Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Денисов, О порядке роста обобщенных собственных функций оператора Штурма–Лиувилля. Теорема Шноля, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 1, 46–51

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm812>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 16:05:52

УДК 517.984.52

О ПОРЯДКЕ РОСТА ОБОБЩЕННЫХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ. ТЕОРЕМА ШНОЛЯ

С. А. Денисов

Получены оценки роста на бесконечности обобщенных собственных функций, отвечающих оператору Штурма–Лиувилля на полуоси. В отличие от известной теоремы Шноля, в работе проведен анализ зависимости порядка роста от поведения потенциала на бесконечности.

Библиография: 13 названий.

В работе рассматривается оператор Штурма–Лиувилля

$$l(u) = -u'' + qu \quad (1)$$

на полуоси с условиями Дирихле или Неймана в точке 0:

$$(D) \quad u(0) = 0, \quad (2)$$

$$(N) \quad u'(0) = 0. \quad (3)$$

Вещественная функция $q(x)$ удовлетворяет условию равномерной локальной суммируемости

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^+} \int_a^{a+1} |q(x)| dx < \infty. \quad (4)$$

Известно, что самосопряженный оператор H , порожденный дифференциальным выражением (1), ограничен снизу некоторым числом m . Введем в рассмотрение спектральную меру $\rho_D(\lambda)$ задачи (1), (2) ($\rho_N(\lambda)$ – для задачи Неймана (1), (3)) и обобщенные собственные функции $\varphi(\lambda, t)$, которые удовлетворяют уравнению $l(\varphi) = \lambda\varphi$ и условиям в нуле:

$$(D) \quad \varphi_D(0, \lambda) = 0, \quad \varphi'_D(0, \lambda) = 1,$$

$$(N) \quad \varphi_N(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'_N(0, \lambda) = 0.$$

В дальнейшем изложении для определенности будем рассматривать в нуле условие Дирихле и под $\rho(\lambda)$, $\varphi(x, \lambda)$ будем понимать $\rho_D(\lambda)$, $\varphi_D(x, \lambda)$ соответственно. Рассуждения для случая Неймана аналогичны.

Основной задачей статьи является получение оценок порядка роста по x на бесконечности функций $\varphi(x, \lambda)$. Эта проблематика не нова. Еще в 1954 году И. Э. Шноль доказал следующую теорему (см. [1]).

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 96-15-96097.

ТЕОРЕМА (И. Э. Шноль). Если $q(x)$ – интегрируема на любом компакте из $\mathbb{R}^+$ и при $x \geq 0$ выполнено неравенство $q(x) > q_0 > -\infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ и для почти всех значений λ по спектральной мере $\rho(\lambda)$ найдется константа $C_\varepsilon(\lambda)$ такая, что при $x \geq 0$ будет выполнена оценка

$$|\varphi(x, \lambda)| < C_\varepsilon(\lambda) |x|^{\frac{1}{2} + \varepsilon}. \quad (5)$$

В дальнейшем Ю. М. Березанскому, Г. И. Кацу и А. Г. Костюченко [2] удалось обобщить этот результат на многомерный случай. При этом показатель степени в (5) был равен $\nu/2 + \varepsilon$, где ν – размерность пространства.

Необходимо подчеркнуть важность того, что оценка (5) выполнена для п.в. λ по спектральной мере, а не для всех λ из спектра H . Так, несколько модифицируя пример Вигнера–фон-Неймана [3], можно построить потенциал $q(x)$ такой, что для некоторого $\lambda^* > 0$ соответствующая собственная функция $\varphi(x, \lambda^*)$ осциллирует на бесконечности с амплитудой, растущей как $\exp(x^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$. И при этом $q(x) \rightarrow 0$ для $x \rightarrow \infty$, что означает совпадение существенного спектра оператора H с $\mathbb{R}^+$.

