Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Бородин, А. В. Косточка, А. Распо, Э. Сопена, Ациклическая k -сильная раскраска карт на поверхностях, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 1, 36–45

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm811>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 18:19:45

УДК 519.7

АЦИКЛИЧЕСКАЯ k -СИЛЬНАЯ РАСКРАСКА КАРТ НА ПОВЕРХНОСТЯХ

О. В. Бородин, А. В. Косточка, А. Распо, Э. Сопена

Раскраска вершин графа называется ациклической, если концы каждого ребра окрашены в разные цвета, и нет двухцветных циклов. Пусть каждая грань ранга не более k , где $k \geq 4$, карты на поверхности S^N заменена на клику с тем же множеством вершин. Тогда полученный псевдограф можно ациклически раскрасить в число цветов, линейно зависящее от N и от k . Ранее такие результаты были известны лишь при $1 \leq N \leq 2$ и $3 \leq k \leq 4$.

Библиография: 18 названий.

1. Введение. Задачи о раскраске графов, вложенных в поверхности, занимают в теории графов видное место. К ним относится, в частности, известная задача о четырех раскрах.

Обозначим через $V(G)$ множество вершин графа G , а через $E(G)$ – множество его ребер. (Правильная) k -раскраска графа G есть функция $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ такая, что $f(x) \neq f(y)$ для любых смежных вершин x и y из G .

Вершинная раскраска графа называется k -цикловой или k -сильной раскраской, если каждые две вершины на границе одной и той же грани ранга не более k имеют разные цвета. (Ниже мы используем оба термина.) Данный вид раскраски равносильна правильной раскраске псевдографа, получающегося заменой каждой грани ранга не более k на клику с тем же множеством вершин. Пусть $\chi_k(S^N)$ есть минимальное число цветов, достаточное для k -цикловой раскраски графа G , и пусть $\chi_k(S^N)$ есть минимальное число цветов, достаточное для k -цикловой раскраски каждой карты на поверхности S^N с эйлеровой характеристикой N . (Иногда мы будем опускать аргументы.)

Работа первого автора частично поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97-01-01075) и Межвузовской научной программы “Университеты России – фундаментальные исследования” (код проекта 1792). Работа второго автора частично поддержана грантами ИНТАС № 97-1001 и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00581). Работа третьего и четвертого авторов частично поддержана Совместным научным грантом НАТО № 97-1519.

Случай $k = 3$ соответствует обычной правильной раскраске; теорема о четырех красках Апделя и Хакена [1] и теорема Хивуда [2] дают точные верхние раскраски для плоскости и, соответственно, всех остальных поверхностей.

Случай $k = 4$ допускает несколько формулировок, в частности, в терминах совместной вершинно-граневой раскраски и раскраски вершин так называемых 1-вложимых графов. Для плоскости Бородин [3] доказал, подтверждая гипотезу Рингеля [4], точную оценку $\chi_4 \leq 6$, для проективной плоскости Шумахер [5] доказал точную оценку $\chi_4 \leq 7$, а для остальных поверхностей Рингель [6] доказал, что $\chi_4(S^N) \leq 2H(N)/\sqrt{3}$, где $H(N) = [(7 + \sqrt{49 - 24N})/2] -$ число Хивуда.

Оре и Пламмер [7] доказали, что при любом $k \geq 3$ каждый плоский граф G имеет k -цикловую $2k$ -раскраску, а Бородин, Сандерс и Жао [8] недавно усилили эту оценку до $\chi_k(G) \leq 9k/5$ при любом $k \geq 3$.

