, i_r. \quad (14)$$

При выполнении условий (14) числа $c_{k_1}, c_{k_2}, \dots, c_{k_r}$ выражаются линейно через $\int_{\Gamma} g \beta_i$, $i = i_1, i_2, \dots, i_r$, т.е. являются ограниченными линейными функционалами в пространстве $H_{\mu, \lambda}(\Gamma, T)$, а остальные числа c_k остаются произвольными.

Условия (9) перепишем в виде

$$\int_{\Gamma} g \frac{\psi_j \circ \alpha^{-1}}{X_0 \circ \alpha^{-1}} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, l'_0. \quad (15)$$

Если функция g удовлетворяет условиям (14) и (15), то функция F_0 , определяемая соотношением (10) или (11), определяет решение F задачи (1) по формуле

$$F(q) = \begin{cases} F_0(\alpha^{-1}(q)), & q \in E, \\ F_0(p), & z(p) = z(q), \quad q \in R \setminus E, \quad p \in S \setminus E_0. \end{cases} \quad (16)$$

Полученные результаты сформулируем в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $m > 0$. Тогда для разрешимости задачи Римана (1) необходимо и достаточно выполнения условий (14) и (15). При их выполнении решение задачи определяется равенствами (11) и (16), причем в равенстве (11) r из чисел c_k являются линейными ограниченными функционалами от $g \in H_{\mu, \lambda}(\Gamma, T)$, а остальные произвольны. Однородная ($g = 0$) задача Римана (1) имеет $l_0 - r$ линейно независимых решений.

5. Рассмотрим теперь случай, когда $m = 0$, т.е. E состоит из n компонент O_k , $k = 1, 2, \dots, n$, гомеоморфных открытому кругу, S есть дизъюнктивное объединение n экземпляров замкнутой комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Положим $\Gamma_k = \Gamma \cap O_k$, $\Gamma_{0k} = z(\Gamma_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Тогда задача (3) распадается на n задач Римана на $\overline{\mathbb{C}}$ с краевыми условиями на контурах Γ_{0k} . Отображение $z: O_k \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ однолистно и конформно. Обратное к нему отображение обозначим через ρ_k . Краевые условия соответствующих задач будут иметь вид

$$F_{0k}^+(t) = G(\rho_k(t))F_{0k}^-(t) + g(\rho_k(t)), \quad t \in \Gamma_{0k}, \quad (17)$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

Решение задачи (17) ищется в классе кусочно-мероморфных функций, кратных дивизору $1/D_{0k}$, где

$$\text{ord}_{z(q)} D_{0k} = \begin{cases} \text{ord}_q D, & q \in O_k, \\ \min_{0 \leq \nu \leq n-1} \{\text{ord}_{j_R^\nu(q)} D\}, & q \in R \setminus E, \quad j_R(q) \neq q, \\ \left[\frac{1}{n} \text{ord}_q D \right], & q \in R \setminus E, \quad j_R(q) = q. \end{cases}$$

На Γ_{0k} решение задачи (17) должно принадлежать классу $H_{\mu, \lambda}(\Gamma_{0k}, T_{0k})$, где $T_{0k} = z(T \cap O_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Предположим для определенности, что

$$T \cap O_k = \{t_{k1}, t_{k2}, \dots, t_{km_k}\}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Для того чтобы функции F_{0k} определяли решение задачи (1), они должны удовлетворять условиям

$$F_{0k}(z) = F_{0n}(z), \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus z(E), \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (18)$$

Положим

$$X_k(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{0k}} \frac{\ln G(\rho_k(\tau)) d\tau}{\tau - z}\right), \quad \varkappa_{ki} = \text{ord}_{z(t_{ki})} X_k, \quad i = 1, \dots, m_k,$$

$$Y_k = \prod_{i=1}^{m_k} (z - z(t_{ki}))^{[\varkappa_{ki} - \lambda(t_{ki})]}, \quad X_{0k} = \frac{X_k}{Y_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Функция X_{0k} удовлетворяет однородному краевому условию (17), а ее нули и бесконечности в $\mathbb{C}$ образуют квазидивизор

$$\prod_{i=1}^{m_k} (z(t_{ki}))^{\varkappa_{ki} - [\varkappa_{ki} - \lambda(t_{ki})]}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Общее решение однородной задачи (17) имеет вид $X_{0k} P_k$, где P_k – произвольный многочлен степени не выше, чем $\varkappa^{(k)} = -\text{ord}_{\infty} Y_k$ (многочлен отрицательной степени считаем равным 0).