Следует отметить, что оценки подобного рода помимо самостоятельного интереса имели большое значение в спектральном анализе стохастических операторов Шрёдингера (см., например, работу [4] и библиографию в ней). Так, например, теорема Шноля гарантирует отсутствие абсолютно непрерывного спектра в модели Андерсона.

Мы будем интересоваться следующим вопросом: зависит ли показатель степени в (5) от свойств потенциала и, если зависит, то как и от каких именно свойств? В настоящей статье рассмотрены потенциалы, которые малы на бесконечности в некотором интегральном смысле. А именно, пусть $q(x)$ удовлетворяет следующему условию:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^{x+1} |q(\xi)| d\xi = 0, \quad \text{но при этом } q(x) \notin L_1(\mathbb{R}^+). \quad (6)$$

Несложно показать (см., например, [5, теорема 3, с. 138, и теорема 25, с. 173]), что существенный спектр оператора H заполняет положительную полуось: $\sigma_{\text{ess}}(H) = \mathbb{R}^+$.

Зафиксируем произвольное положительное $\lambda_0 > 0$ и построим по нему последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ такую, что $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$ и при этом

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} |q(\xi)| d\xi = \delta, \quad \delta < \frac{\sqrt{\lambda_0}}{2}.$$

Из условия (6) следует, что такая последовательность существует и стремится к бесконечности, однако в некоторых случаях даже при фиксированном x_1 она определяется неоднозначно. Если мы имеем неединственность выбора, то для получения более точных оценок следует выбирать x_{n+1} так, чтобы длина отрезка $[x_n, x_{n+1}]$ была максимальной.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. Для любого $\varepsilon > 0$ и для п.в. $\lambda > \lambda_0$ по спектральной мере $\rho(\lambda)$ существует константа $C_\varepsilon(\lambda)$ такая, что

$$\max_{x \in [x_n, x_{n+1}]} |\varphi(x, \lambda)| < C_\varepsilon(\lambda) n^{\frac{1}{2} + \varepsilon}. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся следующим неравенством, которое справедливо для любых $q(x)$, удовлетворяющих условию (4),

$$\int_a^b [(\varphi(x, \lambda))^2 + (\varphi'(x, \lambda))^2] d\rho(\lambda) < C(a, b), \quad (8)$$

где $[a, b]$ – произвольный конечный сегмент, а константа $C(a, b)$ не зависит от $x \geq 0$. Эта оценка тривиальна (см. примечание в конце работы), и она следует, например, из работы [6], если потенциал $q(x)$ четным образом продолжить на $\mathbb{R}^-$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим следующую функциональную последовательность

$$S_N(\lambda) \equiv \sum_{j=1}^N j^{-(1+\varepsilon)} [(\varphi(x_j, \lambda))^2 + (\varphi'(x_j, \lambda))^2].$$

Из (8) следует оценка

$$\sup_N \int_a^b S_N(\lambda) d\rho(\lambda) < \infty,$$

откуда в силу теоремы Леви следует сходимость ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^{-(1+\varepsilon)} [(\varphi(x_j, \lambda))^2 + (\varphi'(x_j, \lambda))^2]$$

для п.в. λ по спектральной мере. Это означает, что

$$|\varphi(x_j, \lambda)| + |\varphi'(x_j, \lambda)| = \bar{o}(j^{\frac{1}{2} + \varepsilon}). \quad (9)$$

Рассмотрим $\lambda > \lambda_0$ и пусть λ таково, что выполнено (9).

Введем следующие обозначения:

$$M_n(\lambda) \equiv \max_{x \in [x_n, x_{n+1}]} |\varphi(x, \lambda)| = |\varphi(x_n^*, \lambda)|,$$

т.е. x_n^* – точка, в которой достигается максимум.