Вершинная раскраска графа называется *ациклической*, если она правильная, т.е. концы каждого ребра окрашены в разные цвета и нет двухцветных циклов. Заметим, что петля порождает одноцветное ребро, а два кратных ребра – двухцветный цикл. Будем считать вершинную раскраску карты ациклической, если концы каждого ребра-непетли e имеют разные цвета и нет двухцветных циклов длины больше 2. Бородин [9] доказал, что все плоские графы ациклически 5-раскрашиваемы. Эта оценка не улучшаема. Альбертсон и Берман [10] доказали, что каждый граф, вложимый в ориентированную поверхность S^N , где $N < 0$, ациклически $(8 - 2N)$ -раскрашиваем. Алон, Мохар и Сандерс [11] доказали, используя ациклическую 5-раскрашиваемость плоских графов, что каждый граф на проективной плоскости ациклически 7-раскрашиваем, и показали, что эта оценка точна. Кроме того, они доказали, что каждый граф, вложимый в произвольную поверхность S^N , ациклически $\mathcal{O}(N^{4/7})$ -раскрашиваем и что эта оценка может отличаться от точной не более чем в $(\log N)^{1/7}$ раз.

Ациклическая раскраска имеет ряд приложений к другим задачам раскраски; определения используемых терминов см. в [12]–[16]. Пусть $a(G) \leq a$. Тогда граф G имеет звездное хроматическое число не более $a2^{a-1}$ (Грюнбаум [13]) и ориентированное хроматическое число также не более $a2^{a-1}$ (Распо и Сопена [16]); для любой m -раскраски ребер графа G его можно гомоморфно отобразить на граф с не более чем am^{a-1} вершинами (Алон и Маршал [12]); для любой m -раскраски ребер и любой n -раскраски дуг смешанного графа G его можно гомоморфно отобразить на граф с не более чем $a(2n + m)^{a-1}$ вершинами (Нешетрил и Распо [15]).

Кроме того, Хакими, Митчем и Шмейхель [14, с. 38–39] доказали, что $E(G)$ можно разбить на $a(G)$ звездных лесов (компоненты связности – звезды). Как непосредственное следствие из [9] это подтверждает предположение Алгора и Алона [17] о разложимости ребер любого плоского графа на пять звездных лесов.

В данной статье рассматривается раскраска, являющаяся и ациклической, и k -цикловой. А именно, ациклически раскрашивается псевдограф, получающийся заменой каждой грани ранга не более k карты на клику с тем же множеством вершин. То есть подразумевается, что каждая грань ранга не более k имеет все “невидимые диагонали”.

При $k = 3$ такая раскраска совпадает с ациклической раскраской.

Основным результатом работы является

ТЕОРЕМА 1. *Каждая карта на поверхности S^N допускает ациклическую k -сильную раскраску в $c_N k + d_N$ цветов для любых $k \geq 4$ и $N \leq 0$, где $c_N = \max\{999, 117 - 471N\}$ и $d_N = 39 - 156N$.*

Мы намеренно ограничиваемся простейшей схемой доказательства; более сложные рассуждения позволяют уменьшить c_N и d_N .

СЛЕДСТВИЕ 1. *Каждая карта на плоскости ($N = 2$) и проективной плоскости ($N = 1$) допускает ациклическую k -сильную раскраску в $c_0 k + d_0$ цветов при любом $k \geq 4$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, всякая карта на плоскости или проективной плоскости является соответственно картой на торе и бутылке Клейна.

В [18] мы доказали, что каждый проективно-плоский граф (а значит, и каждый плоский) имеет ациклическую 4-сильную 20-раскраску, т.е. что каждый граф, 1-вложимый в проективную плоскость, ациклически 20-раскрашиваем. Таким образом, теорема 1 и следствие 1 дополняют результаты работ [9] ($N = 2$, $k = 3$), [11] ($N \leq 1$, $k = 3$) и [18] ($1 \leq N \leq 2$, $k = 4$).

2. Доказательство теоремы 1. Будем обозначать множества вершин, ребер и граней рассматриваемого графа через V , E и F соответственно. Ранг $s(f)$ грани f есть число ребер в ее границе $\partial(f)$ с учетом кратности. Например, мост встречается в границе некоторой грани дважды. Для упрощения рассуждений мы ограничиваемся случаем, когда граница $\partial(f)$ связна для любой грани $f \in F$. Степень вершины v , т.е. число инцидентных ребер (петли учитываются дважды), обозначается через $d(v)$. Под $\geq k$ -вершиной мы понимаем вершину степени не менее k , и т.п.

