Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Э. Зверович, Характеризация хорошо укрытых графов в терминах запрещенных костабильных подграфов, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 1, 52–56

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm813>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 14:58:45

УДК 519.1

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ХОРОШО УКРЫТЫХ ГРАФОВ В ТЕРМИНАХ ЗАПРЕЩЕННЫХ КОСТАБИЛЬНЫХ ПОДГРАФОВ

И. Э. Зверович

Граф называется *хорошо укрытым*, если каждое максимальное независимое множество является наибольшим. Пусть I – независимое множество (возможно, пустое) в графе G . Подграф графа G , полученный удалением множества I вместе с окрестностью, называется *костабильным*.

Получена характеристика класса хорошо укрытых графов в терминах минимального множества запрещенных костабильных подграфов. Из нее вытекают характеристики известных подклассов класса хорошо укрытых графов и существование полиномиального алгоритма распознавания хорошо укрытых графов с ограниченными степенями вершин.

Библиография: 8 названий.

Мы используем терминологию книги [1]. *Классом* графов называется любое множество графов, различаемых с точностью до изоморфизма. Пусть $\text{Ind}(G)$ есть множество всех максимальных независимых множеств графа G ; $\alpha(G) = \max\{|I| : I \in \text{Ind}(G)\}$ – *число независимости* графа G . Граф G называется *хорошо укрытым*, если $|I| = \alpha(G)$ для любого $I \in \text{Ind}(G)$. Обозначим через W класс всех хорошо укрытых графов. В [2] и [3] доказано, что задача распознавания класса W является co-NP-полной. Имеется обзор [4] по хорошо укрытым графам. Основные проблемы в рассматриваемой области заключаются в выявлении полиномиально распознаваемых классов хорошо укрытых графов и их характеристике.

Через $N(x)$ обозначается окрестность вершины x . Для множества $X \subseteq VG$ обозначим $N(X) = \bigcup_{x \in X} N(x)$ и $N[X] = X \cup N(X)$. Пусть I – независимое множество (возможно, пустое) в графе G . Если $I \notin \text{Ind}(G)$, то подграф $G - N[I]$ называется *костабильным*. Обозначим через $\text{CSub}(G)$ множество всех костабильных подграфов графа G . Класс графов P назовем *конаследственным*, если $\text{CSub}(G) \subseteq P$ для любого графа $G \in P$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Класс W является конаследственным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G \in W$ и $H \in \text{CSub}(G)$. По определению $H = G - N[I]$, где I – независимое множество в G . Пусть $J, J' \in \text{Ind}(H)$. Ясно, что $J \cup I, J' \cup I \in \text{Ind}(G)$. Так как $G \in W$, то $|J \cup I| = |J' \cup I|$, откуда $|J| = |J'|$. Поэтому $H \in W$.

Для множества графов Z положим

$$\text{FCS}(Z) = \{G : \text{CSub}(G) \cap Z = \emptyset\}.$$

Если $P = \text{FCS}(Z)$, то Z называется множеством *запрещенных костабильных подграфов* для P .

Запрещенный костабильный подграф $H \in Z$ для класса P называется *минимальным*, если $\text{CSub}(H) \setminus \{H\} \subseteq P$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. i) *Класс P является конаследственным тогда и только тогда, когда $P = \text{FCS}(Z)$ для некоторого множества графов Z .*

ii) *Минимальное (по включению) множество Z , удовлетворяющее i), определено однозначно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. i) *Необходимость.* Пусть P является конаследственным классом и $G \in P$. Положим $Z = \{H : H \notin P\}$. Так как P – конаследственный класс, то $\text{CSub}(G) \subseteq P$. Следовательно, $\text{CSub}(G) \cap Z = \emptyset$, т.е. $G \in \text{FCS}(Z)$ и $P \subseteq \text{FCS}(Z)$. Обратно, пусть $G \in \text{FCS}(Z)$, т.е. $\text{CSub}(G) \cap Z = \emptyset$. Так как $G \in \text{CSub}(G)$, то $G \notin Z$. Следовательно, $G \in P$ и $\text{FCS}(Z) \subseteq P$.