Запишем интегральное уравнение для $\varphi(x, \lambda)$

$$\begin{aligned} \varphi(x, \lambda) &= \varphi(y, \lambda) \cos[(x - y)\sqrt{\lambda}] + \varphi'(y, \lambda) \frac{\sin[(x - y)\sqrt{\lambda}]}{\sqrt{\lambda}} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_y^x q(\xi) \varphi(\xi, \lambda) \sin[(x - \xi)\sqrt{\lambda}] d\xi. \end{aligned}$$

Полагая $x = x_n^*$, $y = x_n$, получим оценку

$$\begin{aligned} M_n(\lambda) &\leq \bar{o}(x_n^{\frac{1}{2} + \varepsilon}) + M_n(\lambda) \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{x_n}^{x_{n+1}} |q(\xi)| d\xi \\ &\leq \bar{o}(x_n^{\frac{1}{2} + \varepsilon}) + M_n(\lambda) \frac{\delta}{\sqrt{\lambda}} \leq \bar{o}(x_n^{\frac{1}{2} + \varepsilon}) + \frac{M_n(\lambda)}{2}, \end{aligned}$$

откуда следует утверждение теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $q(x) \in L_p(\mathbb{R}^+)$ ($1 < p < \infty$) и $q(x) \notin L_1(\mathbb{R}^+)$, то для п.в. λ по $\rho(\lambda)$ справедливо неравенство

$$|\varphi(x, \lambda)| < C_\varepsilon(\lambda) |x|^{\frac{1}{2p'} + \varepsilon}, \quad p' : \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольное $\lambda_0 > 0$. Заметим, что неравенство (6) выполняется, поэтому теорема 1 справедлива. Из построения последовательности x_n следует соотношение

$$n\delta = \int_{x_1}^{x_{n+1}} |q(\xi)| d\xi \leq \|q\|_{L_p} \left(\int_{x_1}^{x_{n+1}} d\xi \right)^{1/p'} = \|q\|_{L_p} (x_{n+1} - x_1)^{1/p'}.$$

Поэтому $x_n \geq C(\lambda_0) n^{p'}$; следовательно

$$\max_{x \in [Cn^{p'}, C(n+1)^{p'}]} |\varphi(x, \lambda)| \leq \bar{o}(n^{\frac{1}{2} + \varepsilon}),$$

что означает выполнение (10) в силу произвольного выбора $\lambda_0 > 0$.

В случае $q \in L_1(\mathbb{R}^+)$ несложно показать, что все $\varphi(x, \lambda)$ – ограничены на бесконечности и, даже более того, имеют определенное асимптотическое поведение. Если же $p \leq 2$ то $\sigma_{\text{ac}}(H) = [0, \infty)$ (см. [7]), поэтому можно утверждать, что для п.в. $\lambda > 0$ по мере Лебега справедлива оценка (10). Однако, существует предположение (см. по этому поводу работы [8]–[11]), что для этого случая собственные функции будут ограничены на бесконечности для п.в. $\lambda > 0$ по мере Лебега.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $q(x) \leq C/x^\alpha$ ($0 < \alpha < 1$) и $q(x) \notin L_1(\mathbb{R}^+)$. Тогда для п.в. λ по $\rho(\lambda)$ справедливо неравенство

$$|\varphi(x, \lambda)| < C_\varepsilon(\lambda) |x|^{\frac{1-\alpha}{2} + \varepsilon}, \quad (11)$$

где $\varepsilon > 0$ – произвольно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выбираем x_n так, как указано в теореме 1. Тогда будет справедливо неравенство

$$n\delta = \int_{x_1}^{x_{n+1}} |q(\xi)| d\xi \leq C \frac{x_{n+1}^{1-\alpha} - x_1^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

откуда следует оценка $x_n \geq \omega n^{1/(1-\alpha)}$, где ω – некоторая положительная константа. Из теоремы 1 имеем

$$\max_{x \in [\omega n^{1/(1-\alpha)}, \omega(n+1)^{1/(1-\alpha)}]} |\varphi(x, \lambda)| \leq \bar{o}(n^{\frac{1}{2} + \varepsilon}),$$

откуда следует (11).