При заданных S^N и k пусть P''' – контрпример с наименьшим числом вершин. Ациклическую k -сильную раскраску в $c_N k + d_N$ цветов, которую мы ищем, будем для краткости называть *хорошей*.

Удаляем из P''' каждую такую петлю e , которая образует 1-грань. При этом ранг другой грани, инцидентной e , уменьшается на 1. Аналогично, для каждой 2-грани $f = e_1 e_2$ в P''' удалим одно из граничных ребер, пусть e_1 . При этом возникает грань того же ранга, что имела грань, инцидентная e_1 и отличная от f .

Если бы полученный псевдограф P'' имел хорошую раскраску, то восстановление петель и повторных ребер не испортило бы ее. Таким образом, P'' также минимальный контрпример.

Стриангулировав все $> k$ -грани в P'' добавлением диагоналей, получаем еще один контрпример P' с наименьшим числом вершин. (Хорошая раскраска для P' была бы хорошей и для P'' .)

Удалим из P' общее ребро двух смежных 3-граней, если таковые найдутся. Повторяем эту операцию, пока не получится контрпример P , не содержащий смежных 3-граней. Фактически мы доказали следующее утверждение.

ЛЕММА 1. *Если f есть грань в P , то $3 \leq s(f) \leq k$; никакие две 3-грани в P не смежны.*

Нестрого говоря, лишь добавление нетривиальных смежностей, представленных “видимыми” ребрами и “невидимыми диагоналями”, может испортить хорошую раскраску. Поэтому мы должны будем заботиться о том, чтобы не терять смежностей при преобразовании псевдографа P в меньший псевдограф, уже допускающий хорошую раскраску.

В дальнейшем нужно иметь в виду следующие два замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Стягивание ребра $e = vz$ в вершину $v * z$ уменьшает ранг каждой грани f в P на 0, 1 или 2 в зависимости от того, сколько раз e встречается в $\partial(f)$.

Полученная карта R хорошо раскрашиваема ввиду минимальности P . Перенесем ее раскраску на P , раскрасив z в цвет вершины $v * z$, а v оставив неокрашенной. Тогда для получения хорошей раскраски карты P остается найти такой цвет для v , чтобы не возникло одноцветных ребер, не являющихся петлями, и двухцветных циклов, не являющихся 2-циклами.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть вершина v инцидентна ребрам $e_i = vz_i$, где $0 \leq i \leq d(v) \leq k - 1$, в циклическом порядке. (Конечно, вершины z_i не обязательно различны.) Разобьем каждую нетреугольную грань $f_i = \dots z_i v z_{i+1}$, где индексы берутся по модулю $d(v)$, на треугольник $z_i v z_{i+1}$ и грань f'_i . Тогда $s(f'_i) < s(f_i)$. Удалим v и все e_i ; тогда возникает грань ранга $d(v) \leq k$, так что полученная карта имеет хорошую раскраску. При этом все различные вершины z_i раскрашены в разные цвета. Если мы выберем для v цвет α , не встречающийся на вершинах из $\bigcup_{0 \leq i \leq k-1} \partial(f_i)$, то единственной причиной неполучения хорошей раскраски для P является двухцветный α, β -цикл (т.е. состоящий из вершин, попеременно окрашенных в α и β), проходящий через v и такую вершину u , что u окрашена в β и $u \in \partial(f_i) \setminus \{z_i, z_{i+1}\}$ для некоторого f_i .

ЛЕММА 2. *Если $v \in V(P)$, то $d(v) \geq 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $d(v) = 1$, то стянем ребро vz , перенесем хорошую раскраску полученного псевдографа на P , и раскрасим v отлично от тех не более чем k вершин, что принадлежат общим с v граням.