Достаточность следует из того, что $\text{CSub}(H) \subseteq \text{CSub}(G)$, если $H \in \text{CSub}(G)$.

ii) Пусть $P = \text{FCS}(Z)$ и Z° есть множество всех минимальных костабильных подграфов для P . Достаточно показать, что $Z^\circ \subseteq Z$ и $P = \text{FCS}(Z^\circ)$.

Пусть $G \in Z^\circ$. Тогда $G \notin P = \text{FCS}(Z)$, откуда $\text{CSub}(G) \cap Z \neq \emptyset$. Из минимальности G следует, что $\text{CSub}(G) \setminus \{G\} \subseteq P$. Кроме того, очевидно, что $Z \cap P = \emptyset$. Таким образом, $\text{CSub}(G) \cap Z = \{G\}$ и $G \in Z$. Итак, $Z^\circ \subseteq Z$.

Так как $Z^\circ \cap P = \emptyset$, то $P \subseteq \text{FCS}(Z^\circ)$.

Обратно, пусть $G \in \text{FCS}(Z^\circ)$, т.е. $\text{CSub}(G) \cap Z^\circ = \emptyset$. Допустим, что $G \notin P$. Из конечности множества $\text{CSub}(G)$ следует, что существует граф $H \in \text{CSub}(G)$ такой, что $H \notin P$ и $\text{CSub}(H) \setminus \{H\} \subseteq P$, т.е. $H \in Z^\circ$. Противоречие с $\text{CSub}(G) \cap Z^\circ = \emptyset$. Поэтому $G \in P$ и $\text{FCS}(Z^\circ) \subseteq P$.

Соединением графов $G_1, G_2, \dots, G_k$ (при условии $VG_i \cap VG_j = \emptyset$, где $1 \leq i \neq j \leq k$) называется граф $\sum_{i=1}^k G_i = \overline{G_1} \cup \overline{G_2} \cup \dots \cup \overline{G_k}$. Соединение двух графов G и H обозначается $G + H$. Положим

$$Z_W = \left\{ \sum_{i=1}^k G_i : k \geq 2, G_i \in W \text{ при } i = 1, 2, \dots, k \text{ и } \alpha(G_i) \neq \alpha(G_j) \text{ при } 1 \leq i \neq j \leq k \right\}.$$

ТЕОРЕМА 1. $W = \text{FCS}(Z_W)$, причем Z_W является множеством минимальных запрещенных костабильных подграфов для W .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что ни один граф множества Z_W не является хорошо укрытым. В силу конаследственности класса W (предложение 1) имеем $W \subseteq \text{FCS}(Z_W)$.

Для доказательства обратного включения рассмотрим минимальный граф $G \notin W$.

ЛЕММА 1. Если $I, J \in \text{Ind}(G)$ и $|I| \neq |J|$, то $I \cap J = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Несложно видеть, что множества $I_1 = I \setminus J$ и $J_1 = J \setminus I$ являются максимальными независимыми в подграфе $G_1 = G - N[I \cap J]$, причем $|I_1| \neq |J_1|$. Следовательно, $G_1 \notin W$. Так как $G_1 \in \text{CSub}(G)$, в силу минимальности графа G имеем $G = G_1$, т.е. $I \cap J = \emptyset$.

Продолжим доказательство теоремы 1. По лемме 1 любые два максимальные независимые множества, содержащие вершину u графа G , равномошны. Обозначим через $i(u)$ мощность максимального независимого множества, содержащего вершину u . На множестве VG определим отношение эквивалентности: uRv тогда и только тогда, когда $i(u) = i(v)$. Пусть $C_1, C_2, \dots, C_k$ — классы эквивалентности, определяемые отношением R . Так как $G \notin W$, то $k \geq 2$.

Допустим, что существуют несмежные вершины $x \in C_i$ и $y \in C_j$ ($1 \leq i \neq j \leq k$). Выберем произвольное множество $I \in \text{Ind}(G)$, содержащее x и y . Так как $x \in I$ и $y \in I$, то $|I| = i(x)$ и $|I| = i(y)$. Но $i(x) \neq i(y)$, поскольку $i \neq j$. Противоречие. Поэтому $G = \sum_{i=1}^k G_i$, где $G_i = G(C_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Отсюда следует, что $\text{Ind}(G) = \bigcup_{i=1}^k \text{Ind}(G_i)$ и $\text{Ind}(G_i) \cap \text{Ind}(G_j) = \emptyset$ при $1 \leq i \neq j \leq k$. Из определения C_i вытекает, что $G_i \in W$. Имеем $G \in Z_W$. Следовательно, $\text{FCS}(Z_W) \subseteq W$. Равенство $W = \text{FCS}(Z_W)$ доказано.