Решение неоднородной задачи (17) при $\varkappa^{(k)} \geq -1$ существует при любой функции $g \in H_{\mu, \lambda}(\Gamma, T)$ и может быть записано в виде

$$F_{0k}(z) = \frac{X_{0k}(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma_{0k}} \frac{g(\rho_k(\tau)) d\tau}{X_{0k}^+(\tau)(\tau - z)} + X_{0k}(z) P_k(z), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (19)$$

При $\varkappa^{(k)} < -1$ для разрешимости задачи (17) необходимо и достаточно, чтобы функция g удовлетворяла условиям

$$\int_{\Gamma_{0k}} \frac{\tau^i g(\rho_k(\tau)) d\tau}{X_{0k}^+(\tau)} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, -\varkappa^{(k)} - 2. \quad (20)$$

При выполнении условий (20) задача (17) имеет единственное решение, определяемое формулой (19).

Для того чтобы функции (19) определяли решение задачи (1), они должны удовлетворять соотношениям (18). Чтобы учесть эти условия, разложим функции F_{0k} в ряд Тейлора в окрестности некоторой точки $a \in \mathbb{C} \setminus z(E)$, в которой функции X_{0k} голоморфны.

Функцию $X_{0k}(z)/(2\pi i X_{0k}^+(\tau)(\tau - z))$ разложим в ряд Тейлора в окрестности точки a :

$$\frac{X_{0k}(z)}{2\pi i X_{0k}^+(\tau)(\tau - z)} = \sum_{j=0}^{\infty} c_{kj}(\tau)(z - a)^j.$$

Полагая $P_k(z) = \sum_{m=0}^{\varkappa^{(k)}} a_{km} z^m$ (если верхний индекс суммирования меньше нижнего, то сумму будем считать пустой и $P_k = 0$) и разлагая функции $X_{0k}(z) z^m$ в ряд Тейлора, получим

$$X_{0k}(z) z^m = \sum_{j=0}^{\infty} a_{kj m} (z - a)^j.$$

Сравнивая коэффициенты тейлоровских разложений функций $F_{01}, F_{02}, \dots, F_{0n}$, получим соотношения, эквивалентные равенствам (18):

$$\sum_{m=0}^{\varkappa^{(k)}} a_{kj m} a_{k m} - \sum_{m=0}^{\varkappa^{(n)}} a_{nj m} a_{n m} = - \int_{\Gamma_{0k}} g(\rho_k(\tau)) c_{kj}(\tau) d\tau + \int_{\Gamma_{0n}} g(\rho_n(\tau)) c_{nj}(\tau) d\tau, \quad (21)$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Положим

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j0} & \dots & a_{1j\varkappa^{(1)}} & \dots & 0 & \dots & 0 & -a_{nj0} & \dots & -a_{nj\varkappa^{(n)}} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & -a_{nj0} & \dots & -a_{nj\varkappa^{(n)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a_{n-1,j0} & \dots & a_{n-1,j\varkappa^{(n-1)}} & -a_{nj0} & \dots & -a_{nj\varkappa^{(n)}} \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \beta_{kj}(t) = \begin{cases} -c_{kj}(z(t))dz(t), & t \in \Gamma_k, \\ c_{nj}(z(t))dz(t), & t \in \Gamma_n, \\ 0, & t \in \Gamma \setminus (\Gamma_k \cup \Gamma_n), \end{cases} \quad k = 1, \dots, n-1,$$

$$\beta(t) = (\beta_{10}(t), \dots, \beta_{n-1,0}(t), \beta_{11}(t), \dots, \beta_{n-1,1}(t), \beta_{12}(t), \dots, \beta_{n-1,2}(t), \dots)^t,$$

$$a = (a_{10}, a_{11}, \dots, a_{1,\varkappa^{(1)}}, a_{20}, a_{21}, \dots, a_{2,\varkappa^{(2)}}, \dots, a_{n0}, a_{n1}, \dots, a_{n,\varkappa^{(n)}})^t$$