ЛЕММА 3. *Каждая грань в P инцидентна не менее чем трем вершинам (не обязательно разным) степени не менее трех.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если грань f в P содержит в своей границе $\partial(f)$ ровно две вершины u, w (не обязательно разные) степени больше двух, то удалим более длинную из двух цепей, составляющих $\partial(f)$. Возникает грань f' ранга $\leq k$. Хорошую раскраску

полученного псевдографа легко достроить до хорошей раскраски псевдографа P , поскольку вершины на $\partial(f')$ раскрашены попарно различно.

Случай, когда на $\partial(f)$ имеется лишь одна вершина степени больше двух, легко сводится к предыдущему. Если же все вершины на $\partial(f)$ имеют степень 2, то P является циклом; противоречие.

Если каждая грань в P гомеоморфна открытому 2-диску, то формула Эйлера для P утверждает, что $|V| - |E| + |F| = N$; в противном случае $|V| - |E| + |F| \geq N$.

Используя очевидные соотношения $2|E| = \sum_{v \in V} d(v) = \sum_{f \in F} s(f)$, это можно переписать как

$$\sum_{v \in V} (d(v) - 4) + \sum_{f \in F} (s(f) - 4) \leq -4N \quad (1)$$

или

$$-2n_2 + \sum_{v \in V_{3+}} (d(v) - 4) + \sum_{f \in F} (s(f) - 4) < -4N + 1, \quad (2)$$

где n_i есть число i -вершин в P , а V_{i+} — множество $\geq i$ -вершин в P .

Обозначим через $n_2(f)$ число 2-вершин на границе грани f с учетом кратностей. *Редуцированный ранг* $s^*(f)$ грани f определим как $s(f) - n_2(f)$. По-существу, $s^*(f)$ есть число > 2 -вершин в $\partial(f)$ с учетом кратностей. Тогда (2) можно записать в виде

$$\sum_{v \in V_{3+}} (d(v) - 4) + \sum_{f \in F} (s^*(f) - 4) < -4N + 1. \quad (3)$$

По лемме 3 $s^*(f) \geq 3$ для всех $f \in F$. Пусть $f_i^*(v)$ есть число i^* -граней при v , т.е. имеющих $s^*(f) = i$. Тогда

$$\sum_{v \in V_{3+}} \left(d(v) - 4 - \frac{f_3^*(v)}{3} \right) + \sum_{f \in F_{4+}^*} (s^*(f) - 4) < -4N + 1, \quad (4)$$

где F_{i+}^* — множество всех $\geq i^*$ -граней в P , или

$$\sum_{v \in V_{3+}} \left(d(v) - 4 - \frac{f_3^*(v)}{3} + \frac{4N - 1}{n^*} \right) + \sum_{f \in F_{4+}^*} (s^*(f) - 4) < 0, \quad (5)$$

где $n^* = |V_{3+}| = |V| - n_2$.

Положим $\text{ch}(v) = d(v) - 4 - f_3^*(v)/3 + (4N - 1)/n^*$, если $v \in V_{3+}$; $\text{ch}(f) = 0$, если f есть 3^* -грань; и $\text{ch}(f) = s^*(f) - 4$, если $f \in F_{4+}^*$. Тогда (5) дает

$$\sum_{v \in V_{3+}} \text{ch}(v) + \sum_{f \in F} \text{ch}(f) < 0. \quad (6)$$

Оставшаяся часть доказательства состоит в таком перераспределении *заряда* $\text{ch}(x)$ на $x \in V_{3+} \cup F$, сохраняющем сумму зарядов, чтобы *новый заряд* $\text{ch}^*(x)$, был неотрицательным для любого $x \in V_{3+} \cup F$. Противоречие с (6) завершит доказательство.

Сначала докажем следующий факт.