Покажем, что Z_W является множеством минимальных запрещенных костабильных подграфов. Пусть $G = \sum_{i=1}^k G_i \in Z_W$, где $k \geq 2$ и $G_i \in W$. Пусть $I \neq \emptyset$ — независимое множество в G . Ясно, что $I \subseteq VG_i$ при некотором $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Тогда получаем, что $G - N[I] = G_i - N[I] \in W$, поскольку $G_i \in W$ и по предложению 1 класс W является конаследственным.

В ряде работ (например, [4]–[7]) рассматриваются некоторые наследственные подклассы класса W , определяемые запрещенными порожденными подграфами типа C_3 , C_4 , $K_{1,3}$, $K_{1,4}$ или их комбинациями. Из теоремы 1 легко получить характеристики таких подклассов в терминах запрещенных костабильных подграфов.

Напомним, что *обхватом* $g(G)$ графа G называется длина кратчайшего простого цикла в G .

СЛЕДСТВИЕ 1. i) Если $g(G) \geq 4$, то $G \in W$ тогда и только тогда, когда G не содержит полных двудольных графов с неравномошными долями в качестве костабильных подграфов.

ii) Если $g(G) \geq 5$, то $G \in W$ тогда и только тогда, когда G не содержит звезд порядка по крайней мере 3 в качестве костабильных подграфов.

iii) Если граф G не содержит порожденного подграфа $K_{1,3}$, то $G \in W$ тогда и только тогда, когда G не содержит графов вида $K_n + H$, где $n \geq 1$ (n не фиксировано) и $H \in W$, $\alpha(H) = 2$, в качестве костабильных подграфов.

iv) Если G не содержит порожденного подграфа C_4 , то $G \in W$ тогда и только тогда, когда G не содержит графов вида $K_n + H$, где $n \geq 1$ (n не фиксировано) и $H \in W$, $\alpha(H) \geq 2$, в качестве костабильных подграфов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что если граф G не содержит граф H в качестве порожденного подграфа, то любой костабильный подграф графа G также не содержит H в качестве порожденного подграфа. По теореме 1 нам достаточно удалить из Z_W все графы, содержащие запрещенные порожденные подграфы в каждом случае i) – iv).

Пусть $G = \sum_{i=1}^k G_i \in Z_W$ ($k \geq 2$, $G_i \in W$, $\alpha(G_i) \neq \alpha(G_j)$ при $i \neq j$).

i) Класс графов $\{G : g(G) \geq 4\}$ определяется запрещенным порожденным подграфом C_3 . Если G не содержит C_3 , то $k = 2$ и все графы G_i пустые, т.е. G является полным двудольным графом с неравномоными долями.

ii) Класс графов $\{G : g(G) \geq 5\}$ определяется запрещенными порожденными подграфами C_3 и C_4 . Так как C_3 запрещен, то граф G такой, как в i). Из отсутствия порожденного подграфа C_4 следует, что G является звездой $K_{1,n}$ с $n \geq 2$ (так как $\alpha(G_i) \neq \alpha(G_j)$).

iii) Если граф G не содержит порожденного подграфа $K_{1,3}$, то $\alpha(G_i) \leq 2$ для любого $i = 1, 2, \dots, k$. Но $\alpha(G_i) \neq \alpha(G_j)$ при $i \neq j$. Поэтому $k = 2$, $\alpha(G_1) = 1$ и $\alpha(G_2) = 2$.

iv) Если G не содержит порожденного подграфа C_4 , то все G_i , кроме одного, являются полными графами. Так как $\alpha(G_i) \neq \alpha(G_j)$, то $k = 2$, G_1 – полный граф и $G_2 \in W$, причем $\alpha(G_2) \geq 2$.