Аналогично рассматривается случай $|q(x)| \leq C/x$. Получаемая оценка имеет вид $|\varphi(x, \lambda)| \leq C_\varepsilon(\lambda)(\ln x)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ для любого $\varepsilon > 0$.

Следует отметить, что неравенства типа (8) несложно получаются из следующих рассуждений.

Очевидна оценка

$$\int_a^b \varphi(x, \lambda)^2 d\rho(\lambda) \leq C(t) \int_t^\infty e^{-\lambda t} \varphi(x, \lambda)^2 d\rho(\lambda).$$

Но последнее слагаемое (с точностью до константы) есть не что иное, как ядро оператора $\exp(-tH)$, взятое на диагонали. Равномерная ограниченность по x таких выражений может быть получена с помощью методов работы [12].

Второе слагаемое из (8) $\int_a^b \varphi'(x, \lambda)^2 d\rho(\lambda)$ может быть оценено с помощью неравенства

$$\varphi'(x, \lambda)^2 \leq C(a, b) \int_{x-1}^{x+1} \varphi(\xi, \lambda)^2 d\xi, \quad (12)$$

где $x \in [1, \infty)$, $\lambda \in [a, b]$. Если выполнено (4), то, чтобы получить (12), достаточно продифференцировать по x интегральное уравнение для $\varphi(x, \lambda)$ и далее воспользоваться оценками собственных функций и их производных из работы [13].

Заметим, что предложенный в работе метод позволяет более просто доказать оценки, полученные ранее Шнолем, Березанским, Кацем и Костюченко. Вопрос о зависимости показателя степени роста собственных функций от поведения потенциала в случае многих измерений исследуется аналогичным образом и будет рассмотрен в отдельной работе.

Автор благодарен А. Киселеву, М. Христу, П. Дейфту, Р. Киллишу, С. Ремлингу за предоставленную возможность ознакомиться с их работами, а также С. Молчанову, замечания которого стимулировали работу над исследованными вопросами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Шноль И. Э. О поведении собственных функций // Докл. АН СССР. 1954. Т. 94. № 2. С. 389–392.
- [2] Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965.
- [3] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. М.: Мир, 1982.
- [4] Maslov V. P., Molchanov S. A., Gordon A. Y. Behaviour of generalized eigenfunctions at infinity and the Schrödinger Conjecture // Russian J. Math. Phys. 1993. V. 1. № 1. P. 71–104.
- [5] Глазман И. М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М.: Физматгиз, 1963.
- [6] Ильин В. А., Крицков Л. В. Равномерная на всей прямой оценка обобщенных собственных функций одномерного оператора Шрёдингера с равномерно локально суммируемым потенциалом // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 8. С. 1323–1329.
- [7] Deift P., Killip R. On the absolutely continuous spectrum of one-dimensional Schrödinger operators with square summable potential // Comm. Math. Phys. (to appear).

- [8] Christ M., Kiselev A., Remling C. The absolutely continuous spectrum of one-dimensional Schrödinger operators with decaying potentials // Math. Res. Lett. 1997. V. 4. № 5. P. 719–723.
- [9] Christ M., Kiselev A. Absolutely continuous spectrum for one-dimensional Schrödinger operators with slowly decaying potentials: some optimal results // J. Amer. Math. Soc. 1998. V. 11. P. 771–797.
- [10] Kiselev A., Last Y., Simon B. Modified Prüfer and EFGP transforms and the spectral analysis of one-dimensional Schrödinger operators // Comm. Math. Phys. 1998. V. 194. P. 1–45.
- [11] Remling C. The absolutely continuous spectrum of one-dimensional Schrödinger operators with decaying potentials // Comm. Math. Phys. 1998. V. 193. № 1. P. 151–170.
- [12] Simon B. Schrödinger semigroups // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. V. 7. № 3. P. 447–526.
- [13] Цикон Х., Фрезе Р., Кирш В., Саймон Б. Операторы Шрёдингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии. М.: Мир, 1990.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: `saden@cs.msu.su`

Поступило
22.09.1999