ЛЕММА 4. *Имеет место равенство $n^* > 39(-4N + 1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулу Эйлера (2) для карты P^* , получаемой из P стягиванием каждой цепи $uv_1 \dots v_s w$, где $d(u) \geq 3$, $d(v_1) = \dots = d(v_s) = 2$, $d(w) \geq 3$, в ребро uw , нетрудно переписать в виде

$$\sum_{v \in V(P^*)} (d_{P^*}(v) - 6) + \sum_{f \in F(P^*)} (2s_{P^*}(f) - 6) \leq -6N,$$

откуда $\sum_{v \in V(P^*)} (d_{P^*}(v) - 6) \leq -6N$ или $|E(P^*)| \leq 3n^* - 3N$.

По лемме 1 $n \leq n^* + k|E(P^*)|$.

Но $n > c_N k + d_N$, так как иначе P имеет тривиальную хорошую раскраску (все вершины получают разные цвета), и поэтому

$$\begin{aligned} n^*(1 + 3k) - 3kN &> c_N k + d_N \geq (117 - 471N)k + 39 - 156N \\ &= 39(-4N + 1)(1 + 3k) - 3kN, \end{aligned}$$

что и требовалось (ср. крайние левое и правое выражения).

ЛЕММА 5. *Если $d(v) \geq 7$, то $\text{ch}(v) \geq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле,

$$\text{ch}(v) \geq d(v) - 4 - \frac{f_3^*(v)}{3} + \frac{4N - 1}{n^*} \geq d(v) - 4 - \frac{d(v)}{3} + \frac{4N - 1}{n^*} \geq \frac{2}{3} + \frac{4N - 1}{n^*},$$

и применяем лемму 4.

Если $v \in V$ и $\text{ch}(v) < 0$, то v назовем *бедной*. Положим $\xi = (-4N + 1)/n^*$ и $\varepsilon = \frac{1}{39}$. По леммам 4 и 5 $\xi \leq \varepsilon$ и каждая бедная вершина v имеет $3 \leq d(v) \leq 6$.

Правила перераспределения заряда таковы.

П1. Каждая ≥ 14 -вершина дает $2/3 + \varepsilon$ каждой инцидентной $\geq 4^*$ -границе и $1/3 + \varepsilon$ каждой инцидентной 3^* -границе.

П2. Каждая бедная вершина v получает $2/3 + \varepsilon$

а) от каждой инцидентной $\geq 4^*$ -границы f при условии, что имеется ≥ 14 -вершина z в $\partial(f)$, не соединенная с v вдоль $\partial(f)$ цепью из 2-вершин, а также

б) от каждой инцидентной $\geq 13^*$ -границы f .

П3. Если 3^* -грань f инцидентна ≥ 14 -вершине, то f дает $1/6 + \varepsilon/2$ каждой инцидентной бедной вершине.

ЛЕММА 6. *Каждая бедная вершина v получает от каждой из двух смежных по циклу 3^* -граней при v по $1/6 + \varepsilon/2$ согласно П3.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что если 3^* -грань f инцидентна 2-вершине u , то та ≥ 3 -вершина, которая противолежит u в $\partial(f)$, является даже ≥ 14 -вершиной.

Пусть $\partial(f) = xx_1x_2 \dots x_{k(x)}yy_1y_2 \dots y_{k(y)}zz_1z_2 \dots z_{k(z)}$, где все x_i, y_i и z_i суть 2-вершины, а x, y и z суть ≥ 3 -вершины. Предположим, что $k(x) \geq 1$, т.е. x_1 существует. Обозначим через f_{xy} грань, лежащую по другую сторону цепи $xx_1x_2 \dots x_{k(x)}xy$, чем f (возможно, что $f_{xy} = f$). Грани f_{yz} и f_{zx} определяются аналогично.

Стянем ребро xx_1 и перенесем хорошую раскраску полученной карты на $P - x_1$. Если мы покрасим v в цвет, не встречающийся на границе грани f и граней, инцидентных z , то полученная раскраска будет хорошей. Это невозможно сделать, только если $d(z) \geq 14$.