(в случае $\varkappa^{(\nu)} < 0$ в выражениях для матрицы A_j и вектора a отсутствуют элементы $a_{\nu j i}$ и $a_{\nu i}$ соответственно). Тогда система (21) запишется в виде

$$Aa = \int_{\Gamma} g\beta. \quad (22)$$

Обозначим через r ранг матрицы A . Пусть B – невырожденная квадратная матрица порядка r , составленная из элементов матрицы A , стоящих на пересечении строк с номерами $j_1, j_2, \dots, j_r$ ($j_1 < j_2 < \dots < j_r$) и столбцов с номерами $k_1, k_2, \dots, k_r$ ($k_1 < k_2 < \dots < k_r$), B_j – квадратная матрица порядка $r+1$, состоящая из элементов расширенной матрицы $(A, \int_{\Gamma} g\beta)$, стоящих на пересечении строк с номерами $j_1, j_2, \dots, j_r, j$ и столбцов с номерами $k_1, k_2, \dots, k_r, \varkappa_+^{(1)} + \varkappa_+^{(2)} + \dots + \varkappa_+^{(n)} + n + 1$, где $\varkappa_+^{(k)} := \max\{-1, \varkappa^{(k)}\}$. Тогда

$$\det B_j = \int_{\Gamma} g\alpha_j,$$

где

$$\alpha_j = \sum_{n=1}^r B_{j,j_n} \beta_{j_n} + B_{j,j} \beta_j,$$

$\beta_i, i \in \mathbb{N}$, – i -я компонента вектора β , $B_{j,k}$ – алгебраическое дополнение элемента $\int_{\Gamma} g\beta_k$ матрицы B_j ; очевидно, $B_{j,j} = \det B \neq 0$. Если j принимает одно из значений $j_1, j_2, \dots, j_r$, то $\beta_j = 0$. Условия разрешимости системы (21) (или (22)) имеют вид

$$\int_{\Gamma} g\alpha_j = 0, \quad j \in \mathbb{N}, \quad j \neq j_1, j_2, \dots, j_r. \quad (23)$$

Условия (20) перепишем в виде

$$\int_{\Gamma_k} \frac{(z(t))^i g(t) dz(t)}{X_{0k}^+(z(t))} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, -\kappa^{(k)} - 2, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (24)$$

Совокупность условий (23) и (24) необходима и достаточна для разрешимости задачи (1). При их выполнении общее решение задачи (1) определяется равенством

$$F(q) = \begin{cases} F_{01}(z(q)) = F_{02}(z(q)) = \dots = F_{0n}(z(q)), & q \in R \setminus E, \\ F_{0k}(z(q)), & q \in O_k, \quad k = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (25)$$

где F_{0k} определена формулой (19).

Таким образом, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $m = 0$. Тогда для разрешимости задачи Римана (1) необходимо и достаточно выполнения условий (23) и (24). При их выполнении общее решение задачи (1) определяется формулами (19) и (25), где коэффициенты a_{kn} многочленов P_k удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений (21). Число линейно независимых решений однородной задачи Римана (1) равно $\kappa_+^{(1)} + \kappa_+^{(2)} + \dots + \kappa_+^{(n)} - r + n$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Чибрикова Л. И. Граничные задачи теории аналитических функций на римановых поверхностях // Итоги науки и техн. Матем. анализ. Т. 18. М.: ВИНТИ, 1980. С. 3–66.
- [2] Зверович Э. И. Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровских классах на римановых поверхностях // УМН. 1971. Т. 26. № 1. С. 113–179.
- [3] Бикчантаев И. А. Аналоги ядра Коши на римановой поверхности и некоторые их приложения // Матем. сб. 1980. Т. 112. № 2. С. 256–282.
- [4] Бикчантаев И. А. О числе решений краевой задачи Римана на некомпактной римановой поверхности // Изв. вузов. Матем. 1984. № 9. С. 10–13.
- [5] Бикчантаев И. А. Обращение сингулярных интегралов на кусочно-гладком контуре на римановой поверхности // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 5. С. 882–888.
- [6] Солдатов А. П. Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. М.: Высшая школа, 1990.
- [7] Неванлинна Р. Униформизация. М.: ИЛ, 1955.

Казанский государственный университет

Поступило
12.12.1997