Проблема распознавания класса W рассматривается также для графов с ограниченными степенями вершин. Так, в [8] решены задачи характеристики и полиномиального распознавания 4-регулярных 4-связных $K_{1,3}$ -свободных хорошо укрытых графов. Мы покажем ниже, что существует полиномиальный алгоритм распознавания хорошо укрытых графов с ограниченными степенями вершин. Обозначим через $\Delta(G)$ максимальную степень вершин графа G .

СЛЕДСТВИЕ 2. При любом $d \geq 0$ существует конечное множество графов $Z(d)$ такое, что если $\Delta(G) \leq d$, то $G \in W$ тогда и только тогда, когда $G \in \text{FCS}(Z(d))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1 достаточно показать, что порядок любого графа $H \in Z_W \cap \{G : \Delta(G) \leq d\}$ ограничен. Пусть $H = \sum_{i=1}^k H_i$, где $k \geq 2$ и $H_i \in W$.

Каждая вершина $x \in V H_1$ смежна с каждой вершиной множества $V H \setminus V H_1$. Поэтому $d \geq \Delta(H) \geq \deg_H x \geq |V H \setminus V H_1|$. Аналогично, $d \geq |V H \setminus V H_2|$. Тогда $2d \geq |V H \setminus V H_1| + |V H \setminus V H_2| \geq |V H|$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если $P = \text{FCS}(Z)$ и множество Z конечно, то для любого $d \geq 0$ существует полиномиальный алгоритм распознавания класса $P \cap \{G : \Delta(G) \leq d\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дан граф G с $\Delta(G) \leq d$. Так как Z конечно, порядок любого графа $H \in Z$ ограничен сверху. Поэтому за полиномиальное время можно найти все порожденные подграфы графа G , изоморфные H . Для любого множества $U \subseteq V G$ такого, что $G(U) = H$, рассмотрим множество $V = N(U) \setminus U$. Пусть $X = V G \setminus (U \cup V)$. Легко видеть, что подграф $G(U)$ является костабильным тогда и только тогда, когда существует такое независимое множество $I \subseteq X$, что $V \subseteq N(I)$ (I доминирует V). Мощность множества V ограничена сверху: $|V| \leq d|U|$. Обозначим $V' = (N(V) \setminus V) \cap X$. Так как $|V'| \leq d|V|$, за полиномиальное время можно построить все независимые множества $I' \subseteq V'$. Если существует I' , которое доминирует V , то дополним I' до максимального независимого множества I подграфа $G(X)$ и получим $H = G(U) = G - N[I]$, т.е. $H \in \text{CSub}(G)$.

Если указанного I' не существует, то $G(U) \notin \text{CSub}(G)$.

СЛЕДСТВИЕ 3. При любом $d \geq 0$ существует полиномиальный алгоритм распознавания класса $W \cap \{G : \Delta(G) \leq d\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из следствия 2 и предложения 3.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1969.
- [2] Chvátal V., Slater P. A note on well-covered graphs // Quo Vadis Graph Theory? (J. Gimbel et al., eds.) Annals Discrete Math. (North-Holland, Amsterdam). 1993. V. 55. P. 179–182.
- [3] Sankaranarayana R.S., Stewart L.K. Complexity results for well-covered graphs // Networks. 1992. V. 22. P. 247–262.
- [4] Plummer M.D. Well-covered graphs: a survey // Questiones Math. 1993. V. 16. P. 253–287.
- [5] Finbow A., Hartnell B., Nowakowski R. J. A characterization of well-covered graphs of girth 5 or greater // J. Combin. Theory Ser. B. 1993. V. 57. P. 44–68.
- [6] Finbow A., Hartnell B., Nowakowski R. J. A characterization of well-covered graphs which contain neither 4- nor 5-cycles // J. Graph Theory. 1994. V. 18. P. 713–721.
- [7] Whitehead C. A. A characterization of well-covered claw-free graphs containing no 4-cycle // Ars Combin. (to appear).
- [8] Hartnell B., Plummer M.D. On 4-connected claw-free well-covered graphs // Discrete Appl. Math. 1996. V. 64. P. 57–65.

Белорусский государственный университет, г. Минск
E-mail: igor@mmf.bsunibel.by

Поступило
02.12.1997
Исправленный вариант
15.04.1999