Для завершения доказательства леммы заметим, что по второму утверждению леммы 1 одна из двух смежных по циклу 3^* -граней, f_1 или f_2 , при v инцидентна 2-вершине, z . Если z инцидентна как с f_1 , так и с f_2 , то получаем требуемое по ПЗ и только что доказанному утверждению. В противном случае z противолежит ≥ 3 -вершине w , которая инцидентна как f_1 , так и f_2 , поскольку по доказанному выше утверждению вершина z не может противолежать бедной вершине v , которая имеет степень не более 6 по лемме 5. Отсюда $d(w) \geq 14$, и мы снова применяем ПЗ.

ЛЕММА 7. Если $d(v) = 3$, то v инцидентна по меньшей мере двум граням, каждая из которых дает v заряд $2/3 + \varepsilon$ согласно П2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть v инцидентна цепям $vx_1x_2 \dots x_{k(x)}x$, $vy_1y_2 \dots y_{k(y)}y$ и $vz_1z_2 \dots z_{k(z)}z$, где все x_i, y_i и z_i суть 2-вершины, а x, y и z суть > 2 -вершины. Пусть $\partial(f_1) = \dots xx_{k(x)} \dots x_2x_1vy_1y_2 \dots y_{k(y)}y$, $\partial(f_2) = \dots yy_{k(y)} \dots y_2y_1vz_1z_2 \dots z_{k(z)}z$ и $\partial(f_3) = \dots zz_{k(z)} \dots z_2z_1vx_1x_2 \dots x_{k(x)}x$.

Предположим противное, а именно, ввиду симметрии, что ни f_1 , ни f_2 не передает $2/3 + \varepsilon$ на v . Тогда по П2 f_1 и f_2 являются $\leq 12^*$ -гранями, а каждая вершина в $\partial(f_1) \setminus \{x, y\}$ и в $\partial(f_2) \setminus \{y, z\}$ имеет степень не более 13.

Стянем цепь $vy_1y_2 \dots y_{k(y)}y$ в вершину $v * y$. Перенесем хорошую раскраску полученной карты на P и заметим, что цвета вершин x и z различны. Раскрасим $y_1, y_2, \dots, y_{k(y)}$ и v в попарно различные цвета, не встречающиеся на границе граней f_1, f_2, f_3 и тех не более чем $2 \times 9 \times (13 - 1)$ граней, которые инцидентны > 2 -вершинам из $\partial(f_1) \setminus \{x, y\} \cup \partial(f_2) \setminus \{y, z\}$. Число ограничений меньше $3k + 2 \times 9 \times (13 - 1)k < c_N k + d_N$, и не появляется ни одноцветных ребер, отличных от петель, ни двухцветных циклов длины больше двух.

ЛЕММА 8. Если $d(v) = 4$, то v инцидентна по меньшей мере одной грани, дающей вершине v заряд $2/3 + \varepsilon$ согласно П2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть v инцидентна цепям $vx_1^i x_2^i \dots x_{k(x^i)}^i x^i$ в циклическом порядке, где $0 \leq i \leq 3$, все x_j^i являются 2-вершинами, а все x^i являются > 2 -вершинами.

Пусть грань f^i имеет

$$\partial(f^i) = x^i x_{k(x^i)}^i \dots x_2^i x_1^i v x_1^{i+1} x_2^{i+1} \dots x_{k(x^{i+1})}^{i+1} x^{i+1} \dots,$$

где верхние индексы берутся по модулю 4.

Допустим, что ни одна из граней f^i не передает $2/3 + \varepsilon$ на v . Тогда по П2 каждая f^i является $\leq 12^*$ -гранью, а каждая вершина из $\partial(f^i) \setminus \{x^i, x^{i+1}\}$ имеет степень не больше 13.

Добавим ребро $x^i x^{i+1}$ в f^i при всех $0 \leq i \leq 3$, если такого ребра в $\partial(f^i)$ еще нет. Удалим v и перенесем хорошую раскраску полученной карты на P . Покрасим v в цвет, не встречающийся на границах граней, инцидентных вершинам из $\partial(f^i) \setminus \{x^i, x^{i+1}\}$ при всех $0 \leq i \leq 3$. Число ограничений меньше, чем $4 \times 9 \times 13k \leq c_N k + d_N$, и нетрудно видеть, что не возникает ни нетривиальных одноцветных ребер, ни двухцветных циклов.

ЛЕММА 9. Если $v \in V_{3+}$, то $\text{ch}^*(v) \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала допустим, что v бедна, т.е. $\text{ch}(v) < 0$. Тогда по лемме 5 $d(v) < 7$. Если $d(v) = 3$, то $\text{ch}(v) = -1 - \xi - f_3^*(v)/3$, и мы получаем требуемое по лемме 7, поскольку $2(2/3 + \varepsilon) > 1 + \xi + 1/3$.

Если $d(v) = 4$, то $\text{ch}(v) = -\xi - f_3^*(v)/3$. По лемме 8 вершина v получает $2/3 + \varepsilon$ по меньшей мере от одной инцидентной $\geq 4^*$ -границы. Если v инцидентна не более чем двум 3^* -граням, то $\text{ch}^*(v) \geq \varepsilon - \xi \geq 0$. В противном случае, согласно лемме 6 v получает не менее $2(1/6 + \varepsilon/2)$ от трех инцидентных 3^* -граней, и поэтому $\text{ch}^*(v) \geq 0$.

Если $d(v) = 5$, то $\text{ch}(v) = 1 - \xi - f_3^*(v)/3$ и все уже в порядке, если v инцидентна не более чем двум 3^* -граням. Если же при v имеется r таких граней, где $3 \leq r \leq 5$, то по лемме 6 вершина v получает не менее $2(1/6 + \varepsilon/2)$ при $r = 3$ и не менее $4(1/6 + \varepsilon/2)$ при $r \geq 4$, откуда $\text{ch}^*(v) \geq 0$.

Если $d(v) = 6$, то $\text{ch}(v) = 2 - \xi - f_3^*(v)/3$, так что все уже в порядке, если v инцидентна не более чем пяти 3^* -граням. В противном же случае, по лемме 6, v получает $6 \times (1/6 + \varepsilon/2)$ от шести инцидентных 3^* -граней, поэтому $\text{ch}^*(v) \geq 0$.

Пусть теперь v не бедна. Если она ничего не дает соседним вершинам по правилам П1 и П2, то $\text{ch}^*(v) = \text{ch}(v) \geq 0$. В противном же случае $d(v) \geq 14$ и v делает не более $d(v)$ передач согласно П1. Следовательно, $\text{ch}^*(v) = d(v) - 4 - \xi - d(v)(2/3 + \varepsilon)$, откуда $\text{ch}^*(v) \geq 0$, поскольку $\xi \leq \varepsilon$.

ЛЕММА 10. Если $f \in F$, то $\text{ch}^*(f) \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если все вершины, инцидентные 3^* -границы, имеют степень не более 13, то она не участвует в перераспределении заряда. В противном случае она получает не менее $1/3 + \varepsilon$ по П1 и отдает не более $2(1/6 + \varepsilon/2)$ инцидентным бедным вершинам по П3. В обоих случаях имеем $\text{ch}^*(f) \geq 0$.

Пусть теперь $f \in F_{4+}^*$. Если грани f инцидентно не менее двух вершин степени ≥ 14 , то

$$\text{ch}^*(f) \geq s^*(f) - 4 + 2\left(\frac{2}{3} + \varepsilon\right) - (s^*(f) - 2)\left(\frac{2}{3} + \varepsilon\right) = (s^*(f) - 4)\left(\frac{1}{3} - \varepsilon\right) \geq 0.$$

Если при f имеется только одна ≥ 14 -вершина z , то

$$\text{ch}^*(f) \geq s^*(f) - 4 + \frac{2}{3} + \varepsilon - (s^*(f) - 3) \left(\frac{2}{3} + \varepsilon \right) \geq 0,$$

поскольку f отдает по $2/3 + \varepsilon$ не более, чем $s^*(f) - 3$ бедным вершинам, согласно П2: передачи не происходит ни на саму z , ни на ≥ 3 -вершины, ближайшие к z слева и справа вдоль $\partial(f)$.

Пусть теперь при f нет вершин степени ≥ 14 . Если $s^*(f) \leq 12$, то $\text{ch}^*(f) = \text{ch}(f) = s^*(f) - 4 \geq 0$, так как f не участвует в перераспределении зарядов. Наконец, если $s^*(f) \geq 13$, то согласно П2

$$\text{ch}^*(f) \geq s^*(f) - 4 - s^*(f) \left(\frac{2}{3} + \varepsilon \right) = s^*(f) \left(\frac{1}{3} - \varepsilon \right) - 4 \geq 0,$$

поскольку $\varepsilon = 1/39$.

Из доказанных лемм следует, что $\text{ch}^*(x) \geq 0$ для всех $x \in V_{3+} \cup F$. Это противоречие с (6) завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Appel K., Haken W. The solution of the four-color-map problem // Scientific American. 1977. V. 237. №4. P. 108–121.
- [2] Heawood P. J. Map-color theorem // Quart. J. Math. 1890. V. 24. P. 332–338.
- [3] Бородин О.В. Решение задач Рингеля о вершинно-граневой раскраске плоских графов и о раскраске 1-плоских графов // Дискретный анализ. Новосибирск. 1984. Т. 41. С. 12–26.
- [4] Ringel G. Ein Sechsfarbenproblem auf der Kugel // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1965. V. 29. P. 107–117.
- [5] Schumacher H. Ein 7-Farbensatz 1-einbettbarer Graphen auf der projektiven Ebene // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1984. V. 54. P. 5–14.
- [6] Ringel G. A nine color theorem for the torus and the Klein bottle // The Theory and Applications of Graphs (Kalamazoo, Mich., 1980). New York: Wiley, 1981. P. 507–515.
- [7] Ore O., Plummer M. D. Cyclic coloration of plane graphs // Recent Progress in Combinatorics. New York: Academic Press, 1969. P. 287–293.
- [8] Borodin O. V., Sanders D., Zhao Y. On cyclic colorings and their generalizations // Discrete Math. (to appear)..
- [9] Borodin O. V. On acyclic coloring of planar graphs // Diskrete Math. 1979. V. 25. P. 198–223.
- [10] Albertson M., Berman D. An acyclic analogue to Heawood's theorem // Glasgow Math. J. 1977. V. 19. P. 169–174.
- [11] Alon N., Mohar B., Sanders D. P. On acyclic colorings of graphs on surfaces // Israel J. Math. 1996. V. 94. P. 273–283.
- [12] Alon N., Marshall T. H. Homomorphisms of edge-colored graphs and Coxeter groups // J. Algebraic Combinatorics. 1998. V. 2. P. 277–289.

- [13] Grünbaum B. Acyclic colorings of planar graphs // Israel J. Math. 1973. V. 14. №3. P. 390–408.
- [14] Jensen T. R., Toft B. Graph coloring problems. New York: Wiley, 1995.
- [15] Nešetřil J., Ruspaud A. Colored Homomorphisms of Colored Mixed Graphs // KAM Series N0. 98-376. Dept. of Applied Math. Prague: Charles University, 1998.
- [16] Ruspaud A., Sopena E. Good and semi-strong colorings of oriented planar graphs // Inform. Processing Letters. 1994. V. 51. P. 171–174.
- [17] Algor I., Alon N. The star arboricity of graphs // Discrete Math. 1989. V. 75. P. 11–22.
- [18] Бородин О.В., Косточка А.В., Распо А., Сопена Е. Об ациклической 20-раскрашиваемости 1-плоских графов // Дискретный анализ и исследование операций, Новосибирск, Сер. I. 1999. Т. 6. №4. С. 20–36.

Институт математики СО РАН, г. Новосибирск,
Новосибирский государственный университет,
Университет Бордо I

Поступило
15.03.1999